

РАЗПОЛОЖЕНИЯ НА ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ И ПРАВИ В ТРИЪГЪЛНИКА

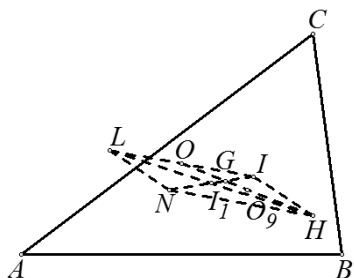
Христо Лесов

Резюме. В настоящата статия се разглежда $\triangle ABC$ и неговите основни забележителни точки: медицентър G (пресечната точка на медианите), ортоцентър H (пресечната точка на височините), център O на описаната окръжност (пресечната точка на симетралите), център I на вписаната окръжност (пресечна точка на ъглополовящите). Изведени са зависимости, които са необходими и достатъчни условия за специални положения на правите, определени от тези забележителни точки.

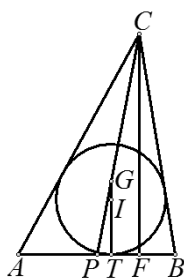
Keywords: triangle, remarkable points, straight lines, special locations

Разположения на забележителни точки в триъгълник. За равнобедрен триъгълник споменатите забележителни точки съвпадат. Лесно се вижда, че ако две от тях съвпадат, то $\triangle ABC$ е равнобедрен. При равнобедрен $\triangle ABC$, за който $AC = BC$, тези четири точки лежат на една права през върха C – симетралата на основата AB . В Лесов 1 от 2008 (задача 7) е изяснено, че точките G, H, O, I лежат на една права само за равнобедрен триъгълник. За неравнобедрен триъгълник точките H, G и O лежат в този ред на една права (права на Ойлер), като $HG = 2OG$ и средата O_9 на отсечката OH е центърът на окръжността на деветте точки (Лесов 1, 2008) (задачи 2 и 3). Както е показано в Лесов от 2009, точката N на Нагел, G и I лежат в този ред на една права, като $NG = 2IG$. Тъй като $\frac{NG}{IG} = 2 = \frac{HG}{OG}$, хомотетията с център G и коефициент $-\frac{1}{2}$ преобразува H в O и N в I . Оттук следва, че $NH \parallel OI$ и $NH = 2OI$. Тази хомотетия преобразува O в O_9 и I в средата I_1 на IN , така че $ON \parallel IO_9$, $ON = 2IO_9$ и $OI \parallel I_1O_9$, $OI = 2I_1O_9$. Понеже същата хомотетия преобразува върховете A, B и C съответно в средите на страните BC, CA и AB , точката I_1 е център на окръжността, вписана в триъгълника с върхове средите на BC, CA и AB . В Билчев & Лесов от 1992 е посочено, че I_1 се нарича точка на Спикер и са показани полезни нейни свойства.

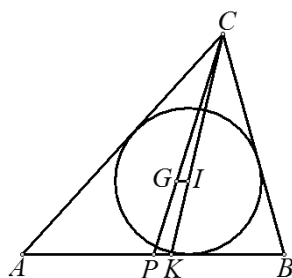
В Лесов 2 от 2008 са разгледани ъглополовящите на външните ъгли на $\triangle ABC$, които при пресичането си определят центровете O_1, O_2 и O_3 на външновписаните окръжности k_1, k_2 и k_3 за $\triangle ABC$. Ако k_1, k_2 и k_3 се допират съответно до страните $BC,$



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3

CA и AB последователно в точките T_1 , T_2 и T_3 , то $O_1T_1 \perp BC$, $O_2T_2 \perp CA$ и $O_3T_3 \perp AB$. Тогава правите O_1T_1 , O_2T_2 и O_3T_3 се пресичат в една точка L , която е центърът на описаната около $\Delta O_1O_2O_3$ окръжност. За него I е ортоцентър, IL е правата на Ойлер, а O – център на окръжността на деветте точки. Следователно O е средата на отсечката LI , т.е. $OL = OI$, $LI = 2OI = NH$ и $LI \parallel NH$. Оттук следва, че $IHNL$ е успоредник, чиито диагонали IN и HL се пресичат в I_1 и $LN \parallel IH \parallel OI_1$, $LN = IH = 2OI_1$ (черт. 1).

Положения на прави през забележителни точки в триъгълник. В Лесов 1 от 2008 (задача 5) е доказано, че за неравностраничен ΔABC правата OGH на Ойлер е перпендикулярна на AB тогава и само тогава, когато $AC = BC$. До същия резултат се стига, когато $IH \perp AB$. Тези твърдения са равносилни със съвпадение на ъглополовящата и височината през върха C . Лесно се установява верността и на следното

Твърдение 1. *Правата OI е перпендикулярна на AB тогава и само тогава, когато $AC = BC$.*

Доказателство: Условието $OI \perp AB$ означава, че точката I лежи върху симетралата на страната AB . Следователно $AI = BI$ и $\angle ABI = \angle BAI$. Понеже AI и BI са ъглополовящи, то $\angle ABC = \angle BAC$ и $AC = BC$.

Ясно е, че за равнобедрен ΔABC с $AC = BC$ точките G , H , O и I лежат на симетралата на AB и $GI \perp AB$. За разностранен триъгълник ще докажем следното

Твърдение 2. *Правата GI е перпендикулярна на AB тогава и само тогава, когато $AC + BC = 3AB$.*

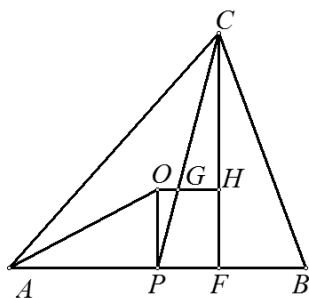
Доказателство: Нека $AC > BC$, точката P е средата на AB , T е допирната точка на вписаната окръжност с AB и F е петата на височината от върха C върху AB (черт. 2). Изпълнени са зависимостите $AP = \frac{1}{2} AB$, $AT = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) > \frac{1}{2} AB = AP$ и $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AF$ ($\angle BAC < 90^\circ$),

откъдето $AF = \frac{1}{2}AB + \frac{AC^2 - BC^2}{2AB} = \frac{1}{2}AB + \frac{AC + BC}{AB} \cdot \frac{AC - BC}{2} > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, защото $AC + BC > AB$. Така получихме, че $AP < AT < AF$, което показва, че T е между P и F . Условието $GI \perp AB$, т.е. $G \in IT \parallel CF$, съгласно теоремата на Талес и обратната ѝ, е равносилно на $\frac{TF}{PT} = \frac{CG}{GP} = 2$, т.е. $TF = 2PT$ или $AF - AT = 2(AT - AP)$, $AF + 2AP = 3AT$. Сега получаваме $\frac{1}{2}AB + \frac{AC^2 - BC^2}{2AB} + AB = \frac{3}{2}(AB + AC - BC)$. След преобразуване получаваме $AC^2 - BC^2 = 3AB \cdot (AC - BC)$. Тъй като $AC > BC$, оттук следва $AC + BC = 3AB$.

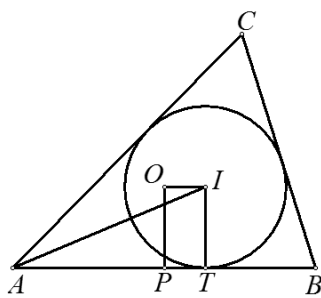
Твърдение 3. Правата GI е успоредна на AB тогава и само тогава, когато $AC + BC = 2AB$.

Доказателство: Тъй като G лежи на медианата CP , I – на ъглополовящата CK на $\angle ACB$ ($K \in AB$) (черт. 3), от теоремата на Талес и обратната ѝ следва, че $GI \parallel AB$, т.е. $GI \parallel PK$ тогава и само тогава, когато $\frac{CI}{IK} = \frac{CG}{GP} = 2$. От свойството на ъглополовящата BI в $\triangle BCK$ изразяваме $\frac{CI}{IK} = \frac{BC}{BK}$, а от свойството на ъглополовящата CK в $\triangle ABC$ имаме $\frac{AK}{BK} = \frac{AC}{BC}$ или $\frac{AB}{BK} = \frac{AC + BC}{BC}$, откъдето $\frac{BC}{BK} = \frac{AC + BC}{AB}$ и $\frac{CI}{IK} = \frac{AC + BC}{AB}$, т.е. $AC + BC = 2AB$.

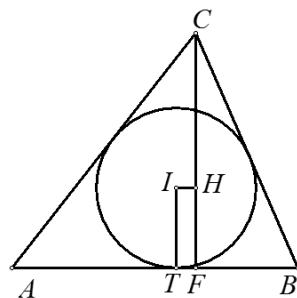
Ще отбележим, че в Гроздев & Ненков от 2011 са разгледани обобщения на току-що доказаните твърдения 2 и 3.



Черт. 4



Черт. 5



Черт. 6

Твърдение 4. За остроъгълен $\triangle ABC$ правата OGH на Ойлер е успоредна на AB тогава и само тогава, когато $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$, където $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle ABC$.

Доказателство: $OP \perp AB$ и $OH \parallel AB$ са еквивалентни с $HF = OP$ (черт. 4). От правоъгълния триъгълник BHF , в който $\angle BHF = \angle BAC = \alpha$, изразяваме $HF = BF \cdot \cot\alpha$. От правоъгълния триъгълник BCF с $\angle CBF = \beta$ имаме $BF = BC \cdot \cos\beta$ и чрез синусовата теорема за $\triangle ABC$ следва $BF = 2R \sin\alpha \cos\beta$ и $HF = 2R \cos\alpha \cos\beta$ (R е радиусът на описаната за $\triangle ABC$ окръжност). От правоъгълния триъгълник AOP , в който $\angle AOP = \angle ACB = \gamma$, имаме $OP = R \cos\gamma$. Така стигаме до равенството $2R \cos\alpha \cos\beta = R \cos\gamma$ или $2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta)$, което води до $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$. Ще отбележим, че за остроъгълен триъгълник е в сила равенството $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ и последния резултат е еквивалентен с $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\gamma$.

Твърдение 5. За остроъгълен триъгълник ABC правата OI е успоредна на AB тогава и само тогава, когато $\cos\alpha + \cos\beta = 1$.

Доказателство: От $OP \perp AB$ и $IT \perp AB$ следва, че $OI \parallel AB$ е еквивалентно с $IT = OP$ (черт. 5) или $r = R \cos\gamma$ (r е радиусът на вписаната за $\triangle ABC$ окръжност). Това равенство се преобразува чрез известните за всеки триъгълник тъждества

$$(1) \quad r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{и} \quad (2) \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{до } \cos\alpha + \cos\beta = 1.$$

Твърдение 6. За остроъгълен $\triangle ABC$ правата IH е успоредна на AB тогава и само тогава, когато е в сила равенството $\cos\alpha + \cos\beta = 1 + 3 \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Доказателство: Тъй като $IT \perp AB$, то $IH \parallel AB$ е еквивалентно с $HF = IT$ (черт. 6) $2R \cos\alpha \cos\beta = r$, което чрез (1) и (2) се представя така: $2 \cos\alpha \cos\beta = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1$, т.е. $\cos\alpha + \cos\beta = 1 + 3 \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Билчев, С., Х. Лесов (1992). Точка на Спикер и някои нейни приложения. *Математика и информатика*, 6, 34.
2. Гроздев, С., В. Ненков (2011). Етюди около точката на Нагел и правата на Нагел. *Математика плюс*, 2, 47 – 51.
3. Лесов, Х. (2008). Права на Ойлер и окръжност на деветте точки за триъгълник. *Математика и информатика*, 1, 76.

4. Лесов, Х. (2008). Забележителни свойства на ъглополовящите в триъгълник. *Математика и информатика*, 2, 61.
5. Лесов, Х. (2009). Точка на Нагел за триъгълник. *Математика и информатика*, 6, 74. (Лесов, 2009).

Христо Лесов

✉ учител

МГ „Н. Обрешков“

гр. Казанлък, България

E-mail: pmgkk@abv.bg

LOCATION OF REMARKABLE POINTS AND STRAIGHT LINES IN THE TRIANGLE

Abstract. The present paper considers $\triangle ABC$ and its main remarkable points: the gravity center G (the common point of the medians), the orthocenter H (the common point of the altitudes), the circumcenter O (the common point of the perpendicular bisectors), the in-center I (the common point of the angle bisectors). Relations are derived, which represent necessary and sufficient conditions for special locations of the straight lines through these remarkable points.

Hristo Lessov

✉ Teacher

Mathematical School „N. Obreshkov“

Kazanlak, Bulgaria

E-mail: pmgkk@abv.bg