



**НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ
„АКАД. Л. ЧАКАЛОВ“
ПРИМЕРНА ТЕМА
ЗА ВЪТРЕШЕН ПРОФИЛИРАЩ ИЗПИТ
ПО МАТЕМАТИКА**

Задача 1. Да се пресметне числената стойност на израза

$$A = (2x-1)^2 - (1-x)^2 (x+1)^2 + (x^2-1)^2 - 4(-x+2)^2 \text{ при } x = \frac{10^6 \cdot 2^7 - 25^3 \cdot 8^4}{5^6 \cdot 2^{11}}.$$

Задача 2. Да се реши уравнението $|4x^2 + 2 - (2x+1)^2| - 3|1-4x| = -6$.

Задача 3. Да се реши уравнението $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Задача 4. При кои стойности на параметъра a неравенствата

$$(3x-1)^2 + 3(x+2) < 3x(2x-1) \text{ и } \frac{2a-1}{3} \cdot x < -3 \text{ са еквивалентни?}$$

Задача 5. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AL ($L \in BC$). Правата през L , която е успоредна на AC , пресича страната AB в точка P . Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако $\sphericalangle APL = 130^\circ$ и $\sphericalangle APL : \sphericalangle ABC = 3:2$.

Задача 6. От две гари едновременно тръгнали един срещу друг два влака. Да се намери след колко часа те ще се срещнат, ако е известно, че единият влак може да измине разстоянието между двете гари за $2\text{ h } 20\text{ min}$, а другият – за $3\text{ h } 30\text{ min}$.

Задача 7. За да изработи една поръчка машинни детайли в определен срок, бригада трябва да изработва по 25 детайла дневно. След три дни работа бригадата увеличила дневната си производителност с 5 детайла, поради което изработила 100 детайла над плана за определения срок. Да се намери колко детайла е изработила бригадата и за колко дни.

Задача 8. Точките P и Q са съответно средите на бедрата AC и BC на равнобедрения $\triangle ABC$, а CM е височина в същия триъгълник. Нека $\angle BAC : \angle PMQ = 5:2$. Да се намери разстоянието от точката Q до правата MP , ако $AC = 8$ см.

Задача 9. Даден е триъгълникът ABC , в който $\angle ACB = 60^\circ$. Ъглополовящите AD ($D \in BC$) и BE ($E \in AC$) се пресичат в точката I . Да се докаже, че $AE + BD = AB$.

Задача 10. Да се реши в цели числа уравнението $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. След еквивалентни преобразувания получаваме

$$A = 4x^2 - 4x + 1 - (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 4(4 - 4x + x^2) = 12x - 15 \quad (2 \text{ т.})$$

Пресмятаме стойността на $x = \frac{(2.5)^6 \cdot 2^7 - 5^6 \cdot 2^{12}}{5^6 \cdot 2^{11}} = \frac{5^6 \cdot 2^{12} (2 - 1)}{5^6 \cdot 2^{11}} = 2 \quad (1,5 \text{ т.})$,
откъдето $A = 24 - 15 = 9$. (0,5 т.)

Задача 2. $|4x^2 + 2 - 4x^2 - 4x - 1| - 3|1 - 4x| = -6$ (1 т.), което е еквивалентно с $|1 - 4x| = 3$ (1 т.).

I сл.) $1 - 4x = 3$, т.е. $x_1 = -\frac{1}{2}$ (1 т.); II сл.) $1 - 4x = -3$, т.е. $x_2 = 1$ (1 т.).

Задача 3. След подходящо разлагане на множители даденото уравнението става $(x-1)(x-2)(x+2) = 0$ (2,5 т.). Оттук $x_1 = 1$ (0,5 т.), $x_2 = 2$ (0,5 т.) и $x_3 = -2$ (0,5 т.).

Задача 4. След еквивалентни преобразувания неравенството $(3x-1)^2 + 3(x+2) < 3x(2x-1)$ добива вида $0x < -7$, което няма решение. (2 т.). За

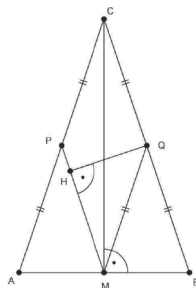
да бъдат еквивалентни двете неравенства, трябва и второто неравенство да няма решение, т.е. $\frac{2a-1}{3} = 0$ (1 т.). Следователно неравенствата са еквивалентни при $a = \frac{1}{2}$ (1 т.).

Задача 5. Нека $\sphericalangle ACB = 3x$, а $\sphericalangle ABC = 2x$. Тогава от $(AC \parallel PL) \times AB$ следва, че $\sphericalangle CAB + 130^\circ = 180^\circ$, т.е. $\sphericalangle CAB = 50^\circ$ (2 т.). От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC$ имаме, че $5x + 50^\circ = 180^\circ$, откъдето $x = 26^\circ$ (1 т.). Следователно $\sphericalangle ACB = 78^\circ$ (0,5 т.) и $\sphericalangle ALC = 77^\circ$ (0,5 т.).

Задача 6. Нека S ($S > 0$) е разстоянието между двете гари. Тъй като единият влак изминава разстоянието между двете гари за 2 ч. 20 мин. $= \frac{7}{3}$ часа (0,5 т.), то скоростта на този влак е $v = 3S/7 \text{ km/h}$ (0,5 т.). Другият влак изминава разстоянието между двете гари за $\frac{7}{2}$ часа (0,5 т.) със скорост $v_{II} = \frac{2S}{7} \text{ km/h}$ (0,5 т.). Нека t ($t > 0$) е времето до срещата. Тогава съставяме уравнението $\frac{3S}{7} \cdot t + \frac{2S}{7} \cdot t = S$ (1 т.), откъдето получаваме че двата влака ще се срещнат след 1 ч. 24 мин. (1 т.).

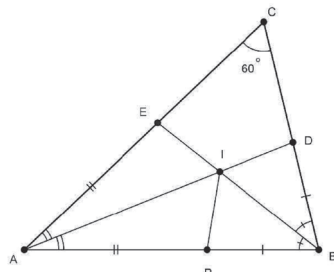
Задача 7. Нека срокът за изпълнение на поръчката е x ($x > 0$) дни. (0,5 т.) Тогава поръчката е за $25x$ детайла (0,5 т.). През първите 3 дни бригадата е изработила 75 детайла (0,5 т.), а през останалите $(x - 3)$ дни – съответно $30(x - 3)$ детайла (0,5 т.). Като използваме условието, получаваме уравнението $75 + 30(x - 3) = 25x + 100$ (1 т.). Оттук $x = 23$ (0,5 т.). Така намираме, че бригадата е изработила $25 \cdot 23 + 100 = 675$ детайла за 23 дни (0,5 т.).

Задача 8. От това, че $\triangle ABC$ е равнобедрен, следва, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 5x$. Тогава $\sphericalangle PMQ = 2x$. (0,5 т.) От това, че MQ е медиана в правоъгълния $\triangle BMC$, следва, че $MQ = BQ = CQ = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AC = 4 \text{ cm}$. (1 т.) Тогава $\triangle BMQ$ е равнобедрен и $\sphericalangle QMB = 5x$. Аналогично $\sphericalangle AMP = 5x$. (0,5 т.) Така имаме, че $12x = 180^\circ$, т.е. $x = 15^\circ$ и $\sphericalangle PMQ = 30^\circ$. (1 т.) Нека $QH \perp PM$ е търсеното разстояние. Тогава от правоъгълния $\triangle HMQ$ с $\sphericalangle HMQ = 30^\circ$ имаме, че $HQ = \frac{1}{2} MQ = 2$. (1 т.)



Задача 9. Нека $AP = AE$ ($P \in AB$). (**1 т.**) Разглеждаме $\triangle AEI$ и $\triangle AIP$:

1) $AE = AP$ (по построение);
 2) AI – обща страна;
 3) $\angle EAI = \angle IAP$. От първи признак за еднаквост на триъгълници, следва че $\triangle AEI \cong \triangle AIP$. (**0,5 т.**) Следователно $\angle EIA = \angle AIP$, като съответни ъгли в еднакви



триъгълници. (**0,5 т.**) Тъй като $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = 120^\circ$, то $\angle EIA = \angle AIP = 60^\circ$. (**0,5 т.**) Тогава $\angle BID = \angle EIA = 60^\circ$ като върхни ъгли. Оттук $\angle PIB = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$. Разглеждаме $\triangle BIP$ и $\triangle BID$:

1) $\angle BIP = \angle BID = 60^\circ$; 2) BI – обща страна; 3) $\angle PBI = \angle DBI$. По втори признак за еднаквост на триъгълници следва, че $\triangle BIP \cong \triangle BID$. (**0,5 т.**) Тогава $BD = BP$, като съответни страни в еднакви триъгълници. (**0,5 т.**) Следователно $AB = AP + PB = AE + BD$. (**0,5 т.**)

Задача 10. Записваме даденото уравнение във вида $(x^3 + 1)(x^2 + x + 1) = y^2$ (**0,5 т.**).

Тъй като $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то уравнението няма решение при $x \leq -2$.

Очевидно двойките $(-1; 0)$, $(0; -1)$ и $(0; 1)$ са решения на уравнението. (**1 т.**) Нека $x > 0$. Понеже $x^3 + 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2$, то най-големият общ делител на $x^3 + 1$ и $x^2 + x + 1$ дели 2, т.е. е 1 или 2. (**0,5 т.**) Но $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ е нечетно число, следователно числата $x^3 + 1$ и $x^2 + x + 1$ са взаимно прости и за да бъде произведението им точен квадрат, е необходимо всяко от тях да е точен квадрат. (**1 т.**) Но при $x > 0$ са изпълнени неравенствата $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$. Следователно $x^2 + x + 1$ не може да бъде точен квадрат. Ето защо даденото уравнение няма други решения освен посочените по-горе. (**1 т.**)

Темата е предложена от Илия Костов,
 преподавател по математика и информатика в НПМГ "Акад. Л. Чакалов"