

ПАРАМЕТРИ, ТАБЛИЦИ И ДИНАМИЧНИ ГРАФИКИ

Ваня Бизова-Лалева

Резюме. В статията се разглеждат параметрични неравенства, решенията на които се свеждат до решаване на квадратни неравенства. Задачите са решени алгебрично и геометрично. Използват се таблици за алгебричните решение и динамичната среда *GeoGebra* за геометричните.

Keywords: parameters, tables, dynamic software, *GeoGebra*.

В различни области от практиката широко се използват таблици с данни. Те са резултатно и често използвано дидактическо средство и в обучението. Записването на данни в таблици подпомага систематизирането на знания, дава възможност за удобни сравнения и важни изводи. Задачи за тълкуване на текст, който е свързан с информация в таблица или графика, се включват и в тестовете за оценяване на математическата грамотност на учениците в Програмата за международно оценяване на учениците (PISA).

Решението на параметрично уравнение или неравенство е удобно да се оформи във вид на таблица, когато то зависи от характеристиките на няколко условия, изразяващи се чрез параметъра. Съобразявайки се с условията, лесно се правят изводите за решението при всяка стойност на параметъра.

Използването на динамични графични конструкции в програмната среда *GeoGebra* за визуализиране и анализиране на решението или за изграждане на хипотеза за него е ефективно средство, което трудно може да бъде постигнато с чертежите върху хартия.

По-долу ще покажем удобството от използването на таблици при решаване на математически задачи с параметри, свеждащи се до квадратни неравенства. За проверка на отговора на алгебричното решение прилагаме графично решение в динамичната среда *GeoGebra*.

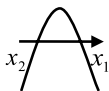
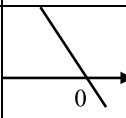
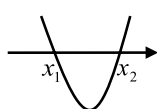
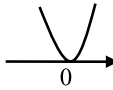
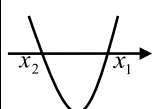
Да реализираме казаното дотук, чрез няколко задачи.

Задача 1. Да се реши неравенството $(\sqrt{2})^{ax^2} > \left(\sqrt{3-\sqrt{8}} + 1\right)^{(2-a)x}$.

Решение: Записваме показателното неравенство във вида $(\sqrt{2})^{ax^2} > (\sqrt{2})^{(2-a)x}$
 $(\sqrt{3-\sqrt{8}}+1 = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+1 = \sqrt{2}-1+1 = \sqrt{2})$, което е еквивалентно на неравенството $ax^2 - (2-a)x > 0$. При $a = 0$ неравенството е линейно и има решение $x < 0$.

При $a \neq 0$ квадратното неравенство има корени $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2-a}{a}$, като $x_1 < x_2$ при $a \in (0;2)$ и $x_2 < x_1$ при $a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Решението на неравенството зависи от знака на старшия коефициент, разположението на корените и знака на неравенството. Да запишем тези условия в таблица, като скицираме и графиката на квадратната функция.

Условия	$a \in (-\infty;0)$	$a = 0$	$a \in (0;2)$	$a = 2$	$a \in (2;+\infty)$
Знакът на старшия коефициент	-----	0	++++++	++++++ +	++++++
Знакът на дискриминантата	+++++		++++++	0	++++++
Разположение на корените	$x_2 < x_1$	$x = 0$	$x_1 < x_2$	$x_1 = x_2 = 0$	$x_2 < x_1$
Графика на функцията $f(x) = ax^2 - (2-a)x$					
Решение на неравенството $ax^2 - (2-a)x > 0$	$x \in (x_2; x_1)$	$x < 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$\forall x \neq 0$	$x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$

Отговор: При $a < 0, x \in \left(\frac{2-a}{a}; 0\right)$;
 при $a = 0, x < 0$;
 при $a \in (0;2), x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2-a}{a}; +\infty\right)$;
 при $a = 2, x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
 при $a > 2, x \in \left(-\infty; \frac{2-a}{a}\right) \cup (0; +\infty)$.

Задача 2. Да се реши неравенството

$$\frac{-\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a)}{2} \leq \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{27})^{-6}$$

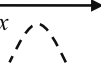
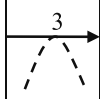
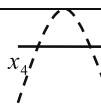
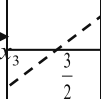
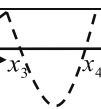
Решение: След преминаване към основа $\frac{1}{3}$ логаритмичното неравенство е еквивалентно на системата $\begin{cases} a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a > 0 \\ a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a \geq 9 \end{cases}$, а тя на неравенството $a(a+3)x^2 + 2(a+3)x - 3a - 9 \geq 0$.

При $a = 0$, $x \geq \frac{3}{2}$.

При $a = -3$ се получава неравенството $0 \cdot x \geq 0$ с решение всяко $x \in R$.

При $a \neq 0$, $a \neq -3$ квадратното неравенство $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 \geq 0$ има дискриминанта $D = (1+3a)(a+3)^2$, която е неотрицателна при $a \geq -\frac{1}{3}$ и има реални корени $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+3a}}{a}$ и $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+3a}}{a}$, като $x_1 < x_2$ за всяко $a > 0$, $x_2 < x_1$ при $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ и $x_1 = x_2$ при $a = -\frac{1}{3}$.

Записваме резултатите в таблицата, където $g(x) = a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9$.

Условия	$a \in (-\infty; -3)$	$a = -3$	$a \in \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$	$a = -\frac{1}{3}$	$a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$	$a = 0$	$a \in (0; +\infty)$
Знакът на старшия коефициент	+++	0	-----	----	-----	0	++++++
Знакът на дискриминантата	-----	----	-----	0	+++++		++++++
Разположението на корените	няма реални корени	няма реални корени	няма реални корени	$x_3 = 3$ $x_4 = 3$	$x_4 < x_3$	$x = \frac{3}{2}$	$x_3 < x_4$
Графиката на функцията $g(x)$							
Решение на неравенството $g(x) \geq 0$	$\forall x \in R$ е решение	$\forall x \in R$ е решение	няма решение	$x = 3$	$x \in [x_4; x_3]$	$x \geq \frac{3}{2}$	$x \in (-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)$

Отговор: При $a \leq -3$, всяко $x \in R$ е решение;

При $a \in \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$ няма решение;

При $a = -\frac{1}{3}, x = 3$;

При $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right), x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{1+3a}}{a}; \frac{-1 - \sqrt{1+3a}}{a}\right]$;

При $a = 0, x \geq \frac{3}{2}$;

При $a > 0, x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1+3a}}{a}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{1+3a}}{a}; \infty\right)$.

Задача 3. Да се реши неравенството

$$\log_{\sqrt{\pi}}((a^2 + 4a)x^2 + (3a + 4)x - 3a - 9) \geq \log_{\sqrt{\pi}}(ax^2 - (2 - a)x)$$

където a е реален параметър.

Решение: Логаритмичното неравенство, при основа $\sqrt{\pi} > 1$, е еквивалентно

$$\text{на системата} \begin{cases} ax^2 - (2 - a)x > 0 \\ (a^2 + 4a)x^2 + (3a + 4)x - 3a - 9 > 0 \\ (a^2 + 4a)x^2 + (3a + 4)x - 3a - 9 \geq ax^2 - (2 - a)x \end{cases}, \text{ а тя на системата}$$

$$\begin{cases} ax^2 - (2 - a)x > 0 \\ a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 \geq 0 \end{cases}$$

Неравенствата в последната система са решените неравенства в задача 1 и задача

2. Означаваме с x_1 и x_2 корените на първото неравенство, а с x_3 и x_4 - корените на второто, където

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2 - a}{a}, x_3 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3a}}{a}, x_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3a}}{a}.$$

Сечението на интервалите за параметъра a от задача 1 и задача 2 разделят числовата ос на нови интервали, в които ще разглеждаме решението на системата от неравенства.

При $a \leq -3$ решенията на системата са $x \in \left(\frac{2-a}{a}; 0\right)$, които са решенията на

първото неравенство, тъй като второто е изпълнено за всяко $x \in R$.

При $a \in \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$ системата няма решение, защото второто неравенство няма решение.

При $a \geq -\frac{1}{3}$ съществуват корените x_1, x_2, x_3, x_4 .

Да определим разположението им в зависимост от стойностите на параметъра a .

От задача 1 е известно, че при $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, $x_2 < x_1 = 0$, а при $a \in (0; 2)$, $x_1 < x_2$, а от задача 2, че при $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, $0 < x_4 < x_3$, а при $a > 0$, $x_3 < 0 < x_4$.

При $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ за корените на неравенствата е изпълнено $x_2 < x_1 < x_4 < x_3$.

Решенията на неравенствата са между съответните корени, следователно системата няма решение.

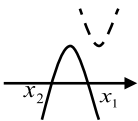
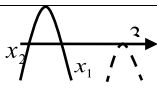
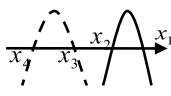
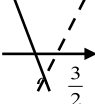
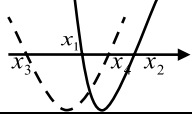
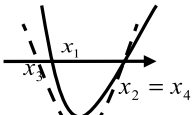
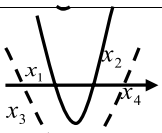
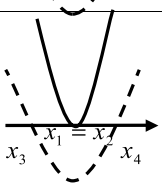
При $a \in (0; 2)$ знаците на корените са: $x_3 < 0$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$, $x_4 > 0$. Достатъчно е да сравним корените x_2 и x_4 . Неравенството $x_2 < x_4$, т.е. $\frac{2-a}{a} < \frac{-1+\sqrt{1+3a}}{a}$ има решение $a \in (1; +\infty)$.

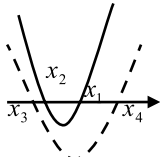
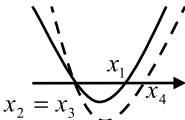
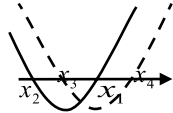
При $a \in (0; 1)$ подреждането на корените е $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$, а при $a \in (1; 2)$, $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$.

В интервала $a \in (0; 1)$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$, $x_1 = 0$, $x_4 > 0$. Необходимо е да сравним корените x_2 и x_3 . Неравенството $x_3 < x_2$, т.е. $\frac{-1-\sqrt{1+3a}}{a} < \frac{2-a}{a}$ има решение $a \in (2; 8)$. Тогава $x_2 < x_3$ при $a \in (8; +\infty)$.

При $a \in (2; 8)$ подреждането на корените е $x_3 < x_2 < x_1 < x_4$, а при $a \in (8; +\infty)$, $x_2 < x_3 < x_1 < x_4$.

Съставяме таблица, в която скицираме графиките на двете функции в зависимост от стойностите на параметъра и направените дотук изводи за разположението на корените. Търсим тези стойности на x , за които графиките и на двете функции са разположени над оста Ox .

Условия	Графики на функциите $f(x)$ и $g(x)$	Решение на системата
$a \in (-\infty; -3)$		$x \in (x_2; x_1)$
$a = -3$		$x \in (x_2; x_1)$
$a \in \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$		Няма решение
$a = -\frac{1}{3}$		Няма решение
$a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$		Няма решение
$a = 0$		Няма решение
$a \in (0; 1)$		$x \in (-\infty; x_3] \cup (x_2; +\infty)$
$a = 1$		$x \in (-\infty; x_3] \cup (x_2; +\infty)$
$a \in (1; 2)$		$x \in (-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)$
$a = 2$		$x \in (-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)$

$a \in (2;8)$		$x \in (-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)$
$a = 8$		$x \in (-\infty; x_2) \cup [x_4; +\infty)$
$a \in (8; +\infty)$		$x \in (-\infty; x_2) \cup [x_4; +\infty)$

Отговор: При $a \leq -3$, $x \in \left(\frac{2-a}{a}; 0\right)$;

При $a \in (-3; 0]$ няма решение;

При $a \in (0; 1]$, $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1+3a}}{a}\right] \cup \left(\frac{2-a}{a}; +\infty\right)$;

При $a \in (1; 8)$, $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1+3a}}{a}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{1+3a}}{a}; \infty\right)$;

При $a \in [8; +\infty)$, $x \in \left(-\infty; \frac{2-a}{a}\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{1+3a}}{a}; +\infty\right)$.

Да проверим получените чрез доста логически разсъждения и пресмятане резултати, като решим задачата и графично. За построяване на графиките на функциите $f(x) = x^2 - (2-a)x$ и $g(x) = a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9$ използваме динамичната среда *GeoGebra*.



Чрез плъзгача  въвеждаме стойности на параметъра $a \in (-10; 10)$. От отговора се вижда, че избраните стойности на параметъра са достатъчни, за да се получат всички различни взаимни положения на графиките и оста Ox .

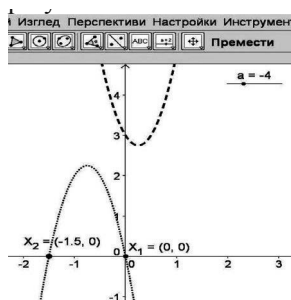
Чрез инструмента **Въведи:** въвеждаме функциите $f(x) = ax^2 - (2-a)x$ и

$g(x) = a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9$. На фигурите 1–13 плътната крива е графиката на $f(x)$, а пунктираната – на $g(x)$. Чрез инструмента  построяваме пресечните точки на графиките на функциите с оста Ox .

