

## ПОЛИНОМИ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН С КОЛИНЕАРНИ КОРЕНИ

<sup>1)</sup>Сава Гроздев, Веселин Ненков

<sup>1)</sup>Висше училище по застраховане и финанси – София

**Резюме.** Разгледана е геометрична връзка между полином с колинеарни корени и корените на неговата производна посредством една специална елипса, породена от корените на полинома.

**Keywords:** polynomial of third degree; derivative; equilateral triangle; ellipse; circle; vertices; centroid

**Увод.** Известна е една геометрична връзка между корените на полиномите от трета степен с неколинеарни корени и корените на съответните им производни. Според тази връзка, ако корените на полином от трета степен са разположени във върховете на триъгълник, то корените на неговата производна се намират във фокусите на елипсата, допираща се до страните на триъгълника в техните среди (Nenkov, 2010). Освен това съществуват полиноми от трета степен с корени, разположени в точки, които лежат върху една права. Затова възниква въпросът за възможността да съществуват геометрични връзки между корените на този вид полиноми и корените на техните производни посредством подходящи елипси. Оказва се, че подобни геометрични връзки съществуват, но с по-различна геометрична структура от разгледаните в (Nenkov, 2010).

**Специална елипса и специална окръжност, определени от три колинеарни точки.** Разкриването на геометричните връзки между полиноми от трета степен и съответните им производни ще проведем в последователност от няколко помощни твърдения. Тези твърдения се отнасят до криви от втора степен, определени от равностранни триъгълници с колинеарни върхове.

**Лема 1.** Ако точките  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  лежат на една права  $l$ , а точките  $P'_j$  и  $P''_j$  ( $j=1,2,3$ ) са такива, че триъгълниците  $A_2A_3P'_1$ ,  $A_2A_3P''_1$ ,  $A_3A_1P'_2$ ,  $A_3A_1P''_2$ ,  $A_1A_2P'_3$  и  $A_1A_2P''_3$  са равностранни, то точките  $P'_j$  и  $P''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на една елипса  $k$ .

**Доказателство.** Разглеждаме координатна система с абсцисна ос по правата  $l$  и координатно начало в центъра на тежестта  $G$  на точките  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ .

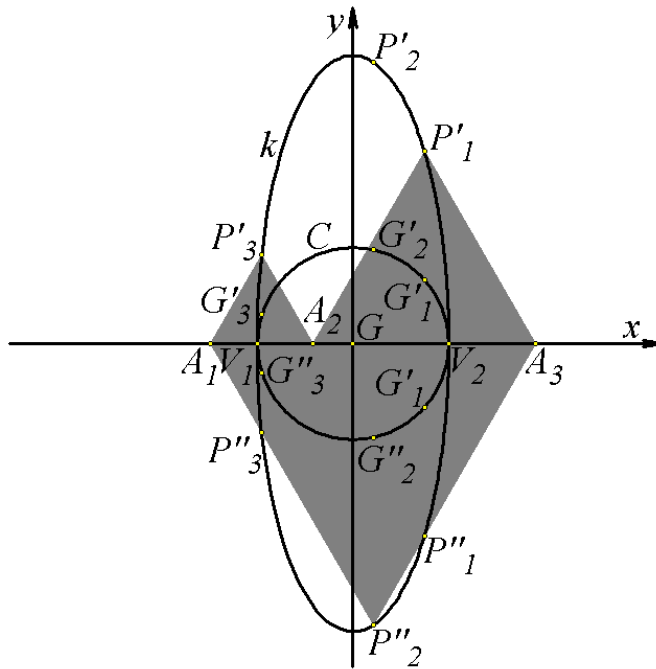
Нека спрямо въведената координатна система абсцисите на точките  $A_1, A_2$  и  $A_3$  са съответно  $a_1, a_2$  и  $a_3$ . Тъй като  $G$  е център на координатната система, то  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ . От последното равенство лесно се вижда, че са изпълнени равенствата

$$(1) \quad a_1^2 - a_2 a_3 = a_2^2 - a_3 a_1 = a_3^2 - a_1 a_2 = 3R^2,$$

където  $R$  е реално положително число.

Координатите на точките  $P'_j$  и  $P''_j$  ( $j=1,2,3$ ) се изразяват по следния начин:

$$(2) \quad \begin{aligned} &P'_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}, \frac{|a_2-a_3|\sqrt{3}}{2}\right), P'_2\left(\frac{a_3+a_1}{2}, \frac{|a_3-a_1|\sqrt{3}}{2}\right), P'_3\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{|a_1-a_2|\sqrt{3}}{2}\right), \\ &P''_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}, -\frac{|a_2-a_3|\sqrt{3}}{2}\right), P''_2\left(\frac{a_3+a_1}{2}, -\frac{|a_3-a_1|\sqrt{3}}{2}\right), P''_3\left(\frac{a_1+a_2}{2}, -\frac{|a_1-a_2|\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$



Фигура 1

От (1) и (2) лесно се вижда, че точките  $P'_j$  и  $P''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на елипсата  $k$ , определена с уравнението

$$(3) \quad k: \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{9R^2} = 1.$$

С това лемата е доказана.

**Лема 2.** Ако точките  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  лежат на една права  $l$ , а точките  $G'_j$  и  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) са центровете на равностранните триъгълници  $A_2A_3P'_1$ ,  $A_2A_3P''_1$ ,  $A_3A_1P'_2$ ,  $A_3A_1P''_2$ ,  $A_1A_2P'_3$  и  $A_1A_2P''_3$ , то точките  $G'_j$  и  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на една окръжност  $C$ .

**Доказателство.** Разглеждаме същата координатна система, както в доказателството на лема 1. Координатите на точките  $G'_j$  и  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) се изразяват по следния начин:

$$(4) \quad \begin{aligned} G'_1 &\left( \frac{a_2+a_3}{2}, \frac{|a_2-a_3|\sqrt{3}}{6} \right), G'_2 \left( \frac{a_3+a_1}{2}, \frac{|a_3-a_1|\sqrt{3}}{6} \right), G'_3 \left( \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{|a_1-a_2|\sqrt{3}}{6} \right), \\ G''_1 &\left( \frac{a_2+a_3}{2}, -\frac{|a_2-a_3|\sqrt{3}}{6} \right), G''_2 \left( \frac{a_3+a_1}{2}, -\frac{|a_3-a_1|\sqrt{3}}{6} \right), G''_3 \left( \frac{a_1+a_2}{2}, -\frac{|a_1-a_2|\sqrt{3}}{6} \right). \end{aligned}$$

От (1) и (4) лесно се вижда, че точките  $G'_j$  и  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на окръжността  $C$ , определена с уравнението

$$(5) \quad C: x^2 + y^2 = R^2.$$

С това лемата е доказана.

От равенствата (3) и (5) се получава, че единствените общи точки на елипсата  $k$  и окръжността  $C$  са  $V_1(-R,0)$  и  $V_2(R,0)$ . Следователно те са върхове на  $k$ . По този начин доказахме и следната:

**Лема 3.** Окръжността  $C$  и елипсата  $k$  се допират във върховете  $V_1$  и  $V_2$ , лежащи върху малката ос на  $k$ .

*Забележка.* Поради симетрията е ясно, че двете шесторки точки  $P'_j$ ,  $P''_j$  и  $G'_j$ ,  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на криви от втора степен. Лема 1 уточнява, че точките  $P'_j$ ,  $P''_j$  лежат на елипса, а лема 2 уточнява, че точките  $G'_j$ ,  $G''_j$  ( $j=1,2,3$ ) лежат на една окръжност.

**3. Връзка между корените на производната на полином от трета степен с колинеарни корени и върховете от малката ос на една специална елипса.** Сега ще покажем, че върховете  $V_1$  и  $V_2$  на  $k$  са търсената връзка между споменатите в началото полиноми и техните производни. По-точно, в сила е следната:

**Теорема.** Ако един полином  $P(z)$  от трета степен на комплексна променлива с комплексни коефициенти има корени в три различни точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  от една права  $l$ , то производната  $P'(z)$  на  $P(z)$  има ко-

рени във върховете от малката ос на елипсата  $k$ , определена от върховете на равностранните триъгълници, построени върху отсечките  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$ .

**Доказателство.** Разглеждаме Гаусова координатна система с реална ос по правата  $l$ . Спрямо тази координатна система афиксите  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , съответно на точките  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , са реални числа, а точките от окръжността  $C$  се определят с уравнението

$$(6) \quad C: 3z\bar{z} - (a_1 + a_2 + a_3)z - (a_1 + a_2 + a_3)\bar{z} + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0.$$

От (6) следва, че пресечните точки на окръжността  $C$  с реалната ос  $l$ , която има уравнение  $\bar{z} = z$ , удовлетворяват равенството

$$(7) \quad 3z^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3)z + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0.$$

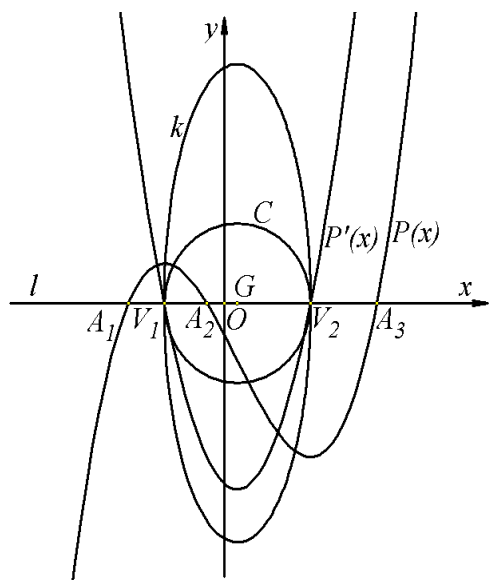
Нека сега  $P(z)$  е нормиран полином от трета степен с корени в точките  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . От формулите на Виет следва, че  $P(z)$  и неговата производна  $P'(z)$  се представят по следния начин:

$$(8) \quad P(z) = z^3 - (a_1 + a_2 + a_3)z^2 + (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)z - a_1a_2a_3 = 0,$$

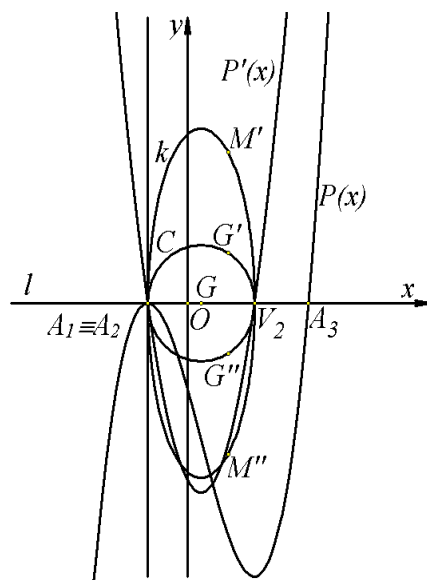
$$(9) \quad P'(z) = 3z^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3)z + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0.$$

От (7) и (9) следва, че корените на  $P'(z)$  съвпадат с пресечните точки на окръжността  $C$  с правата  $l$ . Сега от лема 3 следва, че теоремата е в сила за разглеждания полином  $P(z)$ . Тъй като всеки полином от трета степен с колинеарни и различни корени може да се приведе в положение подобно, на  $P(z)$ , то теоремата е в сила за всички полиноми от разглеждания вид.

Доказаната теорема има смисъл и когато две от точките съвпадат. Първо ще покажем, че елипсата  $k$  е напълно определена. Нека  $A_1 \equiv A_2$ . Тогава  $P_1' \equiv P_2' \equiv M'$ ,  $P_1'' \equiv P_2'' \equiv M''$ ,  $P_3' \equiv P_3'' \equiv A_1$ ,  $G_1' \equiv G_2' \equiv G'$ ,  $G_1'' \equiv G_2'' \equiv G''$  и  $G_3' \equiv G_3'' \equiv A_1$ . Окръжността  $C$  е напълно определена от точките  $G'$ ,  $G''$  и  $A_1$ . Пресечните точки на  $C$  и  $l$  са  $A_1$  и  $V_2$ . Следователно върховете на търсената елипса  $k$  са  $V_1 \equiv A_1$  и  $V_2$ . Освен това правата, която минава през  $A_1$  и е перпендикулярна на  $l$ , е обща допирателна за  $C$  и  $k$ . Сега  $k$  е напълно определена от точките  $V_2$ ,  $M'$ ,  $M''$ ,  $A_1 \equiv V_1$  и допирателна  $t$  в  $A_1$ . По-нататък е ясно, че полиномът  $P(z)$  с двоен корен в точката  $A_1$  и прост корен в точката  $A_3$  има производна  $P'(z)$ , корените на която съвпадат с върховете  $V_1 \equiv A_1$  и  $V_2$  на елипсата  $k$ . Случаите, когато  $P(z) = P(x)$  е полином с реални коефициенти на реална променлива  $x$ , са демонстрирани на фиг. 2 и 3.



Фигура 2



Фигура 3

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Московского университета.]
- Stanilov, G. (1979). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). *Introduction to the theory of Analytic functions*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Маркушевич, А. & Л. Маркушевич (1980). *Увод в теорията на аналитичните функции*. София: Наука и изкуство.]
- Prasolov, V. (1986). *Problems in Plane geometry. Part II*. Moscow: Nauka. [Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Часть II*. Москва: Наука.]
- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjansk school. [Балк, М., Г. Балк & А. Полушин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Martinov, N. (1989). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]

- Genov, G., S. Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.]
- Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59. [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages
- Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and a real ellipse. *Mathematics Plus*, 2, 61 – 63 [Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София, Архимед.]
- Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of Complex Numbers*. Sofia: Arhimedes, 240 pages (ISBN 978-954-779-1886.)

## POLYNOMIALS OF THIRD DEGREE WITH COLLINEAR ROOTS

**Abstract.** It is considered a geometric relation between a polynomial with collinear roots and the roots of its derivative by means of a special ellipse, which is generated by the roots of the polynomial.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship  
1, Gusla St.

1618 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

45, Stoyan Balgarencheto St.

5662 Beli Osam, Bulgaria

E-mail: vnenkov@mail.bg