

ПОЛИНОМИ С КОРЕНИ В ТРИ КОЛИНЕАРНИ ТОЧКИ

Веселин Ненков

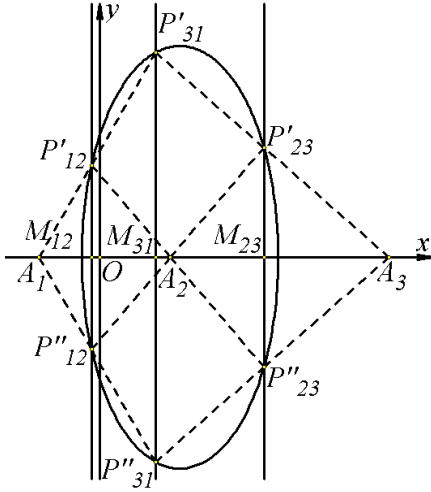
Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“

Резюме. Разгледана е една геометрична връзка между полиноми с корени в три колинеарни точки и корените на съответните им производни посредством едно множество от елипси, породени от корените на полинома.

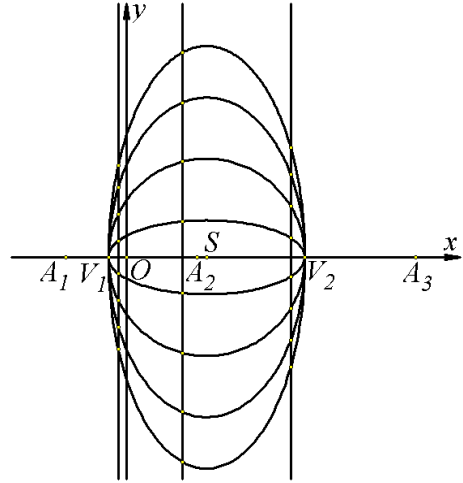
Keywords: polynomial; derivative; ellipse; circle; vertices; centroid

1. Увод. Известна е една геометрична връзка между корените на полиномите от трета степен с колинеарни корени и корените на съответните им производни. Според тази връзка корените на производната се намират във върховете на малката ос на една специална елипса, определена от върховете на равностранный триъгълници, породени от дадените колинеарни точки (Grozdev & Nenkov, 2018 a). Възможно е в същите три точки да се намират всички корени на някой полином от степен, по-висока от трета. Затова възниква въпросът за възможността да съществува подобна геометрична връзка между полином с кратни корени в три колинеарни точки и корените на неговата производна. Оказва се, че подобна геометрична връзка съществува. Нещо повече, като се забележат допълнителни елементи, тя дава възможност да се вникне по-дълбоко във връзката, изложена в (Grozdev & Nenkov, 2018 a).

2. Множество от концентрични елипси с общи върхове. Разкриването на търсените геометрични връзки между полиноми с корени в три колинеарни точки и съответните им производни са свързани с едно специално множество от елипси.



Фигура 1



Фигура 2

Върху правата l разглеждаме три произволни и различни точки A_1 , A_2 и A_3 . Нека M_{12} , M_{23} и M_{31} са такива точки съответно от отсечките A_1A_2 , A_2A_3 и A_3A_1 , за които са изпълнени равенствата:

(1) $\overline{M_{12}A_1} : \overline{M_{12}A_2} = -k_1 : k_2$, $\overline{M_{23}A_2} : \overline{M_{23}A_3} = -k_2 : k_3$, $\overline{M_{31}A_3} : \overline{M_{31}A_1} = -k_3 : k_1$,
където k_1 , k_2 и k_3 са естествени числа.

През точките M_{12} , M_{23} и M_{31} построяваме съответно правите m_{12} , m_{23} и m_{31} , които са перпендикулярни на l . Върху правите m_{12} , m_{23} и m_{31} отбелязваме съответно двойките точки (P'_{12}, P''_{12}) , (P'_{23}, P''_{23}) и (P'_{31}, P''_{31}) , така че да са изпълнени равенствата:

$$(2) \quad M_{12}P'_{12} = M_{12}P''_{12} = \frac{m}{k_1} A_1M_{12}, \quad M_{23}P'_{23} = M_{23}P''_{23} = \frac{m}{k_2} A_2M_{23}, \quad M_{31}P'_{31} = M_{31}P''_{31} = \frac{m}{k_3} A_3M_{31},$$

където m е произволно реално положително число (фиг. 1).

Така взетите точки P'_{12} , P''_{12} , P'_{23} , P''_{23} , P'_{31} , P''_{31} (фиг. 1) удовлетворяват следната

Лема. За всяко $m > 0$ точките P'_{12} , P''_{12} , P'_{23} , P''_{23} , P'_{31} , P''_{31} лежат върху една елипса $\bar{k}(m)$, два от върховете на която са постоянни точки от правата l (фиг. 2).

Доказателство. Разглеждаме координатна система с абсцисна ос по правата l и произволно координатно начало O . Нека спрямо въведената координатна система абсцисите на точките A_1 , A_2 и A_3 са съответно a_1 , a_2 и a_3 , т.е.

координатите има са: $A_1(a_1, 0)$, $A_2(a_2, 0)$, $A_3(a_3, 0)$ (фиг. 1). От дефиниционните равенства (1) се получават векторните релации

$$\overrightarrow{OM_{12}} = \frac{k_2 \overrightarrow{OA_1} + k_1 \overrightarrow{OA_2}}{k_1 + k_2}, \overrightarrow{OM_{23}} = \frac{k_3 \overrightarrow{OA_2} + k_2 \overrightarrow{OA_3}}{k_2 + k_3}, \overrightarrow{OM_{31}} = \frac{k_1 \overrightarrow{OA_3} + k_3 \overrightarrow{OA_1}}{k_3 + k_1}.$$

Оттук следва, че координатите на точките M_{12} , M_{23} и M_{31} са следните:

$$(3) \quad M_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, 0 \right), M_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, 0 \right), M_{31} \left(\frac{k_1 a_3 + k_3 a_1}{k_3 + k_1}, 0 \right).$$

От последните координати за уравненията на правите m_{12} , m_{23} и m_{31} получаваме съответно

$$(4) \quad m_{12} : x = \frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, m_{23} : x = \frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, m_{31} : x = \frac{k_1 a_3 + k_3 a_1}{k_3 + k_1}.$$

Като използваме координатите (3) за уравненията на окръжностите k_{12} , k_{23} и k_{31} , които имат за центрове точките M_{12} , M_{23} и M_{31} и радиуси съответно $\frac{m}{k_1} A_1 M_{12}$, $\frac{m}{k_2} A_2 M_{23}$ и $\frac{m}{k_3} A_3 M_{31}$, получаваме:

$$(5) \quad \begin{aligned} k_{12} : \left(x - \frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2 (a_1 - a_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, k_{23} : \left(x - \frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 (a_2 - a_3)^2}{(k_2 + k_3)^2}, \\ k_{31} : \left(x - \frac{k_1 a_3 + k_3 a_1}{k_3 + k_1} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2 (a_3 - a_1)^2}{(k_3 + k_1)^2}. \end{aligned}$$

От уравненията (4) и (5) за координатите на пресечните точки $\{P'_{12}, P''_{12}\} = k_{12} \cap m_{12}$, $\{P'_{23}, P''_{23}\} = k_{23} \cap m_{23}$ и $\{P'_{31}, P''_{31}\} = k_{31} \cap m_{31}$ получаваме:

$$(6) \quad \begin{aligned} P'_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, \frac{m |a_1 - a_2|}{k_1 + k_2} \right), P''_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, -\frac{m |a_1 - a_2|}{k_1 + k_2} \right), \\ P'_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, \frac{m |a_2 - a_3|}{k_2 + k_3} \right), P''_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, -\frac{m |a_2 - a_3|}{k_2 + k_3} \right), \\ P'_{31} \left(\frac{k_1 a_3 + k_3 a_1}{k_3 + k_1}, \frac{m |a_3 - a_1|}{k_3 + k_1} \right), P''_{31} \left(\frac{k_1 a_3 + k_3 a_1}{k_3 + k_1}, -\frac{m |a_3 - a_1|}{k_3 + k_1} \right). \end{aligned}$$

С непосредствено заместване на координатите (6) лесно се установява, че точките $P'_{12}, P''_{12}, P'_{23}, P''_{23}, P'_{31}, P''_{31}$ лежат на крива от втора степен $\bar{k}(m)$, чието уравнение е следното:

$$(7) \quad \bar{k}(m): m^2(k_1 + k_2 + k_3)x^2 - m^2[(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3]x + k_1k_2k_3y^2 + m^2(k_1a_2a_3 + k_2a_3a_1 + k_3a_1a_2) = 0.$$

Сега да запишем уравнението (7) по следния начин

$$(8) \quad \left[x - \frac{(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3}{2(k_1 + k_2 + k_3)} \right]^2 + \frac{k_1k_2k_3}{m^2(k_1 + k_2 + k_3)} \cdot y^2 = q,$$

$$\text{където } q = \frac{[(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3]^2 - (k_1 + k_2 + k_3)(k_1a_2a_3 + k_2a_3a_1 + k_3a_1a_2)}{4(k_1 + k_2 + k_3)^2}.$$

Ако $q > 0$, равенството (8) показва, че $\bar{k}(m)$ е елипса. В противен случай от (8) следва, че $\bar{k}(m)$ е имагинерна елипса или две пресичащи се комплексно спрегнати прави. Тъй като тези случаи нямат геометричен смисъл, по-нататък ще разглеждаме само случаите, в които (7) е уравнение на елипса $\bar{k}(m)$. Освен това от (8) се вижда, че центърът S на елипсата $\bar{k}(m)$ има следните координати

$$(9) \quad S \left(\frac{(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3}{2(k_1 + k_2 + k_3)}, 0 \right).$$

От (7) при $y = 0$ се вижда, че елипсата $\bar{k}(m)$ има върхове V_1 и V_2 върху правата l (фиг. 2), координатите на които удовлетворяват уравнението

$$(10) \quad (k_1 + k_2 + k_3)x^2 - [(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3]x + k_1a_2a_3 + k_2a_3a_1 + k_3a_1a_2 = 0.$$

От (10) следва, че тези върхове не зависят от m , което означава, че те са постоянни точки от правата l за всяка елипса $\bar{k}(m)$ (фиг. 2). С това лемата е доказана.

Доказаната лема показва, че когато k_1, k_2 и k_3 остават постоянни, а стойността на m се променя, се получава множество от елипси с общи върхове (фиг. 2). От всичките тези елипси една е окръжност. Тя се получава при някоя специална стойност m_0 на m . Кривата $\bar{k}(m)$ е окръжност $\bar{k}_0$ тогава и само тогава, когато коефициентите пред x^2 и y^2 са равни. Така получаваме, че

$$\bar{k}(m) \text{ е окръжност } \bar{k}_0 \text{ само когато } m = m_0 = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3}{k_1 + k_2 + k_3}}. \text{ Окръжността } \bar{k}_0,$$

както всички останали елипси на разглежданото множество, пресича правата l в постоянните точки V_1 и V_2 , които са решенията на (10).

В (Grozdev & Nenkov, 2018 a) е разглеждана специална елипса, която се получава при $m = \sqrt{3}$ и $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Интересно е да се забележи такава специална елипса и в случаите, когато k_1 , k_2 и k_3 са произволни естествени числа. Такива специални елипси, които обобщават разгледания в (Grozdev & Nenkov, 2018 a) случай, могат да се получат чрез различни форми,

в които m е функция на k_1 , k_2 и k_3 . Например $m' = \frac{(k_1 + k_2 + k_3)\sqrt{3}}{3}$

и $m'' = \frac{(k_1 + k_2 + k_3)\sqrt{k_1 + k_2 + k_3}}{3}$ (при $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ се получава случаят

от (Grozdev & Nenkov, 2018 a)). Най-естествената стойност на m , при която се получава специална елипса в разглежданото множество от елипси, е

$m = \frac{1}{m_0} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1 k_2 k_3}}$, тъй като тя е реципрочна на стойността, при която

се получава окръжността $\bar{k}_0$ (най-специалната от всички елипси, минаващи през точките V_1 и V_2). Така получаваме специалната елипса $\bar{k}_1$.

Особен случай на кривата $\bar{k}_1$ се получава, когато $k_1 = k_2 = k_3 = p$. Триъгълниците $A_1 A_2 P'_{12}$, $A_1 A_2 P''_{12}$, $A_2 A_3 P'_{23}$, $A_2 A_3 P''_{23}$, $A_3 A_1 P'_{31}$, $A_3 A_1 P''_{31}$ в този случай са равностранни, а уравнението (7) преминава в следното

$$\bar{k}_1: 9x^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)x + p^4 y^2 + 3(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2) = 0.$$

3. Връзка между корените на производната и общите върхове на множеството от елипси. Сега ще покажем, че върховете V_1 и V_2 на разглежданото множество от елипси са търсената връзка между споменатите в началото полиноми и техните производни. По-точно в сила е следната:

Теорема. Ако точките A_1 , A_2 и A_3 лежат на една права l , а $P(z)$ е полином от степен $n = k_1 + k_2 + k_3$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти и има k_j кратен корен в точката A_j ($j = 1, 2, 3$), то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени в общите върхове на елипсите $\bar{k}(m)$.

Доказателство. Разглеждаме Гаусова координатна система с реална ос по правата l . Спрямо тази координатна система афиксите a_1 , a_2 и a_3 , съответно на точките A_1 , A_2 и A_3 , са реални числа. Ако $P(z)$ е полином, който притежава свойствата, описани в теоремата, той се представя по следния начин:

$$P(z) = a(z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} (z - a_3)^{k_3}.$$

Следователно неговата производна $P'(z)$ е следната

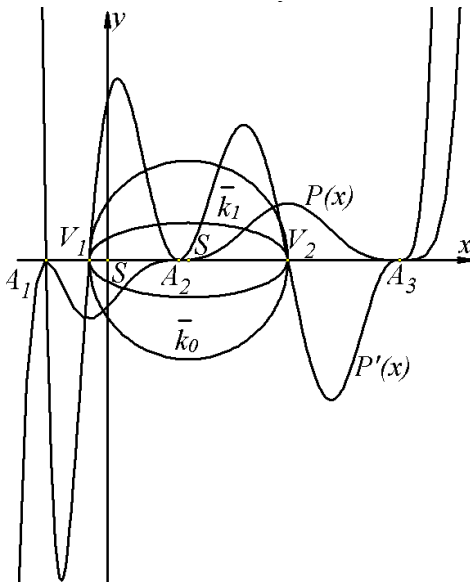
$$P'(z) = a(z-a_1)^{k_1-1}(z-a_2)^{k_2-1}(z-a_3)^{k_3-1}U(z),$$

където

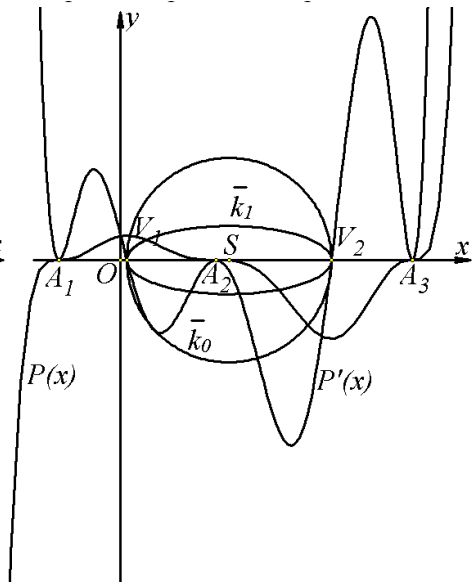
$$(11) \quad U(z) = (k_1 + k_2 + k_3)z^2 - \\ - [(k_2 + k_3)a_1 + (k_3 + k_1)a_2 + (k_1 + k_2)a_3]z + k_1a_2a_3 + k_2a_3a_1 + k_3a_1a_2 = 0.$$

Тъй като уравнението (10) и полиномът $U(z)$ от (11) имат едни и същи корени, то получаваме твърдението на теоремата.

Полиномът $P'(z)$ има $k_j - 1$ кратен корен във върха A_j ($j = 1, 2, 3$) (Genov, Mihovski & Mollov, 1991), а останалите два корена се описват от токущо доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.



Фигура 3



Фигура 4

Ако $P(z) = P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим геометрично резултатите, формулирани в теоремата. На фиг. 3 е показан случай при $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ и $k_3 = 4$, а на фиг. 4 имаме случай, при който $k_1 = k_2 = k_3 = 3$.

Като обединим резултатите, които ни дава доказаната тук теорема за полиноми с колинеарни корени, и резултатите, съдържащи се в (Grozdev & Nenkov,

2018 b), отнасящи се до полиноми с корени във върховете на триъгълник, можем да заключим, че са намерени геометрични връзки между полином, всички корени на който се намират в три точки, и неговата производна.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjanskaja Shkola. [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Genov, G., S. Mihovski & T. Mollov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 a). Polynomials of third degree with collinear roots. *Mathematics and Informatics*, 3, 283 – 293. [Гроздев, С. & В. Ненков (2018 а). Полиноми от трета степен с колинеарни корени. *Математика и информатика*, 3, 283 – 293.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 b). Polynomials of forth degree with roots in the vertices of parallelogram. *Mathematics and Informatics*, 3, 277 – 282. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 b). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник. *Математика и информатика*, 3, 277 – 282.]
- Mateev, A. (1977). *Projective geometry*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). *Introduction to the Theory of analytic functions*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Маркушевич, А. & Л. Маркушевич (1980). *Увод в теорията на аналитичните функции*. София: Наука и изкуство.]
- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59. [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.]
- Nenkov, V. (2010). A relation between the non-real roots and a real ellipse, *Mathematics Plus*, 2, 61 – 63. [Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.]
- Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]
- Prasolov, V. (1986). *Problems in Geometry. Part II*. Moscow: Nauka. [Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Часть II*. Москва: Наука.]

POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THREE COLLINEAR POINTS

Abstract. A geometric relation is considered between polynomials with roots in three collinear points and the roots of their corresponding derivatives by means of a set of ellipses generated by the polynomial roots.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg