

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ГЕОМЕТРИЯТА НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА ЗА РЕШАВАНЕ НА НЕСТАНДАРТНИ ЗАДАЧИ

¹Проф. д.п.н. Йордан Табов, ²проф. д-р Веселин Ненков,

³гл. ас. д-р Асен Велчев, ⁴гл. ас. д-р Станислав Стефанов

¹Институт по математика и информатика – Българска академия на науките

²Висше военноморско училище „Никола Й. Вапцаров“

³Технически университет – София

⁴Университет по архитектура, строителство и геодезия

Резюме. В последно време бяха положени основите на пълна геометрия на четириъгълника, изградена по подобие на класическата геометрия на триъгълника. На нея бяха посветени множество статии, както и дисертационният труд на един от авторите на тази публикация (Stefanov 2020), а скоро предстои да излезе от печат и обхващаща я изцяло книга. Настоящата публикация има за цел да ни убеди в ползата от изучаването на тази геометрия. През последните години в рубриките „Конкурсни задачи“ и „Задачи М+“ на списание „Математика и информатика“ и списание „Математика плюс“ бяха включени ред задачи, които се решават трудно, ако не се владеят елементи от геометрията на четириъгълника. Познаването на свойствата на забележителните точки, прави и окръжности в четириъгълника, както и на изображенията в него – предмет на неговата геометрия, не само дава идеи за решаването на тези задачи, но и служи при тяхното осъществяване. Това веднъж беше показано в (Nenkov, Stefanov & Haimov 2020), а тук ще го потвърдим отново, с още интересни примери.

Ключови думи: четириъгълник; забележителни точки; изображения; конкурсни задачи

1. Въведение

Предмет на геометрията на четириъгълника са свойствата на ред забележителни точки, прави и окръжности в него, както и на две универсални изображения в равнината му. Към тях трябва да добавим и ред нови метрически зависимости в четириъгълника, в това число косинусовата и котангесовата теорема за него, нови неравенства, тъждества и т.н. Към изброените елементи от геометрията на четириъгълника се прибавят още и важни обобщения на ред класически теореми от геометрията – теоремите на Микел, Гаус и Обер за четириъгълника, първа и втора теорема на Щайнер, теорема на Карно за три-

ъгълника, допълнение към теоремата на Брокер за вписания четириъгълник и т.н.

Тук ще запознаем читателите със свойствата на две забележителни точки в четириъгълника и на едно изображение в равнината му, които ще ни помогнат да решим лесно три нестандартни задачи.

2. Епицентър на четириъгълник. Една кратка формула за лицето му

Най-елементарната забележителна точка в четириъгълник се дефинира по следния начин. Точката O от вътрешността на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за която са изпълнени равенствата $S_{AOB} = S_{COD}$ и $S_{AOD} = S_{BOC}$, се нарича негов *епицентър* (фигура 1). Доказано е, че така дефинираната точка съществува и е еднозначно определена (Haimov 1997).

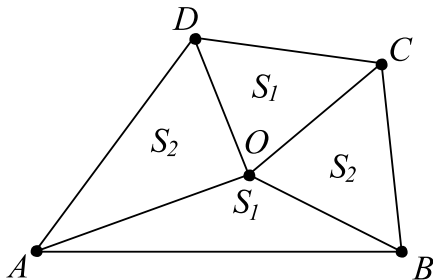
Две точки от срещуположни страни на изпъкнал четириъгълник, които делят страните в едно и също отношение, считано от срещуположни краища, се наричат *изотомични*. Съществува достатъчно условие една отсечка, свързваща две изотомични точки от срещуположни страни на четириъгълник, да съдържа епицентъра.

Свойство 1. Отсечката MN , свързваща две изотомични точки от срещуположни страни на четириъгълника, съдържа епицентъра, ако тя разполовява лицето му (Haimov 1996).

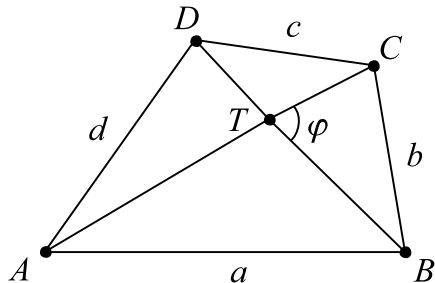
Да припомним и следната известна формула за лице на изпъкнал четириъгълник, която ще използваме в изложението.

Теорема. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и дължините на страните му AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d . Ако φ е мярката на ъгъла между диагоналите AC и BD , който лежи срещу страната BC , то лицето S на четириъгълника се определя по формулата (фигура 2):

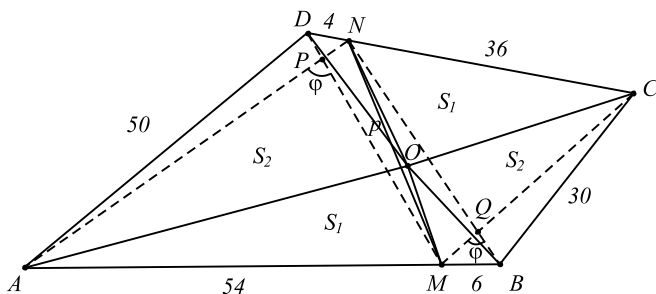
$$S = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ.$$



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

Да разгледаме следната:

Задача 1. В четириъгълника $ABCD$ дължините на страните BC , CD , DA и AB са съответно 30, 40, 50 и 60. Върху страните AB и CD са взети съответно точките M и N , за които $AM = 54$ и $DN = 4$. Нека $P = AN \cap DM$ и $Q = CM \cap BN$. Ако $\angle APM = \angle BQM = \varphi$, $\varphi \neq 90^\circ$, да се докаже, че върху отсечката MN има точка O такава, че $S_{AOB} = S_{COD}$ и $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Решение I: понеже $\frac{AM}{MB} = \frac{54}{6} = 9$ и $\frac{CN}{DN} = \frac{36}{4} = 9$ (фигура 3), точките M и

N от страните AB и CD са изотомични. Точката O в задачата е епицентърът на $ABCD$. За да докажем, че $O \in MN$ съгласно свойство 1, е достатъчно да докажем, че отсечката MN разполовява лицето на $ABCD$. Означаваме $|MN| = p$ и полагаме: $\angle APM = \angle BQM = j$, $j \neq 90^\circ$. С помощта на споменатата формулата за лице на четириъгълник получаваме:

$$S_{AMND} = \frac{1}{4}(50^2 + p^2 - 54^2 - 4^2) \operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{p^2}{4} - 108 \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$S_{BMNC} = \frac{1}{4}(30^2 + p^2 - 36^2 - 6^2) \operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{p^2}{4} - 108 \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

Виждаме, че $S_{AMND} = S_{BMNC}$, т.е. че отсечката MN наистина разполовява лицето на четириъгълника $ABCD$. Следователно $O \in MN$.

Сега ще разгледаме друго решение на задачата, което се намира по-трудно, но е освободено от използването на свойство 1.

Решение II: нека O е точката от вътрешността на четириъгълника $ABCD$, за която $S_{AOB} = S_{COD}$ и $S_{AOD} = S_{BOC}$. От съображения за непрекъснатост следва, че такава точка съществува. Ще докажем, че тя лежи на отсечката MN .

Да допуснем противното и нека например тя попада във вътрешността на четириъгълника $MBCN$ (фигура 3). Означаваме $S_{AOB} = S_{COD} = S_1$ и $S_{AOD} = S_{BOC} = S_2$. Имаме:

$$S_{AMOND} > S_{AMND} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

От друга страна, $S_{AMO} = \frac{54}{60} S_{AOB} = 0,9 \cdot S_1$ и $S_{DNO} = \frac{4}{40} S_{DOC} = 0,1 \cdot S_1$.

Тогава:

$$S_{AMOND} = S_{AMO} + S_{AOD} + S_{DNO} = 0,9 \cdot S_1 + S_2 + 0,1 \cdot S_1 = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Получаваме противоречие с горното неравенство. Следователно допускването е невярно и $O \in MN$.

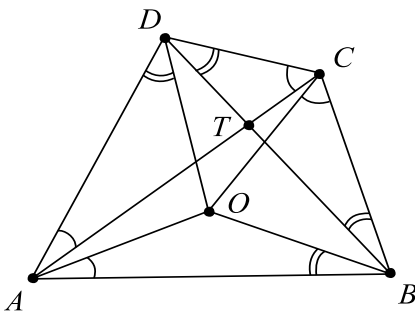
3. Едно изображение в равнината на четириъгълник

От геометрията на триъгълника познаваме следната дефиниция: „Две прави през върха на даден ъгъл се наричат изогонални, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му (а следователно и с раменете му)“. Ще използваме това определение, за да дефинираме едно изображение в равнината на четириъгълник: „Две точки се наричат изогонално спрегнати спрямо даден четириъгълник, ако лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му“ (фигура 4а).

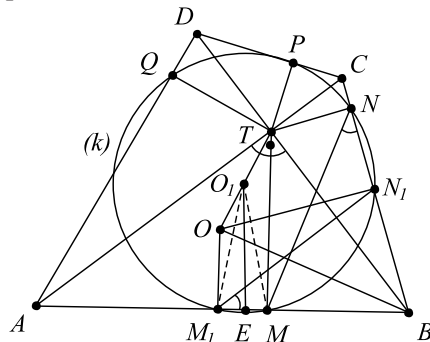
Съществува прост критерий една точка от вътрешността на изпъкнал четириъгълник да има изогонално спрегната точка.

Свойство 2. Точката O от вътрешността на четириъгълника $ABCD$ има изогонално спрегната точка тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството: $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ (Alexandrov & Haimov 2003).

Сега вече можем да разгледаме и втората задача.



Фигура 4а



Фигура 4б

Задача 2. Да се докаже, че в четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали съществува точка O (фигура 4а), за която са изпълнени равенствата:

$$\angle OBA = \angle DBC, \angle OCB = \angle ACD, \angle ODA = \angle BDC \text{ и } \angle OAB = \angle CAD$$

Решение I: означаваме пресечната точка на диагоналите AC и BD с T (фигура 4а). Лесно се съобразява, че търсената в задачата точка O е точка, изогонално спрегната на T . Но понеже $\angle ATB + \angle CTD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, свойство 2 ни гарантира съществуването на такава точка.

Решение II: означаваме ортогоналните проекции на точката T върху правите AB , BC , CD и DA съответно с M , N , P и Q (фигура 4б). Ще докажем, че четириъгълникът $MNPQ$ е вписан в окръжността, означена с (k) . Тъй като четириъгълниците $AMTQ$, $BNTM$, $CPTN$ и $DQTP$ са вписани, то $\angle QMT = \angle QAT$, $\angle NMT = \angle NBT$, $\angle NPT = \angle NCT$ и $\angle QPT = \angle QDT$. С помощта на тези равенства получаваме последователно:

$$\begin{aligned} \angle QMN + \angle QPN &= (\angle QMT + \angle NMT) + (\angle QPT + \angle NPT) = \\ &= (\angle QAT + \angle NBT) + (\angle QDT + \angle NCT) = \\ &= (\angle QAT + \angle QDT) + (\angle NBT + \angle NCT) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Следователно точките M , N , P и Q лежат на една окръжност (k) .

Нека O_1 е центърът на (k) , а O е точката, симетрична на T спрямо O_1 . Ще докажем, че точката O удовлетворява свойствата от условието на задачата. Нека M_1 и N_1 са ортогоналните проекции на O съответно върху правите AB и BC , а E е средата на отсечката M_1M . Тъй като O_1E е средна основа в трапеца M_1OTM , то $O_1E \perp MM_1$ и затова O_1E е симетрала на MM_1 . Следователно $O_1M_1 = O_1M$, което означава, че $M_1 \in (k)$. Аналогично се показва, че $N_1 \in (k)$. Сега получаваме $\angle MM_1N_1 = \angle MNN_1$ (като вписани в (k) ъгли). По-нататък от вписаните четириъгълници M_1BN_1O и $MTNB$ получаваме съответно:

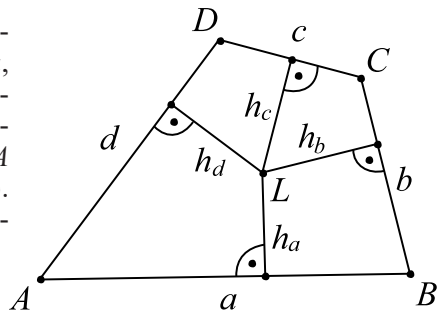
$$\angle MM_1N_1 = \angle BM_1N_1 = \angle BON_1 \text{ и } \angle MNN_1 = \angle MTB.$$

От последните три равенства следва, че $\angle BON_1 = \angle MM_1N_1 = \angle MNN_1 = \angle MTB$. Т. е., че $\angle BON_1 = \angle MTB$. Но $\angle OBC = 90^\circ - \angle BON_1$ и $\angle DBA = 90^\circ - \angle MTB$. Следователно $\angle OBC = 90^\circ - \angle BON_1 = 90^\circ - \angle MTB = \angle DBA$, т.е. $\angle OBC = \angle DBA$. Оттук непосредствено следва, че $\angle OBA = \angle DBC$. С това е доказано първото равенство в задачата. Останалите три равенства се доказват аналогично.

Преди да разгледаме третата задача, ще запознаем читателите с още една забележителна точка в изпъкнал четириъгълник. Нека $ABCD$ е изпък-

нал четириъгълник и дължините на страните му AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d . Означаваме разстоянията от произволна точка от вътрешността на четириъгълника до страните му AB , BC , CD и DA съответно с h_a , h_b , h_c и h_d (фигура 5). Точката L , за която са изпълнени равенствата:

$$\frac{h_a}{a} = \frac{h_c}{c} = k_1 \text{ и } \frac{h_b}{b} = \frac{h_d}{d} = k_2,$$

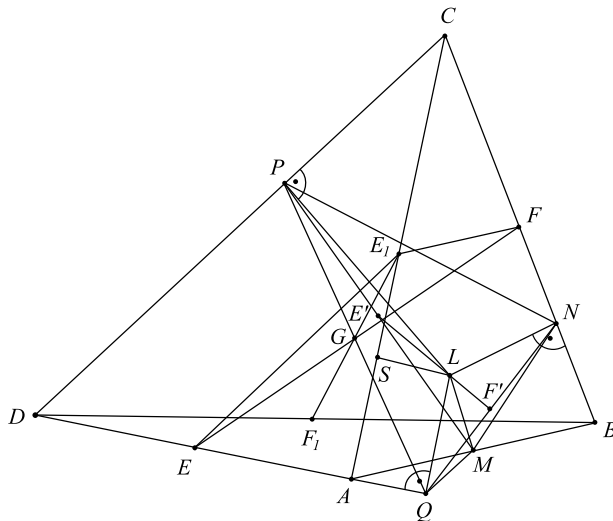


Фигура 5

се нарича точка на Лемоан на четириъгълника. Ако $k_1 = k_2$, четириъгълникът $ABCD$ се нарича Лемоанов. **Забележка:** точка на Лемоан на триъгълник е такава точка от неговата равнина, разстоянията от която до страните на триъгълника са пропорционални на дължините на съответните страни. В триъгълника има четири точки на Лемоан – една вътрешна и три външни, а в четириъгълник точката на Лемоан е само една.

В (Наймов 2011) е доказано следното твърдение:

Свойство 3. Точката на Лемоан в Лемоанов четириъгълник е медицентър за педалния си четириъгълник (който е образуван от петите на перпендикулярите h_a , h_b , h_c и h_d , спуснати от точката на Лемоан към съответните страни на дадения четириъгълник).



Фигура 6

Да разгледаме следната:

Задача 3. Да се докаже, че ако в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ точката на Лемоан L на $\triangle ABC$ съвпада с външната точка на Лемоан на $\triangle ADC$, съответна на върха D , то L е медицентър на четириъгълника с върхове ортогоналните проекции на L върху правите, съдържащи страните на $ABCD$.

Решение I: означаваме ортогоналните проекции на точката L върху правите AB, BC, CD, DA и AC съответно с M, N, P, Q и S . Понеже L е точка на Лемоан за $\triangle ABC$, то $\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{BC} = \frac{LS}{AC}$, а понеже L е точка на Лемоан за $\triangle ADC$, то $\frac{LS}{AC} = \frac{LP}{CD} = \frac{LQ}{DA}$ (фигура 6). Следователно:

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{BC} = \frac{LP}{CD} = \frac{LQ}{DA}.$$

Това означава, че L е точка на Лемоан за четириъгълника $ABCD$ и че той е Лемоанов. От свойство 3 можем да заключим, че L е медицентър на педалния си четириъгълник $MNPQ$.

Решение II: означаваме ортогоналните проекции на точката L върху правите AB, BC, CD, DA и AC с M, N, P, Q и S , средите на страните AD и BC – с E и F , средите на диагоналите AC и BD – с E_1 и F_1 , а средите на диагоналите MP и QN на четириъгълника $MNPQ$ – с E' и F' (фигура 6).

Достатъчно е да докажем, че L съвпада със средата на отсечката $E'F'$. Означаваме общата среда на отсечките EF и E_1F_1 с G . От свойство на вътрешната и външната точка на Лемоан, приложено към $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, имаме: $\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{BC} = \frac{LS}{AC}$ и $\frac{LS}{AC} = \frac{LP}{CD} = \frac{LQ}{AD}$ съответно. Оттук следва равенството:

$$(*) \quad \frac{LM}{AB} = \frac{LN}{BC} = \frac{LP}{CD} = \frac{LQ}{AD} = k.$$

Същевременно $LM \perp AB$, а $E_1F \parallel AB$ (средна отсечка), затова $LM \perp E_1F$ и също $LP \perp DC$, а $EE_1 \parallel DC$ (средна отсечка), затова $LP \perp EE_1$. Освен това от $(*)$ следва: $\frac{LM}{E_1F} = \frac{2 \cdot LM}{AB} = 2 \cdot k$ и $\frac{LP}{EE_1} = \frac{2 \cdot LP}{CD} = 2 \cdot k$. Можем следователно да заключим, че при въртящата хомотетия h с център E_1 , коефициент $2 \cdot k$ и ъгъл $+90^\circ$ отсечките E_1F и EE_1 се изобразяват съответно в отсечки,

успоредни и равни на отсечките LM и LP . Следователно при тази въртяща хомотетия ΔE_1FE се изобразява в триъгълник с две страни, успоредни и равни на две страни на ΔLMP . От своя страна, последният триъгълник при трансляцията на вектор $E_1\bar{L}$ се изобразява в ΔLMP . Можем да заключим, че ΔLMP е образ на ΔE_1FE при композицията от двете преобразувания. Понеже LE' и $E_1\bar{G}$ са съответни медиани в тези триъгълници, то: $E'L = 2 \cdot k \cdot E_1\bar{G}$ и $E'L \perp E_1\bar{G}$. По същия начин се доказва, че $F'L = 2 \cdot k \cdot F_1\bar{G}$ и $F'L \perp F_1\bar{G}$. Оттук следва, че точките E' , L и F' лежат на една права, перпендикулярна на E_1F_1 и че $F'L = E'L$, тоест, че L съвпада със средата на отсечката $E'F'$, което и оставаше да докажем.

В заключение ще отбележим, че задачи, посветени на геометрията на четириъгълника, бяха давани и продължават да се дават и на международни олимпиади по математика. На такива задачи ще се спрем в отделна статия.

ЛИТЕРАТУРА

- ALEXANDROV, PL., HAIMOV, H, 2003. Geometry of the Quadrangle. Isogonal Conjugated Points. *Collection of scientific works of International Congress of MASSEE*, 15 – 21 September, Borovets, с. 141 – 146.
- ХАИМОВ, Х., 1996. Едно обобщение на теоремата на Щайнер, *Математика*, кн. 6, с. 9 – 15.
- ХАИМОВ, Х., 1997. Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика*, кн. 1, с. 18 – 23.
- ХАИМОВ, Х., 2011. Точка на Лемоан, *Математика*, кн. 6, с. 4 – 12.
- НЕНКОВ, В., СТЕФАНОВ, СТ., ХАИМОВ Х., 2020. Приложение на геометрията на четириъгълника за решаване на състезателни задачи. *Синергетика и рефлексия в обучението по математика*, Сборник доклади от юбилейна международна научна конференция, Пампорово, 16 – 18 октомври, с. 121 – 128, ISBN 978-619-202-595-3.
- СТЕФАНОВ, СТ., 2020. *Изследователски подход при подготовката на талантиливи състезатели за математически състезания и конкурси*, дисертация, ФМИ, Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“.

REFERENCES

- ALEXANDROV, PL., HAIMOV, H, 2003. Geometry of the Quadrangle. Isogonal Conjugated Points. *Collection of scientific works of International Congress of MASSEE*, 15 – 21 September, Borovets, pp. 141 – 146.

- HAIMOV, H., 1996. A Generalization of Steiner's Theorem, *Mathematics*, no. 6, pp. 9 – 15. [in Bulgarian]
- HAIMOV, H., 1997. The Epicenter – a Notable Point in the Quadrilateral, *Mathematics*, no. 1, pp. 18 – 23 [in Bulgarian].
- HAIMOV, H., 2011. Lemoine's Point, *Mathematics*, no. 6, pp. 4 – 12 [in Bulgarian].
- NENKOV, V., STEFANOV, ST., HAIMOV, H., 2020. An Application of Quadrilateral's Geometry in Solving Competitive Mathematical Problems. *Synergetic and reflection in mathematics education, Proceedings of the anniversary international scientific conference*, Pamporovo, October 16 – 18, pp. 121 – 128, ISBN 978-619-202-595-3 [in Bulgarian].
- STEFANOV, ST., 2020. *Investigatory Approach in the Coaching Talented Competitors for Mathematics contests and concourses*, PhD Thesis, FMI, Shumen University "Episkop Konstantin Preslavsky" [in Bulgarian].

AN APPLICATION OF ELEMENTS OF THE QUADRILATERAL'S GEOMETRY FOR SOLVING NON-STANDARD PROBLEMS

Abstract. Lately, the foundations of a complete geometry of the quadrilateral were laid, built in analogy of the classical geometry of the triangle. Several articles were devoted to it, the PhD-dissertation work of one of the authors of this article (Stefanov 2020), and a book encompassing it in its entirety is soon to be published. This publication aims to convince the readers in the benefits of studying this geometry. During the last years the rubrics „Contest problems“ and „Problems M+“ of the journals „Mathematics and Informatics“ and „Mathematics Plus“ included difficult problems, whose solutions are complex for somebody who doesn't know and doesn't use elements of the quadrilateral's geometry. Knowing the properties of the remarkable points, lines and circles, as well as the mappings in the quadrilateral, which are subjects of its geometry, not only provides ideas for solving this problem, but also serves for their implementation (to carry out the solution). This was shown once in (Nenkov, Stefanov & Haimov 2020). We will confirm it here again, with new interesting examples.

Keywords: quadrilateral; remarkable points; mappings; contest problems

✉ **Prof. Jordan Tabov, DSc.**

ORCID iD: 0000-0001-5436-5134

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Prof. Dr. Veselin Nenkov**

Researcher ID: AAB-5776-2019
Naval Academy “Nikola Y. Vaptsarov”
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Dr. Asen Velchev, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-6653-465X
Technical University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: asen_v@abv.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-8254-1075
University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg