

ПЕРФЕКТНА ИЗОГОНАЛНОСТ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Веселин Ненков, ¹⁾Станислав Стефанов, Хаим Хаимов

¹⁾Технически университет – София

Резюме. Разгледано е едно преобразуване в равнината на четириъгълника, което позволява да се получат обобщения на известните прави на Гаус и Гаус-Боденмилер за пълния четириъгълник.

Keywords: quadrilateral; notable point; line; circle

В тази статия ще разгледаме едно универсално преобразуване в четириъгълник, което е аналог на преобразуването изогоналност в триъгълника. Към познатите от триъгълника свойства на това преобразуване се добавят редица нови, характерни само за четириъгълника. Последните са свързани с една забележителна права в четириъгълника (Haimov, 1999) и с някои забележителни точки. Благодарение на тези свойства са получени важни обобщения на теоремите на Гаус и Гаус-Боденмилър за пълния четириъгълник, както и на някои съпътстващи ги твърдения. Разгледана е връзката на това преобразуване с инверсната изогоналност (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017).

Определение 1. Две прави през върха на даден ъгъл се наричат *изогонални*, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му.

Определение 2. Две точки в четириъгълника, които лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му, се наричат *перфектно изогонални*.

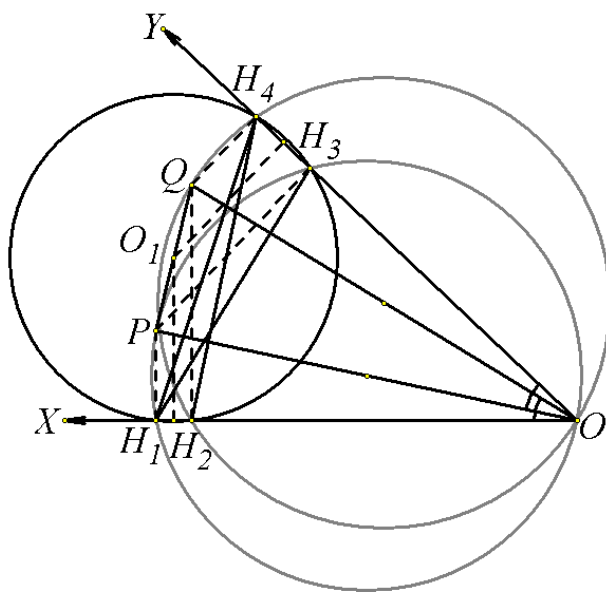
Примери на перфектно изогонални точки в четириъгълник с перпендикулярни диагонали са бромарианите му K_1 и K_2 (Haimov, 2005), псевдоцентърът му O и пресечната точка T на диагоналите му (Haimov, 2010), (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2016). Такива са и вторият му псевдоцентър O_1 и точката на Лемоан L (Haimov, 2011).

Центърът на вписаната окръжност на описания четириъгълник очевидно е перфектно изогонален сам на себе си.

Ще разгледаме няколко важни критерия две точки в изпъкнал четириъгълник да са перфектно изогонални. Предварително ще докажем една лема.

Лема 1. Дадени са $\angle XOY$ и две точки P и Q в равнината му. Ако H_1 и H_3 са ортогоналните проекции на P съответно върху правите OX и OY , а H_2 и H_4 са съответните ортогонални проекции на Q върху същите прави, то точките P и Q лежат на изогонални прави спрямо $\angle XOY$ тогава и само тогава, когато точките H_1 , H_2 , H_3 и H_4 лежат на една окръжност с център средата на отсечката PQ .

Доказателство. Нека точките P и Q лежат на изогонални прави спрямо $\angle XOY$. За определеност ще предполагаме, че те и двете са от неговата вътрешност. Случаят, когато те не лежат в ъгъла, се разглежда аналогично. От определението имаме $\angle POY = \angle QOX = \alpha$ (фиг. 1).



Фигура 1

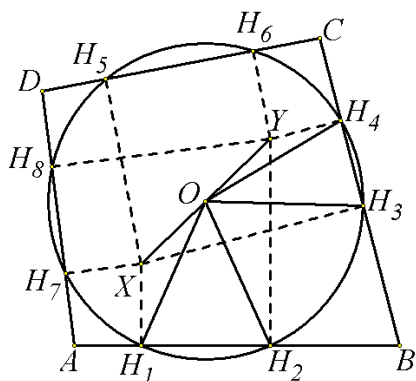
Лесно се вижда, че четириъгълникът RH_1OH_3 е вписан в окръжност, откъдето следват равенствата $\angle OH_1H_3 = \angle OPH_3 = 90^\circ - \angle POH_3 = 90^\circ - \alpha$. Аналогично от вписания четириъгълник QH_2OH_4 имаме $\angle OH_4H_2 = \angle OQH_2 = 90^\circ - \angle QOH_2 = 90^\circ - \alpha$. Следователно $\angle OH_1H_3 = \angle OH_4H_2 = 90^\circ - \alpha$. Това означава, че четириъгълникът $H_1H_2H_3H_4$ е вписан в окръжност. Нейният център е пресечна точка на си-

метралите на отсечките H_1H_2 и H_3H_4 . Лесно се съобразява, че тази точка е средата на PQ .

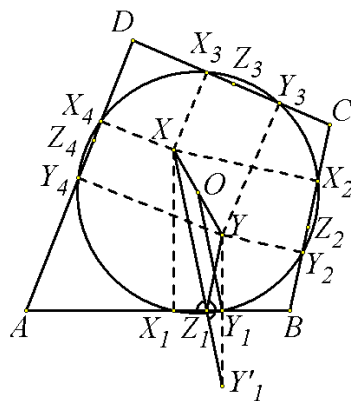
С помощта на същите разсъждения, извършени в обратен ред, се доказва, че ако проекциите H_1 , H_3 и H_4 на точките P и Q лежат на една окръжност, то точките P и Q лежат на изогонални прави спрямо ъгъла.

Свойство 1. Точките X и Y в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са перфектно изогонални тогава и само тогава, когато ортогоналните им проекции върху правите AB , BC , CD и DA лежат на една окръжност с център средата на отсечката XY .

Доказателство. Означаваме проекциите на точката X върху правите AB , BC , CD и DA съответно с H_1 , H_3 , H_5 и H_7 , а проекциите на точката Y – съответно с H_2 , H_4 , H_6 и H_8 (фиг. 2). Точките X и Y са перфектно изогонални, ако лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите на четириъгълника $ABCD$ (по определение 2). Те лежат на изогонални прави спрямо $\sphericalangle ABC$ тогава и само тогава, когато точките H_1 , H_2 , H_3 и H_4 лежат на една окръжност с център средата O на отсечката XY (по лема 1), т.е. когато са изпълнени равенствата $OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$. Аналогично точките X и Y лежат на изогонални прави спрямо $\sphericalangle BCD$ тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата $OH_3 = OH_4 = OH_6 = OH_5$ и т.н. Можем да заключим, че точките X и Y лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите на четириъгълника $ABCD$ тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_8$, т.е. когато проекциите H_1 , H_2 , $\dots$, H_8 на точките X и Y върху правите AB , BC , CD и DA лежат на една окръжност.



Фигура 2



Фигура 3

Следващото свойство на перфектно изогоналните точки в четириъгълника се отнася за точки от неговата вътрешност.

Свойство 2. Точките X и Y от вътрешността на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са перфектно изогонални тогава и само тогава, когато съществува елипса с фокуси X и Y , вписана в $ABCD$.

Доказателство. Първо ще докажем, че ако точките X и Y са перфектно изогонални, то такава елипса съществува (фиг. 3). Означаваме проекциите на X върху страните AB , BC , CD и DA съответно с X_1 , X_2 , X_3 и X_4 , а проекциите на Y – съответно с Y_1 , Y_2 , Y_3 и Y_4 . Нека Y'_1 , Y'_2 , Y'_3 и Y'_4 са симетричните точки на Y спрямо страните AB , BC , CD и DA . Нека още $XY'_1 \cap AB = Z_1$, $XY'_2 \cap BC = Z_2$, $XY'_3 \cap CD = Z_3$, $XY'_4 \cap DA = Z_4$. Щом точките X и Y са перфектно изогонални, то проекциите им върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност с център средата O на отсечката XY (от свойство 1). Означаваме радиуса на тази окръжност с R . Тогава $OY_1 = OY_2 = OY_3 = OY_4 = R$. Като използваме, че геометричното място на точките P , за които $XP + YP = 2R$, е елипса (c) с фокуси X и Y , ще покажем, че точките Z_1 , Z_2 , Z_3 и Z_4 лежат на една елипса. От симетрията спрямо AB имаме $YZ_1 = Y'_1Z_1$. Оттук $XZ_1 + YZ_1 = XZ_1 + Y'_1Z_1 = XY'_1$. Тъй като OY_1 е средна отсечка в $\triangle XY_1Y$, то $XY'_1 = 2OY_1$. Така получаваме $XZ_1 + YZ_1 = XY'_1 = 2OY_1 = 2R$, което ни убеждава, че точката Z_1 принадлежи на елипсата (c). Аналогично се доказва, че и точките Z_2 , Z_3 и Z_4 принадлежат на тази елипса (c). Остава да

покажем, че страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника се допират до елипсата (c) в точките Z_1 , Z_2 , Z_3 и Z_4 . От симетрията спрямо AB имаме $\sphericalangle XZ_1A = \sphericalangle Y_1Z_1B = \sphericalangle YZ_1B$, т.е. правата AB съдържа равни ъгли с фокалните радиуси на елипсата (c) в точката Z_1 . От фокалното свойство на елипсата за допирателните можем да заключим, че правата AB се допира до елипсата (c) в точката Z_1 . Аналогично се доказва, че и правите BC , CD и DA се допират до елипсата. Така се убеждаваме, че ако точките X и Y са перфектно изогонални, то съществува елипса с фокуси X и Y , вписана в четириъгълника $ABCD$.

С помощта на същите разсъждения, извършени в обратен ред, се доказва, че ако точките X и Y са фокуси на елипса, вписана в четириъгълника $ABCD$, то те са перфектно изогонални.

Нека отбележим, че ако точките X и Y не са от вътрешността на изпъкналия четириъгълник, свойство 2 остава в сила с тази разлика, че елипсата се заменя с подходящо конично сечение. Доказателството е аналогично.

Доказаното свойство 2 само по себе си е забележително, но то е важно преди всичко с това, че поражда едно ново свойство на перфектната изогоналност, характерно само за четириъгълника. Правата през средите на диагоналите на четириъгълника е забележителна с интересните си свойства. Някои от тях са разгледани в (Найтов, 1999), където тази права е наречена Гаусова. Сега ще докажем, че центровете на всички вписани елипси в четириъгълника лежат на Гаусовата права.

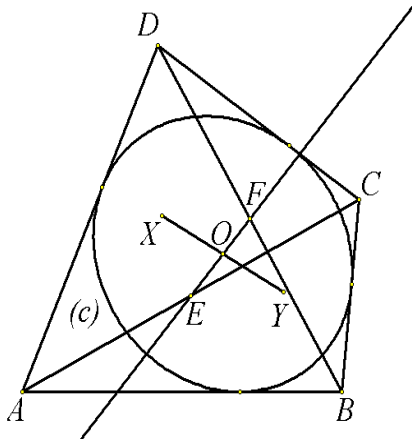
Свойство 3. Ако X и Y са две перфектно изогонални точки в изпъкналия четириъгълник $ABCD$, то средата O на отсечката XY лежи върху Гаусовата права.

Доказателство. Използвайки предходното свойство, получаваме, че съществува елипса (c) с фокуси X и Y , вписана в четириъгълника $ABCD$ (фиг. 4.1). Нека $ABCD$ лежи в равнина α . Тогава съществува равнина β , в която чрез ортогонално проектиране h елипсата (c) се изобразява в окръжност (c_1) (според теорията на коничните сечения) (фиг. 4.2).

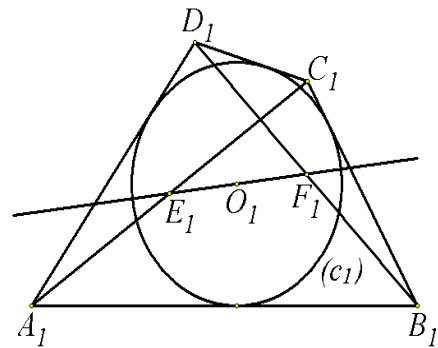
При проектирането h образът на центъра O на елипсата (c) съвпада с центъра O_1 на окръжността (c_1) . Нещо повече – четириъгълникът $ABCD$, който е описан около елипсата (c) , се изобразява в четириъгълник $A_1B_1C_1D_1$, описан около окръжността (c_1) . Средите E и F на диагоналите AC и BD се изобразяват в средите E_1 и F_1 на A_1C_1 и B_1D_1 . Следователно образ на Гаусовата права на четириъгълника $ABCD$ е Гаусовата права E_1F_1 на $A_1B_1C_1D_1$. От теоремата на Нютон за описания четириъгълник получаваме, че центърът O_1 на вписаната окръжност (c_1) в четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ лежи на Гаусовата му права E_1F_1 . Следователно

центърът O на елипсата, вписана в четириъгълника $ABCD$ – прообраз на центъра O_1 на окръжността (c_1) , лежи на Гаусовата права EF на четириъгълника $ABCD$ – прообраз на Гаусовата права E_1F_1 на четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. С това свойството е доказано.

Други изследвания върху центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения и доказателство на последното свойство се съдържат в (Nenkov, 2010).



Фигура 4.1



Фигура 4.2

Нека по-нататък отбележим, че според свойство 1, ако точките X и Y са перфектно изогонални, то проекциите им върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност. В частност, ако точката X в четириъгълника $ABCD$ има перфектно изогонална, то проекциите на X върху страните на четириъгълника лежат на една окръжност. Както ще покажем сега, обратното също е вярно.

Свойство 4. Нека X е точка в равнината на четириъгълника $ABCD$, проекциите на която върху страните му лежат на една окръжност (c) . Тогава точката X има перфектно изогонална точка Y , симетрична на X спрямо центъра на окръжността (c) .

Доказателство. Означаваме проекциите на точката X върху правите AB , BC , CD и DA съответно с H_1 , H_3 , H_5 и H_7 (фиг. 2). Тези точки по условие лежат на една окръжност (c) . Аналогично означаваме с H_2 , H_4 , H_6 и H_8 проекциите на точката Y , симетрична на X спрямо центъра O на (c) , върху страните на четириъгълника (фиг. 2). Ще докажем, че точките H_2 , H_4 , H_6 и H_8 също лежат на окръжността (c) . Нека E е средата на отсечката H_1H_2 . Понеже OE е успоредна на осно-

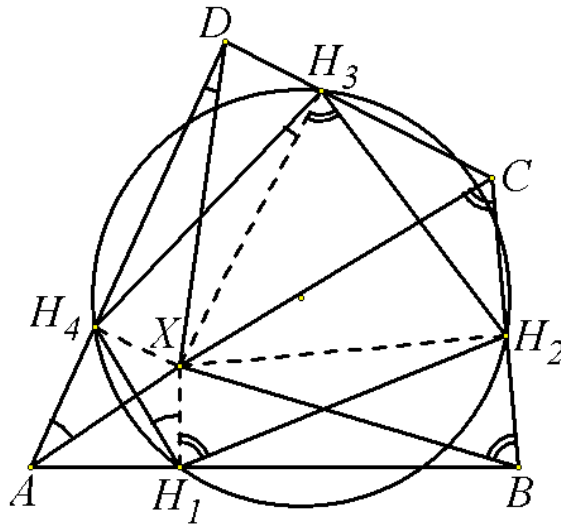
вите на трапеца H_1H_2YX , то $OE \perp H_1H_2$. Тогава триъгълникът H_1OH_2 е равнобедрен, защото OE съвпада със симетралата на отсечката H_1H_2 . Следователно $OH_1 = OH_2$. Тъй като $H_1 \in (c)$ по условие, то $H_2 \in (c)$. Аналогично получаваме $H_4, H_6, H_8 \in (c)$. Имайки предвид, че проекциите на точките X и Y върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност, заключаваме, че точките X и Y са перфектно изогонални (от свойство 1).

Доказахме, че необходимото и достатъчно условие една точка X в равнината на изпъкнал четириъгълник да има перфектно изогонална е проекциите ѝ върху страните на четириъгълника да лежат на една окръжност. На това условие може да се придаде по-удобна форма с помощта на равенство, описващо тези точки.

Лема 2. *Проекциите на точката X от вътрешността на четириъгълника $ABCD$ върху страните му лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството:*

$$(1) \quad \sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ.$$

Доказателство. Проекциите на точката X върху страните AB , BC , CD и DA означаваме съответно с H_1 , H_2 , H_3 и H_4 (фиг. 5).



Фигура 5

Първо ще докажем, че ако H_1 , H_2 , H_3 и H_4 лежат на една окръжност, то равенство (1) е изпълнено. Тъй като четириъгълникът $H_1H_2H_3H_4$ е вписан, получаваме:

$$(2) \quad (\sphericalangle H_4H_1X + \sphericalangle H_2H_1X) + (\sphericalangle H_4H_3X + \sphericalangle H_2H_3X) = 180^\circ.$$

Същевременно имаме:

$$(3) \quad \sphericalangle H_4H_1X = \sphericalangle H_4AX, \quad \sphericalangle H_2H_1X = \sphericalangle H_2BX, \quad \sphericalangle H_4H_3X = \sphericalangle H_4DX, \\ \sphericalangle H_2H_3X = \sphericalangle H_2CX.$$

От равенства (2) и (3) следва

$$(\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_2BX) + (\sphericalangle H_4DX + \sphericalangle H_2CX) = 180^\circ \text{ или} \\ (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_4DX) + (\sphericalangle H_2BX + \sphericalangle H_2CX) = 180^\circ, \text{ т.е.} \\ (180^\circ - \sphericalangle AXD) + (180^\circ - \sphericalangle BXC) = 180^\circ.$$

Така заключаваме, че равенството (1) е изпълнено.

С помощта на същите разсъждения, извършени в обратен ред, се доказва, че ако равенство (1) е изпълнено, то проекциите на точката X от вътрешността на четириъгълника $ABCD$ върху страните му лежат на една окръжност.

Свойство 5. Точката X от вътрешността на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ има перфектно изогонална тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$.

Доказателство. Нека първо точката X има перфектно изогонална точката Y . Тогава проекциите на точките X и Y върху страните на четириъгълника лежат на една окръжност (от свойство 1). В частност, проекциите на X върху страните лежат на една окръжност. Можем да заключим, че $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ (по лема 2).

Нека сега равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ е изпълнено. Тогава проекциите на точката X върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност (по лема 2). Така заключаваме, че точката X има перфектно изогонална (от свойство 4).

Забележка 1. Горното свойство остава в сила и в случая, когато точката X лежи извън четириъгълника, като условието $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ се заменя с условията $\sphericalangle AXD = \sphericalangle BXC$ и $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD$.

Сега ще се спрем на един важен пример на перфектно изогонални точки, които не са от вътрешността на четириъгълника.

Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който $AD \cap BC = U$, $AB \cap CD = V$, а C лежи между B и U и между D и V . Лесно се съобщава, че точките U и V са перфектно изогонални (по определение 2).

Повечето от доказаните свойства на вътрешните за четириъгълника перфектно изогонални точки се пренасят (с подразбиращите се промени) и за перфектно изогонални точки, които не са от неговата вътрешност. В частност, свойство 3 остава вярно и за точките U и V . В този случай то се изказва така: *Средата на отсечката UV и средите на диагоналите AC и BD лежат на една права.* Става ясно, че свойство 3 е обобщение на теоремата на Гаус за пълния четириъгълник, която е точно изказаното твърдение. Както ще видим сега, има още една класическа теорема за пълния четириъгълник, която може да бъде обобщена благодарение на преобразуванието перфектна изогоналност.

Теорема на Гаус-Боденмилър. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и $AD \cap BC = U$, $AB \cap CD = V$. Ортоцентровете на триъгълниците ABU , DCU , ADV и BCV лежат на една права.*

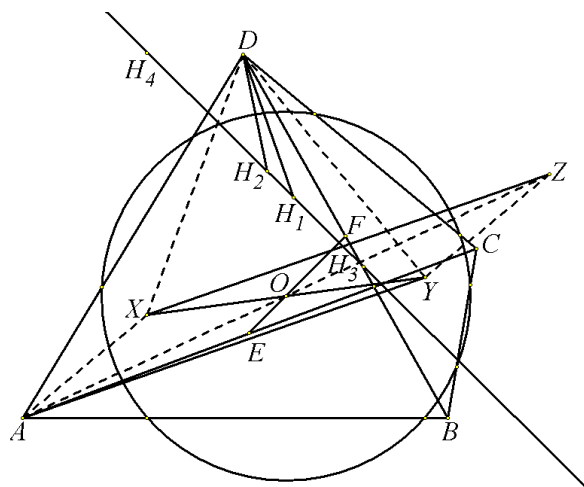
Да забележим, че теоремата съответства на точките U и V , които са перфектно изогонални. Тогава можем да разгледаме произволна двойка перфектно изогонални точки X и Y и да докажем, че теоремата остава вярна и за тях. По подобие ще вземем ортоцентровете на триъгълниците ABX , DCX , ADY и BCY .

Свойство 6. *Нека X и Y са две перфектно изогонални точки в четириъгълника $ABCD$. Ортоцентровете на триъгълниците ABX , DCX , ADY и BCY лежат на една права, перпендикулярна на Гаусовата права.*

Доказателство. Да означим средите на диагоналите AC и BD съответно с E и F , а ортоцентровете на триъгълниците ADY , CDX , BCY и ABX съответно с H_1 , H_2 , H_3 и H_4 (фиг. 6).

Първо ще докажем, че $H_1H_2 \perp EF$. Точките X и Y по условие лежат на изогонални прави спрямо $\sphericalangle ADC$, следователно $\sphericalangle ADY = \sphericalangle CDX = \varphi$. За разстоянията от ортоцентровете H_1 и H_2 на триъгълниците ADY и CDX до общия им връх D имаме $DH_1 = AY|\cotg\varphi|$, $DH_2 = CX|\cotg\varphi|$, при това $DH_1 \perp AY$ и $DH_2 \perp CX$. Построяваме вектор $\overrightarrow{XZ}$, равен на $\overrightarrow{AY}$. Имаме: $DH_1 = AY|\cotg\varphi| = XZ|\cotg\varphi|$ (следователно $XZ = DH_1|tg\varphi|$), $XZ \perp DH_1$ и $DH_2 = CX|\cotg\varphi|$ (следователно $CX = DH_2|tg\varphi|$), $CX \perp DH_2$. Можем да направим извода, че триъгълникът XZC е образ на триъгълника DH_1H_2 при композицията от въртяща хомотетия с център D , ъгъл 90° и коефициент $|tg\varphi|$ и трансляция на вектор $\overrightarrow{DX}$. Оттук ще заключим, че $H_1H_2 \perp CZ$. От друга страна обаче, средата O на отсечката XY е среда и на отсечката AZ (от успоредника $AXZY$) и следователно $CZ \parallel EO$ (понеже EO е средна отсечка в $\triangle ACZ$). Но средата O на отсечката XY лежи на отсечката EF (от свойство 3), което означава, че $CZ \parallel EF$. Понеже $H_1H_2 \perp CZ$ по доказаното по-горе, можем

да заключим, че $H_1H_2 \perp EF$. Аналогично се доказва, че $H_2H_3 \perp EF$ и $H_3H_4 \perp EF$, с което се убеждаваме, че точките H_1 , H_2 , H_3 и H_4 лежат на една права, перпендикулярна на Гаусовата права EF .



Фигура 6

Като приложим току-що доказаното свойство 6 към центъра на вписаната окръжност на описания четириъгълник, който е перфектно изогонален сам на себе си, получаваме следното

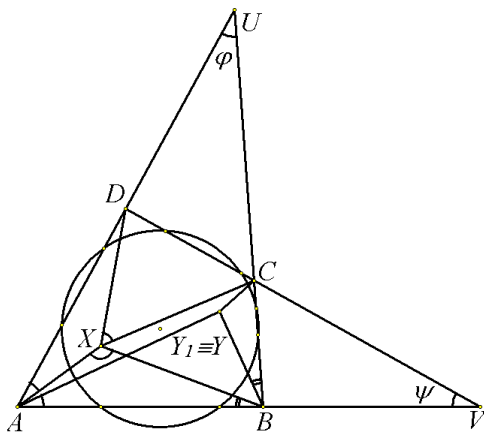
Следствие. Нека четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център O . Ортоцентровете на триъгълниците ABO , BCO , CDO и DAO лежат на една права, перпендикулярна на Гаусовата права (върху същата права лежи и пресечната точка на диагоналите AC и BD).

Сега ще разгледаме връзката между перфектната изогоналност и инверсната изогоналност на Микел (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017).

Свойство 7. Две перфектно изогонални точки X и Y спрямо изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са и инверсно изогонални.

Доказателство. Нека $AD \cap BC = U$, $AB \cap CD = V$, $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$ (фиг. 7). За определеност ще предполагаме, че точките X и Y са вътрешни за $ABCD$. Първо ще покажем, че за тях са изпълнени равенствата:

$$(4) \quad \sphericalangle AYB = \sphericalangle DXC + \varphi, \quad \sphericalangle AXD = \sphericalangle BYC + \psi.$$



Фигура 7

Щом точките X и Y са перфектно изогонални спрямо $ABCD$, те лежат на изогонални прави спрямо ъглите му DAB и ABC , откъдето имаме $\sphericalangle YAB = \sphericalangle XAD$ и $\sphericalangle YBA = \sphericalangle XBC$. Като използваме тези равенства, получаваме:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AYB &= 180^\circ - \sphericalangle YAB - \sphericalangle YBA = 180^\circ - \sphericalangle XAD - \sphericalangle XBC = \\ &= 180^\circ - (\sphericalangle BAD - \sphericalangle XAB) - (\sphericalangle ABC - \sphericalangle XBA) = \\ &= [180^\circ - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC)] + (\sphericalangle XAB + \sphericalangle XBA) = \\ &= \sphericalangle AUB + (180^\circ - \sphericalangle AXB)\end{aligned}$$

т.е.

$$(5) \quad \sphericalangle AYB = \varphi + (180^\circ - \sphericalangle AXB).$$

Понеже точката X има перфектно изогонална, то $\sphericalangle AXB + \sphericalangle DXC = 180^\circ$ (от свойство 5). Тогава от равенство (5) получаваме: $\sphericalangle AYB = \varphi + (180^\circ - \sphericalangle AXB) = \varphi + \sphericalangle DXC$, т.е. първото от равенства (4). Аналогично се доказва и второто.

Да означим с Y_1 инверсно изогоналната точка на X . Според едно от свойствата на инверсната изогоналност имаме:

$$(6) \quad \sphericalangle AY_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \quad \sphericalangle AXD = \sphericalangle BY_1C + \psi.$$

От равенства (4) и (6) следват равенствата $\sphericalangle AYB = \sphericalangle AY_1B$ и $\sphericalangle BYC = \sphericalangle BY_1C$. Можем да заключим, че точките Y и Y_1 лежат на дъга от окръжност с краища точките A и B и върху дъга от окръжност с кра-

ища точките B и C . Освен точката B двете дъги имат само още една обща точка, следователно инверсно изогоналната точка Y_1 на точката X съвпада с перфектно изогоналната ѝ точка Y .

Свойство 7*. Нека X и Y са две инверсно изогонални точки в изпъкнал четириъгълник $ABCD$. За да бъдат те перфектно изогонални, е необходимо и достатъчно да е изпълнено равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$.

Доказателство. Необходимостта на равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ следва непосредствено от свойство 5. Нека равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ е изпълнено. Тогава точката X има перфектно изогонална точка Y_1 и съгласно доказаното свойство 7 това е същата инверсно изогонална точка Y , т.е. точките X и Y са и перфектно изогонални.

Забележка 2. Горното свойство остава в сила и за точки X и Y , лежащи извън четириъгълника, като равенството $\sphericalangle AXD + \sphericalangle BXC = 180^\circ$ се заменя с условията $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD$ и $\sphericalangle AXD = \sphericalangle BXC$.

Ще се спрем на още едно интересно свойство на перфектно изогоналните точки в четириъгълника.

Свойство 8. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а X_1 и X_2 са две перфектно изогонални точки спрямо него. Центровете O_1 , O_2 , O_3 и O_4 съответно на описаните окръжности на триъгълниците ABX_1 , BCX_2 , CDX_1 и ADX_2 лежат на една окръжност.

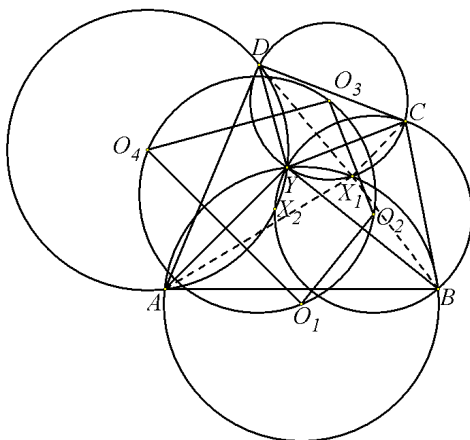
Доказателство. Ще разгледаме случая, когато точките X_1 и X_2 са вътрешни за четириъгълника. Случаят, когато те са външни, се разглежда аналогично. Описаните окръжности на триъгълниците ABX_1 , BCX_2 , CDX_1 и ADX_2 се пресичат в една точка Y (по теорема 4 от (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017)) (фиг. 8). Понеже точката X_1 има перфектно изогонална, то е изпълнено равенството $\sphericalangle AX_1B + \sphericalangle CX_1D = 180^\circ$ (от свойство 5). Същевременно имаме $\sphericalangle AYB = \sphericalangle AX_1B$ и $\sphericalangle CYD = \sphericalangle CX_1D$ (вписани ъгли). Следователно

$$(7) \quad \sphericalangle AYB + \sphericalangle CYD = 180^\circ.$$

От друга страна, е изпълнено $O_1O_4 \perp AY$ и $O_1O_2 \perp BY$. Тогава ъглите $\sphericalangle O_4O_1O_2$ и $\sphericalangle AYB$ са с перпендикулярни рамене и $\sphericalangle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \sphericalangle AYB$. Аналогично от $O_4O_3 \perp DY$ и $O_2O_3 \perp CY$ следва, че $\sphericalangle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \sphericalangle CYD$. Като вземем предвид равенство (7), получаваме:

$$\sphericalangle O_4O_1O_2 + \sphericalangle O_4O_3O_2 = (180^\circ - \sphericalangle AYB) + (180^\circ - \sphericalangle CYD) = 360^\circ - (\sphericalangle AYB + \sphericalangle CYD) = 180^\circ.$$

Така се убеждаваме, че точките O_1 , O_2 , O_3 и O_4 лежат на една окръжност.



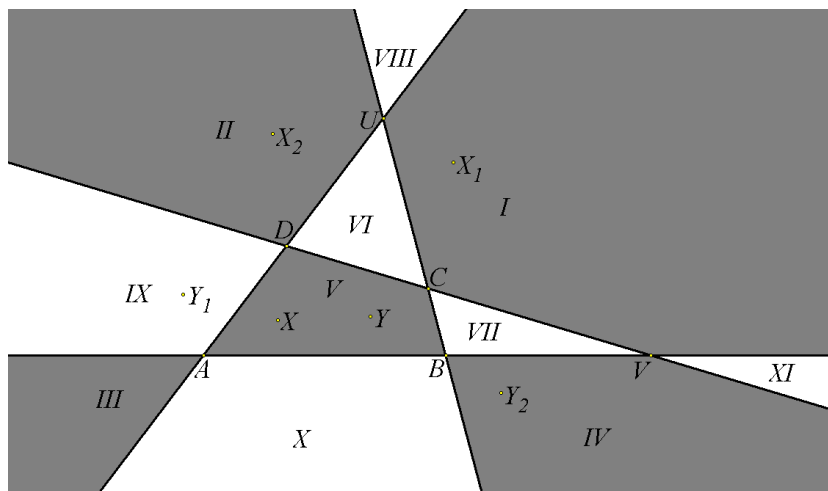
Фигура 8

Ще завършим със следната

Забележка 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, продълженията на страните му AD и BC се пресичат в точка U , тези на страните AB и DC – в точка V (върхът C лежи между точките D и V и между точките U и B) (фиг. 9). Означаваме $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$. Правите, на които лежат страните на четириъгълника $ABCD$, разделят равнината на 11 области, както е показано на фиг. 9.

Има основания да се смята, че е в сила следното твърдение: ако една точка в равнината на $ABCD$ има перфектно изогонална, то тя лежи в една от заштрихованите области I – V. По-точно, ако точката X_1 лежи в областта I и перфектно изогоналната ѝ точка Y_1 съществува, то тя лежи в областта III и са изпълнени равенствата $\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle CY_1D + \varphi$, $\sphericalangle BX_1C = \sphericalangle AY_1D + \psi$, $\sphericalangle CX_1D = \sphericalangle AY_1B + \varphi$ и $\sphericalangle DX_1A = \sphericalangle BY_1C + \psi$. Обратно, ако точката Y_1 лежи в областта III и има перфектно изогонална, то последната лежи в областта I и са изпълнени същите равенства. Ако точката X_2 е от областта II, то перфектно изогоналната ѝ точка Y_2 (ако последната съществува) лежи в областта IV и са изпълнени равенствата $\sphericalangle AX_2B = \sphericalangle CY_2D + \varphi$, $\sphericalangle BX_2C = \sphericalangle AY_2D - \psi$, $\sphericalangle CX_2D = \sphericalangle AY_2B + \varphi$ и $\sphericalangle DX_2A = \sphericalangle BY_2C - \psi$. Обратно, ако точката Y_2 е от областта IV, то перфектно изогоналната ѝ точка X_2 (ако последната съществува) лежи в областта II и са изпълнени същите равенства. Накрая, ако точката X лежи в областта V (т.е. вътре в четириъгълника), то перфектно изогоналната ѝ точка Y (ако последната съществува) лежи също в областта V и са изпълнени равенствата $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CYD + \varphi$, $\sphericalangle BXC = \sphericalangle AYD - \psi$, $\sphericalangle CXD = \sphericalangle AYB - \varphi$ и $\sphericalangle DXA = \sphericalangle BYC + \psi$.

Към това ще добавим, че една точка X от областта V има перфектно изогонална тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180^\circ$, а една точка X_1 от областите I – IV – тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата $\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle CX_1D$ и $\sphericalangle AX_1D = \sphericalangle BX_1C$.



Фигура 9

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Haimov, H. (1999). Gauss line in the quadrilateral, *Mathematics*, 1, 11 – 16.
 [Хаимов, Х. (1999). Гаусова права на четириъгълник, *Математика*, 1, 11 – 16.]
- Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, 5, 15 – 22. [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълника, *Математика*, 5, 15 – 22.]
- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 2, 28 – 50.
 [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 51.]
- Haimov, H. (2011). Lemoine point, *Mathematics*, 6, 4 – 13. [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 4 – 13.]
- Nenkov, V. (2010). The set of the centers of inscribed conics in a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 4, 24 – 30. [Ненков, В. (2010). Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика*, 4, 24 – 30.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). The pseudocenter and the orthocenter – notabler points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6,

- 614 – 625. [Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов. (2016). Псевдоцентърът и ортоцентърът – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 94. [Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов. (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 94.]
- Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261 – 270. [Стефанов, Ст. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270.]
- Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4thed.). Sofia: Publ. House “Iztok-Zapad”. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева, М. & С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект* (4-то изд.). София: Изток – Запад. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 стр.]
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.

PERFECT ISOGONALITY IN QUADRILATERAL

Abstract. It is considered a transformation in the plane of a quadrilateral, allowing to obtain generalizations of the well-known lines of Gauss and Gauss-Bodenmiller for the complete quadrilateral.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
45, Stoyan Balgarencheto St.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**
Technical University Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Mr. Haim Haimov, Researcher**
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria