

ПРАКТИКОПРИЛОЖНИ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Румяна Несторова

Резюме. В статията са разгледани примерни приложения на изучавани математически знания в гимназиален етап на обучение по математика. Предложените задачи са по формата на PISA и формират умения за моделиране на различни ситуации.

Keywords: problem; problem solving; practice-applicable problem; PISA

Във всички действащи учебници по математика се използват задачи с практикоприложен характер с цел мотивиране на учениците за придобиване на математически знания и умения и показване на практическата им приложимост.

От 2012 г. практикоприложни задачи се използват и в Националното външно оценяване в края на VII клас с цел подобряване на приложните умения на учениците и резултатите им в PISA¹⁾. Съгласно учебно-изпитната програма по математика за Национално външно оценяване в края на VII клас вторият модул на изпитния тест съдържа 2 задачи с практикоприложен характер със свободен отговор. По този начин се реализира идеята за проверка на способността на учениците да използват и прилагат знания, умения и опит, придобити в училище, в ситуации от реалния живот с различен контекст.

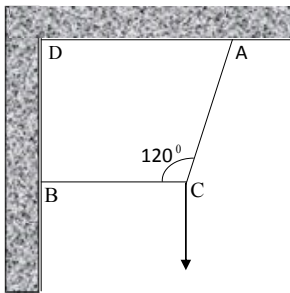
В действащата учебно-изпитна програма за държавен зрелостен изпит по математика не е заложено изрично изискването за оценяване чрез практикоприложни задачи. Съгласно нея изпитният тест съдържа 28 задачи от три типа:

- 20 задачи от затворен тип с четири възможни отговора (от които само един е верен);
- 5 задачи със свободен отговор;
- 3 задачи, изискващи обосновани аналитико-синтетични решения.

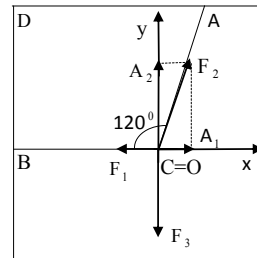
В темите за зрелостен изпит по математика обикновено се използват практикоприложни задачи от лихви, диаграми и др. с цел оценяване на ученическите умения за използване на математически методи на мислене и представяне чрез формули, модели, конструкции, графики, диаграми, т.е. за „работа с данни“.

Задачи, подобни на разгледаните в тази статия, могат да бъдат използвани в изпитни материали за проверка на математическата компетентност на учениците, а защо не и в математически състезания. Положителна тенденция е използването на практикоприложни задачи от учителите при оценяване постиженията на учениците чрез работа по проекти.

Задача 1. Тяло с тегло от 30 N се удържа от две пружини AC и BC (черт. 1а). Намерете големината на силите, действащи върху пружините, ако $\angle ACB = 120^\circ$, $\angle DBC = \angle ADB = 90^\circ$.



Чертеж 1а



Чертеж 1б

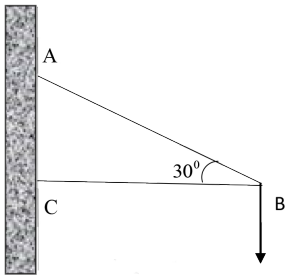
Решение: в точката C действат три сили (черт. 1б): $\vec{F}_1$ – действаща на BC , $\vec{F}_2$ – действаща на AC , и $\vec{F}_3$ – теглото на тялото. Избираме правоъгълна координатна система Oxy , където координатното начало $O \equiv C$, оста Ox съвпада с противоположния лъч на лъча CB , а оста $Oy \perp BC$ и лежи в полуравнината на правата CB , съдържаща точката A .

Силата $\vec{F}_2 = \vec{CA}_1 + \vec{CA}_2$, където $|\vec{CA}_1| = |\vec{F}_1|$ и $|\vec{CA}_2| = |\vec{F}_3| = 30\text{ N}$.

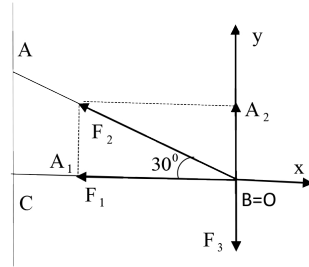
$$\text{От } \frac{|\vec{CA}_2|}{|\vec{F}_2|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = \frac{2 \cdot |\vec{CA}_2|}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 30}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\text{ N}.$$

$$\text{От } \frac{|\vec{CA}_1|}{|\vec{F}_2|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{CA}_1| = \frac{|\vec{F}_2|}{2} = 10\sqrt{3}\text{ N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = 10\sqrt{3}\text{ N}.$$

Задача 2. Тяло с тегло от 60 N се удържа от две пружини AB и BC (черт. 2а). Намерете големината на силите, действащи върху пружините, ако $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. (Тази задача е подходяща за самостоятелна работа.)



Чертеж 2а



Чертеж 2б

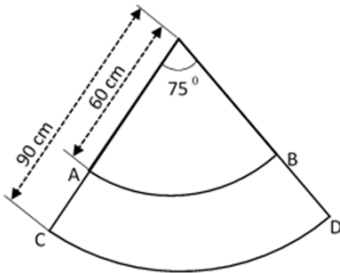
Решение: в точката B действат три сили (черт. 2б): $\vec{F}_1$ – действаща на CB , $\vec{F}_2$ – действаща на AB , и $\vec{F}_3$ – теглото на тялото. Избираме правоъгълна координатна система Oxy , където координатното начало $O \equiv B$, оста Ox съвпада с противоположния лъч на лъча BC , а оста $Oy \perp BC$ и лежи в полуправнината на правата CB , съдържаща точката A .

Силата $\vec{F}_2 = \vec{BA}_1 + \vec{BA}_2$, където $\vec{BA}_1 = \vec{F}_1$ и $|\vec{BA}_2| = |\vec{F}_3| = 60 \text{ N}$.

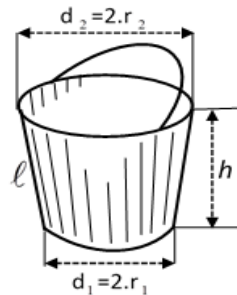
$$\text{От } \frac{|\vec{BA}_2|}{|\vec{F}_2|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = 2 \cdot |\vec{BA}_2| = 2 \cdot 60 = 120 \text{ N}.$$

$$\text{От } \frac{|\vec{BA}_1|}{|\vec{F}_2|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{BA}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |\vec{F}_2| = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = 60\sqrt{3} \text{ N}.$$

Задача 3. Намерете височината h на ведро, ако околната му повърхнина е изработена от част от кръгов венец с радиуси $R = 90 \text{ cm}$ и $r = 60 \text{ cm}$ и градусна мярка на дъгите на развивката $\alpha = 75^\circ$ (черт. 3а). Разходите на материал за шевове не се отчитат.



Чертеж 3а

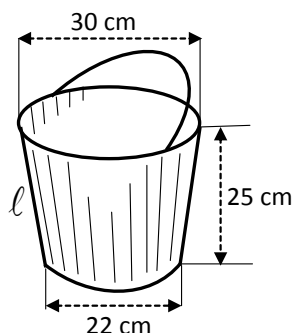


Чертеж 3б

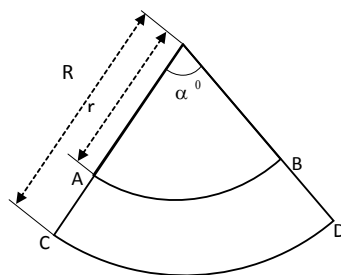
Решение: нека $l_1 = \widehat{AB}$, $l_2 = \widehat{CD}$. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 60}{360^\circ} \cdot 75^\circ = 25\pi \text{ cm}$ и $l_1 = 2\pi r_1 \Rightarrow 25\pi = 2\pi r_1 \Rightarrow r_1 = 12,5 \text{ cm}$ (r_1 – радиус на дъното на ведрото). От $l_2 = \frac{2\pi \cdot 90}{360^\circ} \cdot 75^\circ = 37,5\pi \text{ cm}$ и $l_2 = 2\pi r_2 \Rightarrow 37,5\pi = 2\pi r_2 \Rightarrow r_2 = 18,75 \text{ cm}$ (r_2 – радиус на отвора на ведрото). Следователно

$$h = \sqrt{(90 - 60)^2 - (18,75 - 12,5)^2} = \sqrt{30^2 - 6,25^2} \approx 29 \text{ cm} \text{ (черт. 3б).}$$

Задача 4. Височината на ведро е $h = 25 \text{ cm}$, а диаметрите на отвора и основата му са съответно $d_2 = 30 \text{ cm}$ и $d_1 = 22 \text{ cm}$ (черт. 4а). Изчислете размерите на заготовката за изработване на ведрото: градусната мярка α и радиусите R и r на дъгите на развивката на околната повърхнина на ведрото. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (Тази задача е подходяща за самостоятелна работа.)



Чертеж 4а



Чертеж 4б

Решение: образуващата $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 + (15 - 11)^2} \approx 25,3 \text{ cm}$.

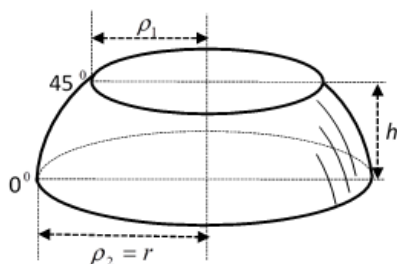
Нека $l_1 = \widehat{AB}$, $l_2 = \widehat{CD}$ (черт. 4б) $\Rightarrow l_1 = \pi \cdot d_1 = 22\pi \text{ cm}$, $l_2 = \pi \cdot d_2 = 30\pi \text{ cm}$ (1)

$$\text{Но } \frac{R}{r} = \frac{l_2}{l_1} \Leftrightarrow \frac{r + 25,3}{r} = \frac{30\pi}{22\pi} \Leftrightarrow \frac{r + 25,3}{r} = \frac{15}{11} \Rightarrow r = 69,575 \approx 70 \text{ cm}$$

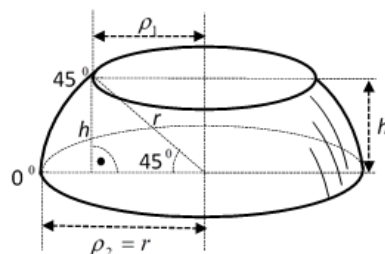
$$\Rightarrow R \approx 69,6 + 25,3 \approx 95 \text{ cm} \Rightarrow l_2 = \frac{2\pi \cdot 95}{360^\circ} \cdot \alpha^0 = \frac{19\pi \cdot \alpha^0}{36^\circ} \text{ cm}, l_1 = \frac{2\pi \cdot 70}{360^\circ} \cdot \alpha^0 = \frac{7\pi \cdot \alpha^0}{18^\circ} \text{ cm} \quad (2)$$

От (1) и (2) следва, че $\alpha = 56,6^\circ \approx 57^\circ$.

Задача 5. Каква част от площта на земното кълбо е площта на кълбовия слой, определен от Екватора и паралела с 45° северна географска ширина (черт. 5а).



Чертеж 5а



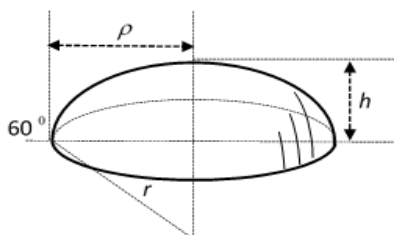
Чертеж 5б

Решение: лицето на сферичната зона се пресмята по формулата $S = 2\pi.r.h$, където h, ρ_1, ρ_2 са съответно височина и радиуси на основите на кълбовия слой, а r – радиус на земното кълбо. При 45° северна географска ширина

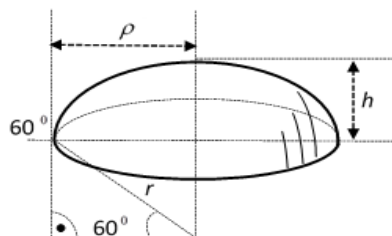
$$h = r \cdot \sin 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = 2\pi.r.\frac{r\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.\pi.r^2 \text{ (черт. 5б).}$$

Площта на земното кълбо е $S_1 = 4\pi.r^2 \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354 \Rightarrow S \approx 0,354.S_1$.

Задача 6. Каква част от площта на земното кълбо е площта на кълбовия отрез (сегмент), определен в Северното полукукло от паралела с 60° географска ширина (черт. 6 а).



Чертеж 6а



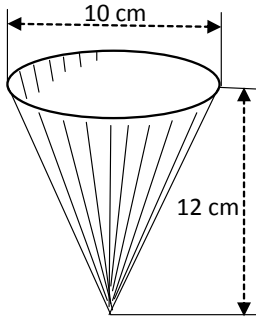
Чертеж 6б

Решение: лицето на сферичен отрез се пресмята по формулата $S = 2\pi.r.h$, където h и ρ са съответно височина и радиус на основата на отреза, а r – радиус на земното кълбо. При 60° северна географска ширина

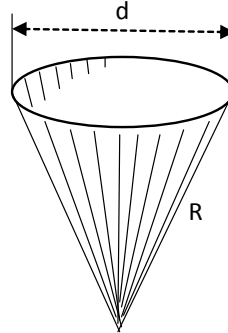
$$h = r - r \cdot \sin 60^\circ = \frac{r(2 - \sqrt{3})}{2} \Rightarrow S = 2\pi.r.\frac{r(2 - \sqrt{3})}{2} = (2 - \sqrt{3})\pi.r^2.$$

Площта на земното кълбо е $S_1 = 4\pi.r^2 \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{(2 - \sqrt{3})}{4} \approx 0,067 \Rightarrow S \approx 0,067.S_1$.

Задача 7. Конична фуния трябва да има диаметър $d = 10 \text{ cm}$ и височина $h = 12 \text{ cm}$. Изчислете размерите на заготовката ѝ: радиуса R и градусната мярка α на дъгата на развивката. Разходите на материал за шевове не се отчитат (черт. 7).



Чертеж 7



Чертеж 8

Решение: образуващата $l = R = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$.

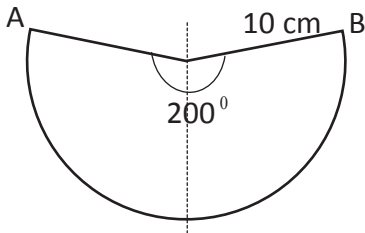
Нека l_1 е дължината на отвора на фунията. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 13}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \text{ cm}$ и $l_1 = \pi \cdot d = \pi \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow \alpha \approx 138^\circ$.

Задача 8. Конична фуния има диаметър d , равен на радиуса R на развивката, необходима за нейната изработка (черт. 8). Изчислете градусната мярка α на дъгата на развивката. Колко е диаметърът d на фунията, ако за изработването ѝ са необходими 120 cm^2 материал (без отчитане на разходите на материал за шевове).

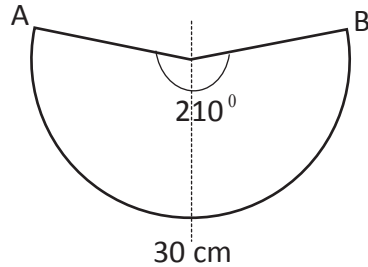
Решение: нека l_1 е дължината на отвора на фунията, а S – лицето на площта на заготовката. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$, $l_1 = \pi \cdot d$ и $d = R \Rightarrow \alpha = 180^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2$.

От $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = 120 \text{ cm}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{240}{\pi}} \approx 8,7 \text{ cm} \Rightarrow d = R \approx 8,7 \text{ cm}$.

Задача 9. За изработване на конична фуния е изрязан кръгов сектор с ъгъл $\alpha = 200^\circ$ и радиус $R = 10 \text{ cm}$ (черт. 9). Изчислете височината h и диаметъра d на фунията. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (Тази задача е подходяща за самостоятелна работа.)



Чертеж 9



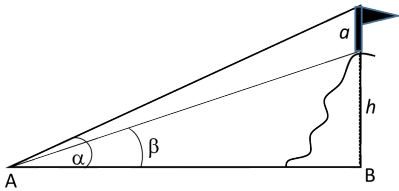
Чертеж 10

Решение: нека $l_1 = \widehat{AB}$. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 10}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{100\pi}{9} \text{ cm}$
и $l_1 = \pi \cdot d \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{100}{9} \approx 11 \text{ cm}$.
Следователно $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{100}{18}\right)^2} \approx 8,3 \text{ cm}$.

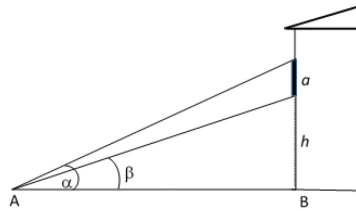
Задача 10. За изработване на конична фуния е изрязан кръгов сектор с дължина на дъгата $\widehat{AB} = 30 \text{ cm}$ и ъгъл $\alpha = 210^\circ$ (черт. 10). Изчислете височината h и диаметъра d на фунията. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (Тази задача е подходяща за самостоятелна работа.)

Решение: нека $l_1 = \widehat{AB}$, l – образуваща. От $l_1 = \pi \cdot d = 30 \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{30}{\pi} = 30 : \frac{22}{7} \approx 9,5 \text{ cm}$. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7\pi \cdot R}{6} = 30 \text{ cm} \Rightarrow R \approx 8,2 \text{ cm}$, но $R \equiv l \Rightarrow l \approx 8,2 \text{ cm}$
 $\Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{8,2^2 - \left(\frac{9,5}{2}\right)^2} = \sqrt{67,24 - 22,56} = \sqrt{44,68} \approx 6,7 \text{ cm}$.

Задача 11. В планината се намира кула с височина $a \text{ m}$. От точка A върхът и основата на кулата се виждат съответно под ъгли α и β (черт. 11). Изразете чрез a , α и β височината на планината.



Чертеж 11



Чертеж 12

Решение: височината на планината $h = AB \cdot \operatorname{tg} \beta$, но $AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha$
 $\Rightarrow h = (a + h) \cdot \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = (a + h) \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow h = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$

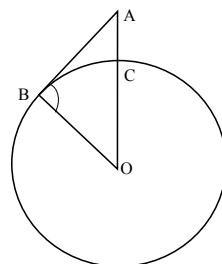
Задача 12. Намерете разстоянието от дадена точка A до строеж, ако от тази точка A горният край на един от прозорците на строежа се вижда под ъгъл α , а долният край на този прозорец се вижда под ъгъл β (черт. 12). (Подходяща за самостоятелна работа).

Решение: разстоянието от долния край на прозореца до земята е
 $h = AB \cdot \operatorname{tg} \beta$, но $AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha \Rightarrow h = (a + h) \cdot \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = (a + h) \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$
 $\Rightarrow h = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow$ разстоянието до строежа е
 $AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha = \left(a + \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \right) \cdot \cot g \alpha = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$

Задача 13. На 12.04.1961 г. космическият кораб „Восток“ с космонавта Юрий Гагарин прелетял над Земята на височина 327 km. Колко е било в това време разстоянието от кораба до най-отдалечения видим от него участък от повърхността на Земята? (Радиусът на Земята²⁾ е приблизително 6371 km.)

Решение: от правоъгълния $\triangle ABO$ следва, че търсеното разстояние е

$AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{(6371 + 327)^2 - 6371^2} \approx 2067 \text{ km}$
 (черт. 13).



Черт. 13

Задачи за самостоятелна работа

Задача 14. Изграждането на Международната космическа станция³⁾ (МКС) започва през 1998 г. Станцията е на ниска околоземна орбита и може да бъде видяна от Земята с невъоръжено око. Височината ѝ варира от 319,6 km до 346,9 km над земната повърхност. Колко е минималното ѝ максималното разстояние от МКС до най-отдалечения видим от нея участък от повърхността на Земята? (Радиусът на Земята е приблизително 6371 km. Отг. $AB_{\min} \approx 2043 \text{ km}$; $AB_{\max} \approx 2131 \text{ km}$.)

Задача 15. Арктика⁴⁾ е северната полярна област на Земята. За южна граница на Арктика се приема Северният полярен кръг ($\approx 66,6$ северна ширина).

а) Изчислете площта на Арктика (с точност до 1 *mln.*).

б) Намерете (с точност до 0,1) какъв процент от площта на Арктика е максималната площ на ледената ѝ покривка, ако тя е достигнала през март 2017 година 14,4 *mln. km²* по данни на американския NSIDC⁵⁾ (Национален център за данни за снега и леда).

в) Каква е била максималната площ на северната полярна шапка от лед преди 30 години, ако знаете, че за изминалия период от време тя е намаляла с около 11,7% според данните от спътниците?

Отг. а) ≈ 21 *mln. km²*; б) $\approx 68,6$; в). ≈ 21 *mln. km²*.

Разгледаните задачи и подобни на тях подпомагат реализирането на специфичната цел на обучението по математика, а именно: формиране на умения за моделиране на различни ситуации (реални или теоретични), изследване на моделите и интерпретиране на получените резултати, прилагане на математически разсъждения за решаване на проблеми от други предметни области и ежедневието. Чрез практико-приложните задачи изучаваното учебно съдържание съгласно действащите учебни програми се осмисля и усвоява по-задълбочено, изграждат се практически умения, постигат се изискванията за резултатите от обучението по учебния предмет математика, фиксирани в Приложение № 3 към чл. 6, ал. 1, т. 3 от Наредба № 5 от 30.11.2015 г. за общообразователната подготовка и Приложение № 3 към чл. 4, ал. 1, т. 3 от Наредба № 7 от 11.08.2016 г. за профилираната подготовка. *По този начин подготовката на учениците за решаване на задачи от формата на PISA не приключва след VII клас, а продължава и в гимназиален етап с цел постигане на добра фундаментална подготовка, критично мислене и ключови умения за реализация в обществото.*

БЕЛЕЖКИ/NOTES

1. Програмата за международно оценяване PISA (*The Program for International Student Assessment*) на Организацията за икономическо сътрудничество и развитие OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) изследва грамотността на учениците в областите четене, математика и природни науки от 2000 г. през тригодишни периоди.
2. https://bg.wikipedia.org/wiki/Земен_радиус
3. https://bg.wikipedia.org/wiki/Международна_космическа_станция
4. <https://bg.wikipedia.org/wiki/Арктика>
5. <http://nsidc.org/arcticseaicenews/charctic-interactive-sea-ice-graph/>

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Gusev, V., G. Maslova, Z. Skopets & M. Yagodovski (1976). *Didactic materials in Geometry for 10th grade* (pp. 57, 59, 101, 107, 115, 117, 131). Moscow: Prosveshtenie. [Гусев, В., Г. Маслова, З. Скопец & М. Ягодовский (1976). *Дидактические материалы по геометрии для X класса* (с. 57, 59, 101, 107, 115, 117, 131). Москва: Просвещение.]
- Gusev, V. & A. Medyanik (1976). *Geometric problems for 7th grade* (p. 41). Moscow: Prosveshtenie. [Гусев, В. & А. Медяник (1986). *Задачи по геометрии для VII класса* (с. 41). Москва: Просвещение.]
- Grozdev, S. (2017). Towards the reader. *Mathematics and Informatics, 1*, (7 – 10) [Гроздев, С. (2017). Към читателя. *Математика и информатика, 1* (7 – 10).]

PRACTICE-APPLICABLE PROBLEMS IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. Exemplary applications are considered in the paper in connection with the mathematical curriculum of high school mathematics education. The proposed problems are in the format of PISA and form skills for modeling different situations.

✉ **Dr. Rumyana Nestorova**
Teacher in Mathematics
20, Sestri Hadjkrastevi St.
3000 Vratsa, Bulgaria
E-mail: rumiana_nestorova@abv.bg