

ПОЛИНОМИ С КРАТНИ КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА УСПОРЕДНИК

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Висше военноморско училище „Никола Вапцаров“ – Варна

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми на комплексна променлива с кратни корени във върховете на успоредник и корените на техните производни. Като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

Ключови думи: полином; корени от полином; успоредник; ромб; правоъгълник; елипса; фокус; център

Известна е една геометрична връзка между корените на полиномите от четвърта степен, които са разположени във върховете на успоредник, и корените на съответните им производни. Според тази връзка, ако корените на полином от четвърта степен са разположени във върховете на успоредник, то корените на неговата производна се намират във фокусите на елипсата, допираща се до страните на успоредника в техните среди и центъра на успоредника (Grozdev & Nenkov, 2018). От друга страна, освен споменатата елипса във всеки успоредник могат да се впишат безброй много елипси. Възниква въпросът за възможността тези елипси също да осъществяват геометрични връзки между полиноми и съответните им производни. Оказва се, че някои от тези елипси осъществяват геометрични връзки между някои видове полиноми с кратни корени във върховете на разглеждан успоредник и корените на неговата производна.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на горния въпрос, ще отбележим три помощни твърдения.

Лема 1. *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.*

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018). От лема 1 следва, че от всички полиноми, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, е достатъчно да се изследва само някой нормиран полином, за да се определи геометрията на класа, зададен чрез производните на полиномите от разглеждания клас.

Лема 2. Ако $a_1, a_2, \dots, a_s$ са корени на полином $P(z)$ от n -та степен, така че a_j е k_j ($j=1, 2, \dots, s$) кратен корен на $P(z)$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, то коефициентът пред първата степен на променливата z е равен на

$$a_1^{k_1-1} a_2^{k_2-1} \dots a_s^{k_s-1} (k_1 a_2 a_3 \dots a_s + k_2 a_3 \dots a_s a_1 + \dots + k_s a_1 a_2 \dots a_{s-1}).$$

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018).

Лема 3. Ако корените на полином $P(z)$ от степен $2n$ са разположени в точки от комплексната равнина, които са централно симетрични спрямо точка S , то производната $P'(z)$ има корен в точката S .

Доказателство. Нека $P(z)$ е полином от степен $2n$, който има корени, разположени в точките $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Ако A_j и A_{j+n} ($j=1, 2, \dots, n$) са симетрични спрямо точка S , то за афиксите им a_j ($j=1, 2, \dots, n$) и s са изпълнени равенствата $a_j + a_{j+n} = 2s$ ($j=1, 2, \dots, n$). Ако изберем за координатно начало точката S , то $s=0$ и следователно $a_j + a_{j+n} = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Коефициентът пред z според формулите на Виет е сума на $2n$ събираеми, получени от всевъзможните произведения на числата $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, взети по $2n-1$ във всяко събираемо. Тези събираеми могат да се комбинират по такъв начин, че разглежданият коефициент да се представи по следния начин:

$$a_2 a_3 \dots a_n a_{n+2} \dots a_{2n-2} a_{2n-1} (a_1 + a_{n+1}) + a_1 a_3 \dots a_{n+1} a_{n+3} \dots a_{2n-2} a_{2n-1} (a_2 + a_{n+2}) + \dots +$$

$$+ a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n \dots a_{2n-2} a_{2n} (a_{n-1} + a_{2n-1}) + a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \dots a_{2n-2} a_{2n-1} (a_n + a_{2n}).$$

От това представяне на коефициента пред z и получените от симетрията равенства следва, че той е равен на нула. Следователно $P'(z)$ има корен $z=0$. Това означава, че $P'(z)$ има корен в точката S .

Сега, като вземем предвид лема 1, получаваме твърдението на лемата за произволен полином $P(z)$, който притежава споменатите свойства.

За да подчертаем по-дълбоката връзка между полиномите с кратни корени във върховете на даден успоредник $A_1 A_2 A_3 A_4$ и някои от вписаните в този успоредник елипси, да предположим, че точките A_1, A_2, A_3 и A_4 са снабдени с маси k_1, k_2, k_3 и k_4 . Това означава, че разглеждаме масовите точки (k_1, A_1) , (k_2, A_2) , (k_3, A_3) и (k_4, A_4) (Paskalev & Chobanov, 1985).

Нека диагоналите на успоредника се пресичат в точката S , която всъщност е центърът на симетрия за $A_1 A_2 A_3 A_4$. Следователно $\overrightarrow{SA_3} = -\overrightarrow{SA_1}$ и $\overrightarrow{SA_4} = -\overrightarrow{SA_2}$.

Ако в точките P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_3, A_3) и (k_4, A_4) , (k_4, A_4) и (k_1, A_1) , (k_1, A_1) и (k_2, A_2) , (k_2, A_2) и (k_3, A_3) (фиг. 1), то са изпълнени векторните равенства

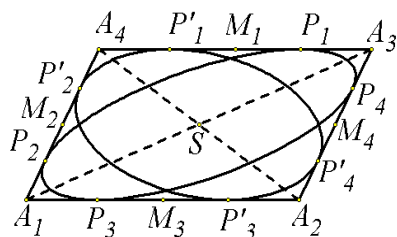
$$(1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{SP'_1} &= \frac{k_3 \overrightarrow{SA_3} + k_4 \overrightarrow{SA_4}}{k_3 + k_4}, & \overrightarrow{SP'_2} &= \frac{k_4 \overrightarrow{SA_4} + k_1 \overrightarrow{SA_1}}{k_4 + k_1}, \\ \overrightarrow{SP'_3} &= \frac{k_1 \overrightarrow{SA_1} + k_2 \overrightarrow{SA_2}}{k_1 + k_2}, & \overrightarrow{SP'_4} &= \frac{k_2 \overrightarrow{SA_2} + k_3 \overrightarrow{SA_3}}{k_2 + k_3}. \end{aligned}$$

Избираме P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 така, че те да бъдат допирните точки на елипса k' със страните на $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 1). Тогава точките P'_3 и P'_4 са симетрични спрямо S съответно на P'_1 и P'_2 (фиг. 1). Затова са изпълнени векторните равенства $\overrightarrow{SP'_3} = -\overrightarrow{SP'_1}$ и $\overrightarrow{SP'_4} = -\overrightarrow{SP'_2}$. Сега, като комбинираме първото с третото и второто с четвъртото в равенствата (1), получаваме съответно $(k_2k_3 - k_4k_1)\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$ и $(k_3k_4 - k_1k_2)\overrightarrow{A_4A_1} = \vec{0}$. Следователно $k_2k_3 - k_4k_1 = 0$ и $k_3k_4 - k_1k_2 = 0$. Оттук непосредствено следва, че

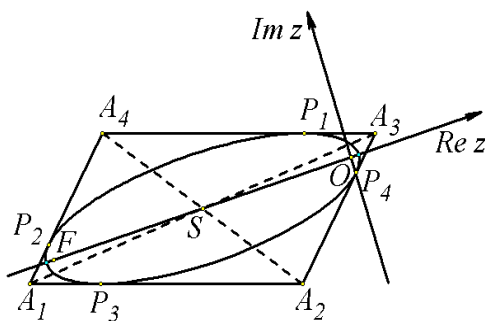
$$(2) \quad k_3 = k_1, \quad k_4 = k_2.$$

Следователно, за да бъдат точките P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 допирни за вписана в успоредника $A_1A_2A_3A_4$ елипса k' , трябва масите в срещуположните върхове на $A_1A_2A_3A_4$ да бъдат равни. Затова от (2) следва, че са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_3P'_1} : \overrightarrow{A_4P'_1} &= -k_2 : k_1, & \overrightarrow{A_4P'_2} : \overrightarrow{A_1P'_2} &= -k_1 : k_2, & \overrightarrow{A_1P'_3} : \overrightarrow{A_2P'_3} &= -k_2 : k_1, \\ \overrightarrow{A_2P'_4} : \overrightarrow{A_3P'_4} &= -k_1 : k_2. \end{aligned}$$



Фигура 1



Фигура 2

Нека сега точките P_1, P_2, P_3 и P_4 (фиг. 1) са такива, че са изпълнени равенствата

$$(3) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{A_3P_1} : \overrightarrow{A_4P_1} &= -k_1 : k_2, & \overrightarrow{A_4P_2} : \overrightarrow{A_1P_2} &= -k_2 : k_1, \\ \overrightarrow{A_1P_3} : \overrightarrow{A_2P_3} &= -k_1 : k_2, & \overrightarrow{A_2P_4} : \overrightarrow{A_3P_4} &= -k_2 : k_1. \end{aligned}$$

В тези точки се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_1^{-1}, A_3) и (k_2^{-1}, A_4) , (k_2^{-1}, A_4) и (k_1^{-1}, A_1) , (k_1^{-1}, A_1) и (k_2^{-1}, A_2) , (k_2^{-1}, A_2) и (k_1^{-1}, A_3) (фиг. 1). Точките P_1, P_2, P_3 и P_4 са симетрични съответно на P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 спрямо средите M_1, M_2, M_3 и M_4 на отсечките A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2 и A_2A_3 (фиг. 1). Следователно съществува елипса k , която се допира до страните на $A_1A_2A_3A_4$ в точките P_1, P_2, P_3 и P_4 .

Ще покажем, че именно елипсата k е свързващият елемент между корените на полином с кратни корени във върховете на успоредник $A_1A_2A_3A_4$ и неговата производна.

Нека k има за фокус точката O , а p и e са съответно фокалният параметър и численият ексцентрицитет на k . Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 2, както е показано в (Grozdev & Nenkov, 2018), афиксите на точките P_j и A_j ($j=1,2,3,4$) се изразяват съответно с формулите

$$(4) \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{2p}{e.t_1^2 + 2.t_1 + e}, & p_2 &= \frac{2p}{e.t_2^2 + 2.t_2 + e}, \\ p_3 &= \frac{2p}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e.t_1 + 1)^2}{e.t_1^2 + 2.t_1 + e}, & p_4 &= \frac{2p}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e.t_2 + 1)^2}{e.t_2^2 + 2.t_2 + e} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2p}{e^2 - 1} \cdot \frac{e.t_1 + 1}{t_1 - t_2}, & a_2 &= \frac{2p}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e.t_1 + 1)(e.t_2 + 1)}{e.t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e}, \\ a_3 &= \frac{2p}{e^2 - 1} \cdot \frac{e.t_2 + 1}{t_2 - t_1}, & a_4 &= \frac{2p}{e.t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e}, \end{aligned}$$

където $|t_1| = |t_2| = 1$.

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (3). Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k, A_l и P_j от една права се изразява с равенството

то $\frac{\overline{A_k P_j}}{\overline{A_l P_j}} = \frac{a_k - p_j}{a_l - p_j}$, от (4) и (5) след несложни пресмятания се получават

равенствата

$$(6) \quad \frac{\overline{A_3 P_1}}{\overline{A_4 P_1}} = \frac{\overline{A_1 P_2}}{\overline{A_4 P_2}} = \frac{\overline{A_1 P_3}}{\overline{A_2 P_3}} = \frac{\overline{A_3 P_4}}{\overline{A_2 P_4}} = \frac{(e.t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e)^2}{(1 - e^2)(t_1 - t_2)^2}.$$

От (3) и (6) се получава следва

$$(7) \quad k_1(e^2 - 1)(t_1 - t_2)^2 = k_2(e.t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e)^2.$$

От (5), като вземем предвид, че $a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = 2.s$ и равенствата (2), получаваме

$$k_1 a_2 a_3 a_4 + k_2 a_3 a_4 a_1 + k_3 a_4 a_1 a_2 + k_4 a_1 a_2 a_3 = \\ = \frac{8p^2 s(e t_1 + 1)(e t_2 + 1)}{(e^2 - 1)^2 (t_1 - t_2)^2 (e t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e)^2} \left[k_1 (e^2 - 1)(t_1 - t_2)^2 - k_2 (e t_1 t_2 + t_1 + t_2 + e)^2 \right]$$

Като заместим (7) в последното равенство, получаваме

$$(8) \quad k_1 a_2 a_3 a_4 + k_2 a_3 a_4 a_1 + k_3 a_4 a_1 a_2 + k_4 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином $P_0(z)$ от степен $n = 2 \cdot (k_1 + k_2)$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти, който има k_1 кратни корени във върховете A_1 и A_3 и k_2 кратни корени във върховете A_2 и A_4 на успоредника $A_1 A_2 A_3 A_4$. От лема 2 и равенство (8) следва, че коефициентът пред z има стойност, равна на 0. Затова $P'_0(z)$ има корен $z = 0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P'_0(z)$ има корен във фокуса O на елипсата k . Следователно според лема 1 и бележката към нея се получава, че производната $P'(z)$ на произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P_0(z)$ има корен в точката O .

По аналогичен начин, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F на k , получаваме, че $P'(z)$ има корен и в точката F (фиг. 2).

Като вземем предвид и лема 3, можем да обединим получените резултати в следната

Теорема. Ако един полином $P(z)$ от степен $n = 2 \cdot (k_1 + k_2)$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има k_1 кратни корена във върховете A_1 и A_3 и k_2 кратни корена във върховете A_2 и A_4 на успоредника $A_1 A_2 A_3 A_4$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите и центъра на елипсата k , допираща се до правите $A_3 A_4$, $A_4 A_1$, $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$ съответно в точките P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , за които са изпълнени равенствата

$$\overline{A_3 P_1} : \overline{A_4 P_1} = -k_1 : k_2, \quad \overline{A_4 P_2} : \overline{A_1 P_2} = -k_2 : k_1, \quad \overline{A_1 P_3} : \overline{A_2 P_3} = -k_1 : k_2, \quad \overline{A_2 P_4} : \overline{A_3 P_4} = -k_2 : k_1.$$

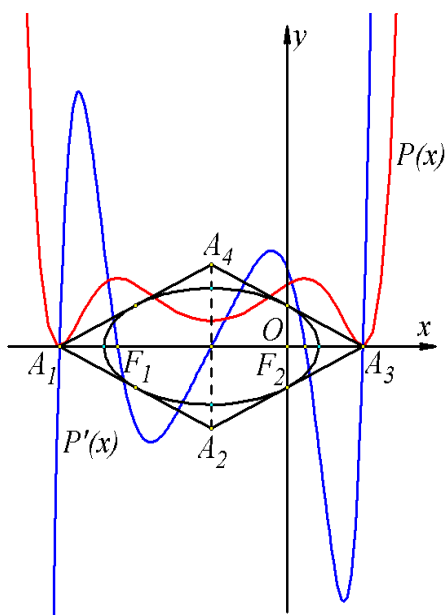
Полиномът $P'(z)$ има $k_1 - 1$ кратни корена във върховете A_1 и A_3 и $k_2 - 1$ кратни корена във върховете A_2 и A_4 (Genov, Mihovski & Molov, 1991), а останалите три корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

От лема 2 и равенство (8) непосредствено се получава следното:

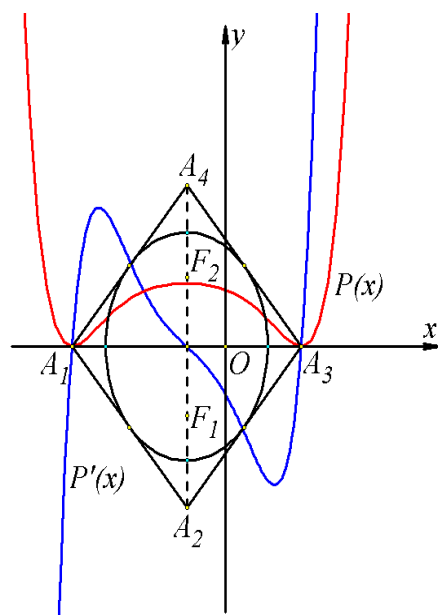
Следствие. Ако един полином $P(z)$ от степен $n = 4m$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има m -кратен корен във върха A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) на успоредника $A_1A_2A_3A_4$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите и центъра на елипсата k , допираща се до отсечките A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 в техните среди.

По този начин се получава едно обобщение на теоремата, доказана в (Grozdev & Nenkov, 2018).

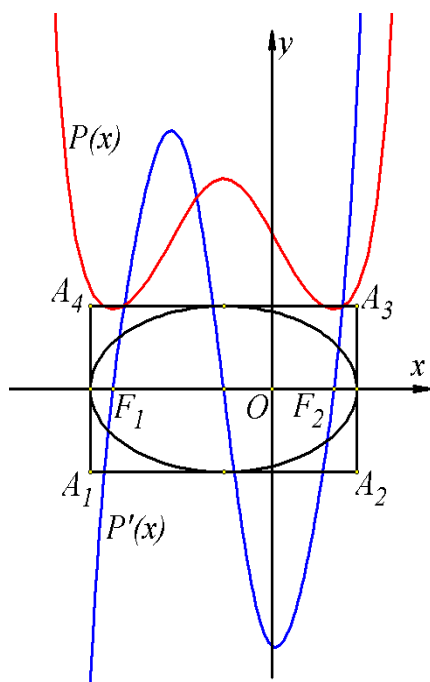
Ако $P(z) = P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на следствието. На фиг. 3 и фиг. 4 са представени полиноми $P(x)$ с двукратни корени във върховете на ромб $A_1A_2A_3A_4$. В случая, показан на фиг. 3, производната $P'(x)$ има реални корени във фокусите F_1 и F_2 и центъра O на елипсата k , допираща се до средите на страните A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . Затова графиката на $P'(x)$ минава през точките F_1 , F_2 и O . В случая, показан на фиг. 4, производната $P'(x)$ няма реални корени във фокусите F_1 и F_2 на елипсата k . Затова графиката на $P'(x)$ минава само през центъра O .



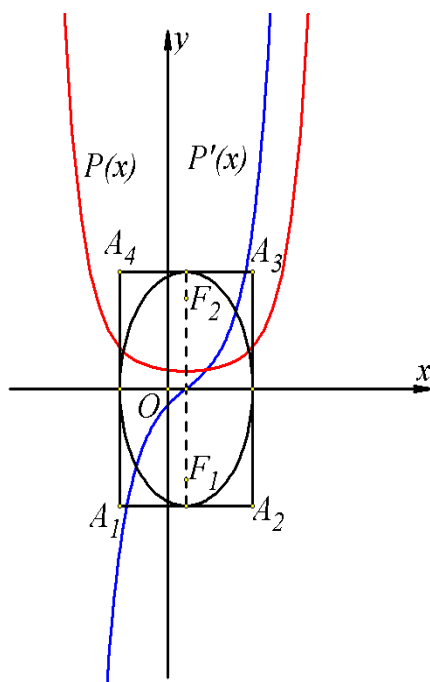
Фигура 3



Фигура 4



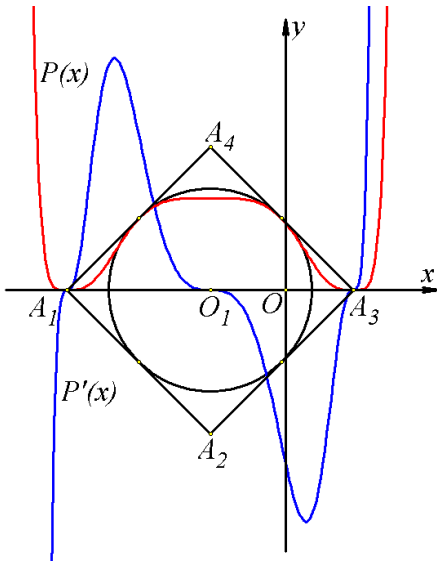
Фигура 5



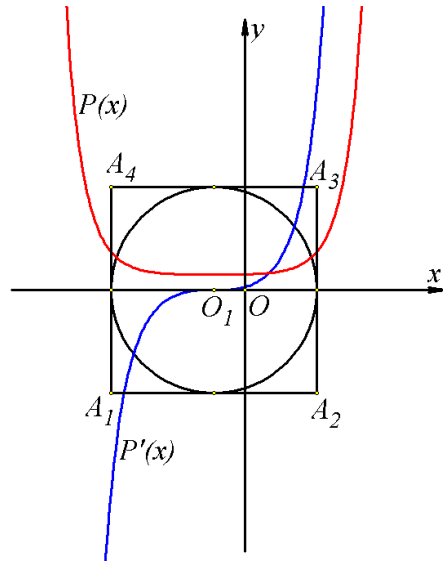
Фигура 6

На фиг. 5 и фиг. 6 са представени полиноми $P(x)$ с трикратни корени във върховете на правоъгълник $A_1A_2A_3A_4$. В случая, показан на фиг. 5, производната $P'(x)$ има реални корени във фокусите F_1 и F_2 и центъра O на елипсата k , допираща се до средите на страните A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 . Затова графиката на $P'(x)$ минава през точките F_1 , F_2 и O . В случая, показан на фиг. 6, производната $P'(x)$ няма реални корени във фокусите F_1 и F_2 на елипсата k . Затова графиката на $P'(x)$ минава само през центъра O .

На фиг. 7 и фиг. 8 са представени полиноми $P(x)$ с четирикратни корени във върховете на квадрат $A_1A_2A_3A_4$. В тези случаи елипсата, допираща се до средите на страните A_3A_4 , A_4A_1 , A_1A_2 и A_2A_3 , е окръжност. Затова производната $P'(x)$ има трикратен корен в центъра O на вписаната в квадрата окръжност. Всъщност в тези случаи $P'(x)$ има трикратни корени във всяка от точките A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и O .



Фигура 7



Фигура 8

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & В. Ненков. (2018). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник. *Математика и информатика*, 3, 283 – 293.
- Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.
- Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов. (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.
- Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.
- Балк, М., Г. Балк & А. Полухин. (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.
- Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Polynomials of fourth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 3, 283 – 293.

- Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and a real ellipse. *Mathematics plus*, 2, 61 – 63.
- Genov, G., S. Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo.
- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and informatics*, 5, 54 – 59.
- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radiansk school.
- Paskalev, G. & I. Chobanov. (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna prosveta.

POLYNOMIALS WITH MULTIPLE ROOTS IN THE VERTICES OF A PARALLELOGRAM

Abstract. A geometric relation is derived between the roots of polynomials of complex variable with multiple roots in the vertices of a parallelogram and the roots of their derivatives. As an application some polynomials of real variable with real coefficients are considered.

Keywords: polynomial; roots of polynomial; parallelogram; rhombus; rectangle; ellipse; focus; centre

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg