

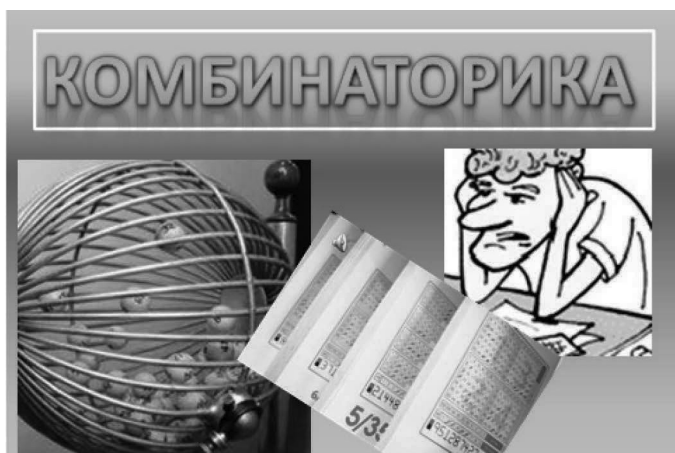
ПЪТЕШЕСТВИЕ В СВЕТА НА КОМБИНАТОРИКАТА

Росица Керчева, Румяна Иванова

Резюме. В Индия на главния вход на едно училище стои надпис: „Стреми се, действай, постигай!“. Нашият малък, но амбициозен екип реши да погледне по друг начин на учебното съдържание по математика, като представи материал от раздел „Комбинаторика“ в края на 10 клас – интересен, забавен и дори вълнуващ.

Статията съдържа първата част от компютърната презентация „Множества и съединения“, класирана на второ място в националния етап на Международни конкурс за учители „Математика и проектиране“. В нея след кратка историческа справка са разгледани понятията множества и съединения, подкрепени с подходящи интересни примери. Следват правилата за събиране и умножение на съединения, както и разнообразни задачи: за шахматни дъски, за приказни герои, електронни пощи, хакери, пароли, сейфове, цветя и др. Включените слайдове са само малка част от презентацията. Те се въвеждат постепенно, стъпка по стъпка, което осигурява необходимото учебно време за по-пълно осмисляне и разбиране на новите знания, както и за анализи и разсъждения при решаването на задачи. Цялата презентация се намира на сайта на ГПЧЕ „Екзарх Йосиф“, гр. Разград.

Keywords: Combinatorics, set, compound, multiplication rule.



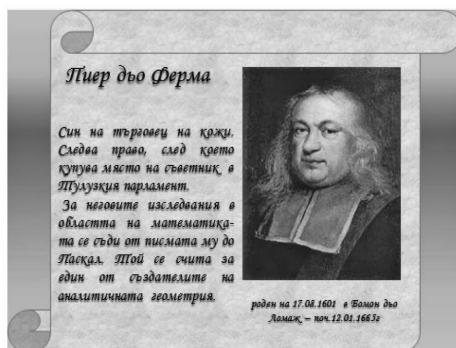
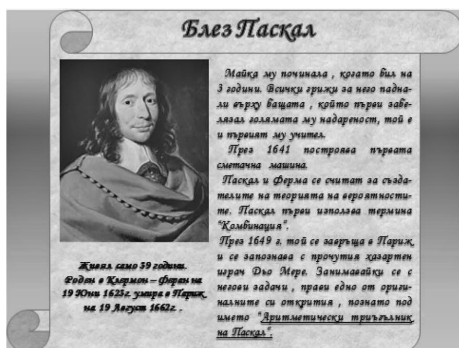
Започва нашето пътешествие в света на комбинаториката. Тук ще се срещнем със случайността, ще се научим да прогнозираме някои случайни събития. Други ще останат невъзможни или неосъществими и ще чакат своя отговор в бъдещето. В този свят има място за приказни герои, хакери, пароли, кодове, сейфове, фишове, зарове и разбира се за числа.

Комбинаториката е дял от математиката, предметът на който е пресмятането на броя на елементите на дадено крайно множество.



Ще се върнем в миналите векове, за да се срещнем с онези, които първи са открили този сложен и интересен свят – света на комбинаториката.

„Живяло някога едно момче, момче като всички останали момчета по света. Но за нещастие то имало зла съдба – останало без майка съвсем мъничко. Момчето имало умен и добър баща, който забелязал необикновените му способности и започнал да го занимава с наука. Блез Паскал, откривателят на сметачната машина, ученият, който първи използва термина „комбинаторика“ и който заедно с Ферма поставя основите на теорията на вероятностите. Много са учените, допринесли за развитието на тази наука: Пиер дьо Ферма, Готфрид Лайбниц, Якоб Бернули, Кристиан Крамп и др.





Готфрид Вилхелм Лайбниц

Следва философия в Лайпциг, след това право и защитава докторска дисертация. Натоварен с политическа мисия заминава за Париж, където се занимава изключително с математика. Енциклопедист. Написаният от него "Трактат на комбинаторното смятане" - 1666 се счита за първия цялостен труд в тази област.

Роден на 1.07.1646 в Лайпциг - в семейство на професор, починал на 14.11.1716г. в Ханوفر

Елементи на комбинаториката са известни от дълбока древност.

Николо Фонтана Шартали

Венециански математик. Поради крайната си бедност като момче е принуден да краде книги, за да се научи да чете. След това се издига постепенно до частен учител, изчислител и професор във Венеция. Освен някои елементи на комбинаториката той намира и метод за изчисляване на кубичното уравнение.



Роден 1499г. В Италия. Починал 13 декември 1557г. във Венеция

Якоб Бернули

Следвайки теология той тайно изучава математика. В "Искусство на предположенията" са поставени основите на теория на вероятностите. В своя труд от 1713, той затвърждава понятията "пермутация" и "вариация", въведени от белгийския математик Паска през 1656г.



род. 27.12.1654г. в Базел, поч. 16.08.1705г. в Базел

Християн Крамп

Професор в Страсбургски университет -въвежда означението факториел през 1808г.

$(1.2.3.4..... n = n!)$

Роден на 8 юли 1760г. в Страсбург. Починал на 13 май 1826г. на 65 години

Светът около нас е пълен с множества от различни обекти: буквите от една азбука, учениците от една паралелка, атомите в една молекула и др.

МНОЖЕСТВА

- Буквите от една азбука:
 $\{A, B, B, G, D, E, J, Z, I, \dots, Y, Y\}$
- Учениците от една паралелка:
 $\{Анита, Александър, Боян, Виолета, \dots, Юлиан, Явор\}$
- Естествените числа N $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$
- Жителите в еди град • Атомите в една молекула
 $\dots$
- Цифрите на едно число Пример: числото 2 635 489
 $\{2, 6, 3, 5, 4, 8, 9\}$

СА СЪВКУПНОСТИ ИЛИ МНОЖЕСТВА ОТ РАЗЛИЧНИ ОБЕКТИ

Някои от множествата са крайни, други безкрайни. Безкраен и необятен е светът на Галактиките, безкрайна е Вселената, в която живеем.

КОИ МНОЖЕСТВА СА КРАЙНИ И КОИ БЕЗКРАЙНИ?

•Едно множество е безкрайно, ако елементите му са безбройно много.

Пример: Естествените числа, точките върху една права, и др. Безкраен е светът на галактиките.

•Едно множество е крайно, ако елементите му са краен брой.

Примери: Учениците от един клас или от едно училище, жителите на един град и др.



Различно е и подреждането на обектите в крайните множества. Графитът и диамантът, две толкова различни вещества, са изградени от едни и същи атоми, само че са подредени по различен начин.

Обектите на едно крайно множество могат да се разполагат по различни начини. В много случаи това разположение определя различните свойства на тези обекти.

графит диамант

КРАЙНИ МНОЖЕСТВА

Например подреждането на въглеродните атоми в кристалните решетки определя вещества с различни свойства-графит и диамант

В кристалната решетка на графита атомите на въглерода от една и съща плоскост са разположени близо един до друг, а разстоянията между атомите от две съседни плоскости са по-големи.

В кристалната решетка на диаманта разстоянието между всички въглеродни атоми е еднакво. Те са разположени тетраедрично.

Ако изберем само някои елементи от едно множество, отговарящи на определени условия, получаваме съединение. Всяко съединение си има клас. Множествата от примери се състоят от обекти от ежедневието. Докато числата могат да се събират, изваждат, умножават, делят, степенуват, коренуват, то съединенията могат само да се събират и умножават. Много е важно не само да познаваме тези правила, но и да знаем кога и кое от тях трябва да се приложи. Затова използваме един и същ пример, в който от витрината на магазин трябва да си изберем маратонки и антистрес топки. Обръщаме внимание на зададения въпрос и особено на частиците или и и.

КАКВО НАРИЧАМЕ СЪЕДИНЕНИЕ?

Пример 1. Да разгледаме множеството А от уредите по художествена гимнастика $A = \{ \text{топка, обръч, бухалка, лента, възженце} \}$ и образуван от неговите елементи набор $X = \{ \text{обръч, лента} \}$. Новообразуваният набор X от елементи на множеството А се нарича **съединение**.

Броят на отделните елементи, от които е съставено даденото съединение определя неговия **клас**.

В пример 1 множеството X е съединение на 5 елемента от 2-ри клас.



В общия случай, ако множеството А има p елемента, а съединението X - k елемента, казваме, че X е съединение на p елемента от k -ти клас.

Правило за събиране на съединения. Ако елементът **a** може да се избере по p различни начина, а елементът **b** по m различни начина, изборът на **a** или на **b** може да се извърши по $p + m$ начина.

Числата p и m изразяват броя на начините, по които може да се осъществи съответният избор, а не броя на елементите на множествата А и В.



Правилото за събиране на съединения може да се обобщи за повече от две множества. Например, ако към маратонките и топките се добавят и 4 вида спортни фланелки или шапки. Тогава възможните начини за избор ще станат: $2+3+4=9$

Обобщено правило за събиране на съединения. Ако елементът a_1 може да се избере по p_1 начина, a_2 - по p_2 начина, ..., a_k - по p_k начина, изборът на a_1 или на a_2 , ..., или на a_k може да се извърши по $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ начина.



Задача 1. Ваня имала определена сума пари, с която можела да си купи един от двата модела маратонки-Адидас и Пума, или една от трите антистрес топки-бяла, жълта, синя, изложени на витрината на спортния магазин. По колко начина тя може да направи своя избор?

Решение: Маратонките могат да се изберат по два начина, а топките по три. Тъй като е възможно да бъде избран само един предмет, броят на различните начини за избор е $2+3=5$

Като използваме новите понятия, задачата може да се запише така:

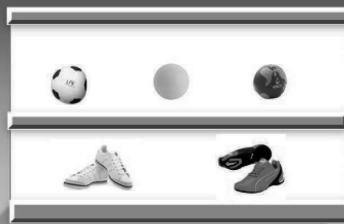
Дадени са множества: $A = \{ \text{маратонки Адидакс, маратонки Пума} \}$

$B = \{ \text{бяла топка, жълта топка, синя топка} \}$

Съставяме съединението X , състоящо се от един елемент, принадлежащ на А или на В, например $X = \{ \text{маратонки Пума} \}$ или $X = \{ \text{жълта топка} \}$

ПРАВИЛО ЗА УМНОЖЕНИЕ НА СЪЕДИНЕНИЯ

Задача 2. Ваня решила да купи един чифт маратонки и една топка. По колко начина може да се осъществи изборът?



РЕШЕНИЕ:

Всички възможни съединения от вида /маратонки, топка/са:



Общият брой съединения е: $2 \cdot 3 = 6$

Аналогично на зад. 1, зад. 2 може да се запише така:

Дадени са множества: $A = \{ \text{маратонки Адидакс, маратонки Пума} \}$

$B = \{ \text{бяла топка, жълта топка, синя топка} \}$

Съставяме съединението X , състоящо се от един елемент на А и един елемент на В, например:

$X = \{ \text{маратонки Пума, синя топка} \}$

Колко са съединенията от вида X ? В тази задача X е съединение, състоящо се от 5 елемента /два от А и три от В/ от втори клас.

Правило за умножение на съединения. Ако елементът **a** може да се избере по p различни начина и при всеки такъв избор елементът **b** може да се избере по m различни начина, то броят на двойките $(a; b)$ е $p \cdot m$.



Правилото за умножение на съединения може да се обобщи за повече от две множества.

Ако в задача 2 към маратонките и топките се добавят и 4 вида спортни фланелки или шапки, измежду които трябва да се избира, възможните начини за избори на маратонки, топка и фланелка ще станат $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Обобщено правило за умножение на съединения. Ако елементът a_1 може да се избере по p_1 начина, като при всеки от изборите елементът a_2 може да се избере по p_2 начина, а при всеки избор на двойката (a_1, a_2) в този ред елементът a_3 може да се избере по p_3 начина и т.н. до съответния избор на a_k по p_k начина, то k -орката $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ може да бъде избрана по $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ начина.

Можем да изброим всички възможности или знаейки правилата, да си спестим това изброяване и да извършим пресмятанията направо. Затвърждаваме правилата чрез задачата за шахматната дъска, която разглеждаме в два различни варианта.

Задача 3: По колко различни начина могат да се поставят върху шахматна дъска един бял и един черен топ така, че те да не могат да се вземат един друг?

Решение:

$$64-15=49$$

?

$$64 \cdot 49 = 3136$$

начина



Задача 4: По колко различни начина могат да се поставят върху шахматна дъска един бял и един черен топ така, че те да не могат да се вземат един друг?

Решение:

?

$$64 \cdot 14 = 896$$

начина



Задача 4: В една фирма има 25 служители. По колко начина могат да се изберат:

а/ председател и заместник- председател

б/ двама заместник- председатели с еднакви задължения?

Решение: Председател между 25 служители може да се избере по 25 различни начина.

1, 2, 3, 4, 25 начина

След избора на председател остават 24 служителя, от които може да се избере заместник- председател

1, 2, 3, 4, 24 начина

Тъй като трябва да се изберат председател и заместник- председател прилагаме правилото за умножение на съединения.

Изборът можем да направим по $25 \cdot 24 = 600$ начина.



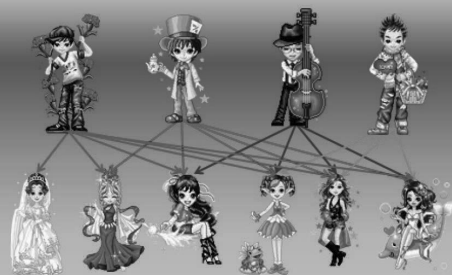
б/ При избора на двама заместник-председатели с еднакви задължения от 25 служители, първият можем да изберем по 25 начина, а вторият по 24.

Според правилото за умножение броят на различните двойки (зам. председател, зам. председател) е $25 \cdot 24 = 600$. Между тях обаче има двойки от вида (Иван, Петър) и (Петър, Иван), които определят един и същ избор, следователно начините за избор са $600 : 2 = 300$.



Авторите на приказки и разкази често завършват с думите: „... и вдигнали голяма и весела сватба, три дни яли, пили и се веселили”. За да достигне до този щастлив край, авторът на роман, в който участват 4 героя и 6 героини, трябвало да реши кой герой за коя героиня да ожени. Колко са възможните начини за избор? За първия герой възможностите са 6, за втория 5, за третия 4, а за четвъртия остават три.

Решение: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ начина



Съвременните герои използват мобилни апарати и компютри, електронни пощи, защитени с пароли. Подбрали сме и такава задача: Паролата за електронната поща на Иван се получава чрез разместване на буквите в думата ЗАДАЧА, а паролата за електронната поща на Мария – от думата БАОБАБ. Ако любопитен хакер, който знае това, иска да прочете тяхната кореспонденция, чия парола ще налучка по-лесно?

За затвърждаване на знанията решаваме още няколко задачи за съставяне на букети, за избор на дрехи при обличане, за плодове, ястия и др.

Задача: Иван решил да подари на Мария цветя. В цветарския магазин разполагали с гербери, орхидеи, рози, карамфили и лилиуми, които аранжирали с три вида тревички за зеленина. Колко различни букета може да му предложи магазинерката, ако в букета Иван пожелал да има само един вид от цветята и един вид от тревичките?

Решение: Всеки вид цвете можем да комбинираме по три начина, като използваме трите вида тревички за зеленина.

5.3=15 различни букета

Ако пък в магазина при аранжирането на букетите използват шест вида хартия, колко стават възможните букети които може да оформи продавачката?

Решение: 5.3.6=90 различни букета

Решенията поднасяме последователно, като изискваме учениците сами да достигнат всяка следваща стъпка.

Задача: По колко различни начина може да се облече Мария за срещата си с Иван, ако има шест поли и осем блузи.

Решение:

$6 \cdot 8 = 48$ различни тоалета



Задача: Закусвалня разполага с 4 вида супи, 6 вида основни ястия и 5 вида плодове за десерт. По колко различни начина можем да си изберем обяд, ако той включва по един вид супа, основно ястие и десерт?

Решение:

$4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$ различни начина



ЛИТЕРАТУРА

1. Лозанов, Ч. (2009). *Учебник по математика за 10 клас*. София: Анубис.
2. Додунеков, С. (2009). *Учебник по математика за 10 клас*. София: Регалия 6.

✉ Росица Керчева
старши учители по математика
ГПЧЕ „Екзарх Йосиф”, гр. Разград
E-mail: rskercheva@abv.bg

Румяна Иванова
старши учители по математика
ГПЧЕ „Екзарх Йосиф”, гр. Разград
E-mail: ruteko@dir.bg

A JOURNEY IN THE WORD OF COMBINATORICS

Abstract. A sign on the front gate of a school in India reads: „Strive for it and do it.” Our small but ambitious team has decided to look at the Combinatorics section of the Mathematics textbook for 10th grade from another angle in order to present it in an interesting, amusing, and exciting way.

The paper contains the first part of the PowerPoint presentation of „A Journey in the World of Combinatorics”, ranked second in the National stage of the International Competition for teachers „Mathematics and Projecting”. After a short historical review, the notions of a set and a combination are considered under the support of suitable and interesting examples. The

rules for summation and multiplication of combinations follow as well as various tasks: for chess games of chess, fairy characters, e-mails, hackers, passwords, safes, flowers, etc. The included slides constitute a small part of the presentation. They are introduced successively, step by step, which assures the necessary teaching time for a more profound and meaningful understanding of new knowledge, for analysis and reasoning in problem solving. The whole presentation is on the website of the „Ekzarh Jossiff” High School for Foreign Languages, Razgrad.

✉ Rositsa Kercheva
Teacher in Mathematics
“Ekzarh Jossiff” High School for Foreign Languages, Razgrad
E-mail: rskercheva@abv.bg

Rumyana Ivanova
Teacher in Mathematics
“Ekzarh Jossiff” High School for Foreign Languages, Razgrad
E-mail: ruteko@dir.bg