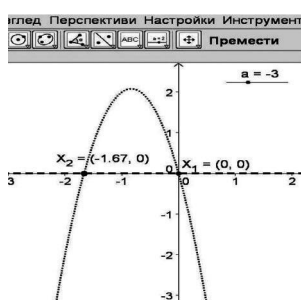
Чрез плъзгача  избираме произволни стойности на параметъра от всеки от получените в отговора интервали.

В следващите фигури 1–13 илюстрираме разположението на двете графики при избраните стойности на параметъра. Сравняваме разположението на корените получено в таблицата и на чертежа. Търсим тези стойности на x , за които графиките на двете функции едновременно са разположени над оста Ox .

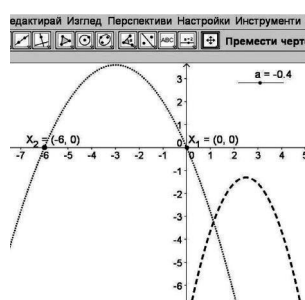
Заместваме с избраната стойност на параметъра в отговора и сравняваме двата резултата.



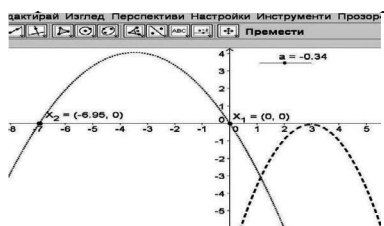
фиг.1



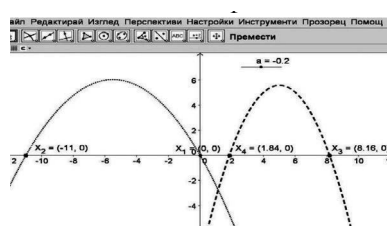
фиг.2



фиг.3



фиг.4



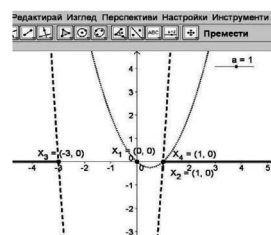
фиг.5



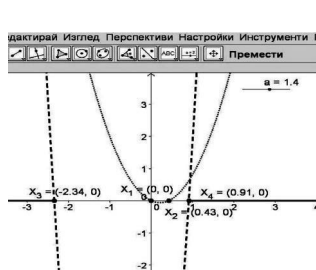
фиг.6



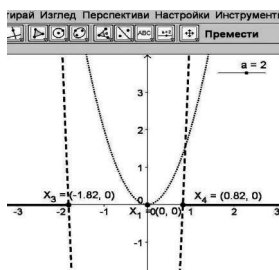
фиг.7



фиг.8



фиг.9



фиг.10



фиг.11



фиг.12



фиг.13

Същите резултати се получават и при алгебричното решение.

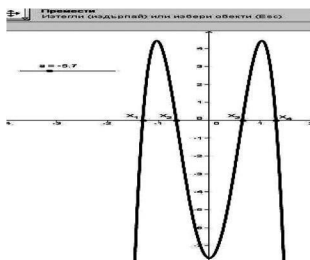
Задача 4. Да се определи броят на реалните корените на уравнението $(a-5)x^4 - 4ax^2 + a-2 = 0$ за всяка стойност на параметъра.

Решение: Без учениците да познават графиката на биквадратната функция, но знаейки, че броят на корените на уравнението е равен на броя на пресечните точки на графиката на функцията и оста Ox , отново могат да използват динамичната среда *GeoGebra*, за да съставят хипотеза за решението на задачата.

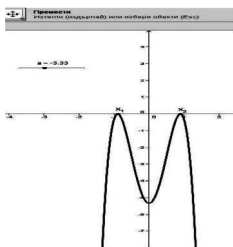
Разглеждаме графичното решение.

Чрез плъзгача  задаваме стойности на параметъра $a \in (-15; 15)$, ако не са достатъчни за описване на всички взаимни положения на графиката и оста Ox , интервалът се увеличава.

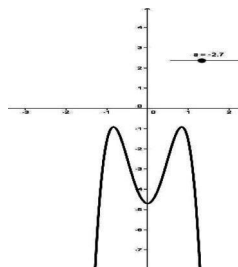
Въвеждаме функцията $f(x) = (a-5)x^4 - 4ax^2 + a-2$. На фигурите 14–19 са представени всички различни взаимни положения на графиката на функцията $f(x)$ и оста Ox .



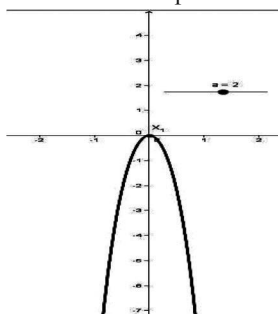
фиг.14



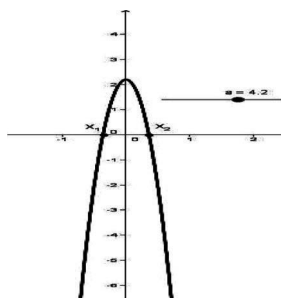
фиг.15



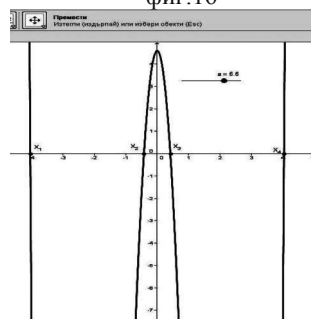
фиг.16



фиг.17



фиг.18



фиг.19

При стойности на параметъра $a \in (-\infty; -3,3)$ графиката на функцията пресича четири пъти оста Ox , т.е. уравнението има четири решения. (фиг. 14).

При $a = -3,3$ пресечните точки са две. (фиг. 15)

При $a \in (-3,3; 2)$ графиката не пресича оста Ox (фиг. 16).

При $a = 2$ пресечната точка е една, т.е. решението е едно. (фиг. 17)

При $a \in (2; 5]$ графиката отново пресича оста Ox в две точки (фиг. 18).

В интервала $a \in (5; +\infty)$ броят на пресечните точки е четири (фиг. 19).

Сега да решим задачата алгебрично.

При $a = 5$ се получава квадратното уравнение $-20x^2 + 3 = 0$, което има два реални корена.

Броят на корените на биквадратно уравнение зависи от броя и знаците на корените на квадратното уравнение, до което се свежда, а техните знаци – от знаците на дискриминантата, сбора и произведението на корените.

При $a \neq 5$ след полагането $x^2 = u$ биквадратното уравнение се свежда до квадратното уравнение $(a-5)u^2 - 4au + a-2 = 0$. Дискриминантата $D = 3a^2 + 7a - 10$

се анулира при $a = -\frac{10}{3}$ и $a = 1$, $D > 0$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (5; +\infty)$ и $D < 0$ при $a \in \left(-\frac{10}{3}; 5\right)$.

От формулите на Виет следва $u_1 + u_2 = \frac{4a}{a-5}$, $u_1 \cdot u_2 = \frac{a-2}{a-5}$. След решаване на неравенствата $u_1 + u_2 > 0$ и $u_1 \cdot u_2 > 0$ попълваме таблицата за знаците на дискриминантата, сбора и произведението от корените.

Във всеки от така получените интервали за параметъра лесно се прави извод за броя и знаците на корените на квадратното уравнение, а след това и за броя на корените на биквадратното уравнение.

Условия	Знак на $D = k^2 - ac$	$u_1 + u_2$	$u_1 \cdot u_2$	Знаци на корените на кв. у-ние	Брой на корените на бикв. у-ние
$a \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right)$	+	+	+	Два положителни	4 корена
$a = -\frac{10}{3}$	0	+	+	Един положителен	2 корена
$a \in \left(-\frac{10}{3}; 0\right)$	-	+	+	Няма корени	Няма корени
$a = 0$	-	0	+	Няма корени	Няма корени
$a \in (0; 1)$	-	-	+	Няма корени	Няма корени
$a = 1$	0	-	+	Един отрицателен	Няма корени
$a \in (1; 2)$	+	-	+	Два отрицателни	Няма корени
$a = 2$	+	-	0	Един отрицателен и един нула	1 корен
$a \in (2; 5)$	+	-	-	Един отрицателен и един положителен	2 корена
$a = 5$	+	0	0	Един положителен	2 корена
$a \in (5; +\infty)$	+	+	+	Два положителни	4 корена

Отговор: При $a \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (5; +\infty)$ уравнението има 4 корена;

при $a = -\frac{10}{3} \cup a \in (2; 5]$ уравнението има 2 корена;

при $a = 2$ уравнението има 1 корен;

при $a \in \left(-\frac{10}{3}; 2\right)$ уравнението няма реални корени.

Алгебричното решение на задачата потвърждава графичното.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 1. Да се определи броят на реалните корените на уравнението $a(a+3)x^4 + (2a+6)x^2 - 3a - 9 = 0$ за всяка стойност на параметъра.

Отговор: При $a \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$ – няма реални корени;

При $a = -3$ – безброй много решения;

При $a = -\frac{1}{3} \cup [0; +\infty)$ – 2 корена;

При $a \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ – 4 корена.

Задача 2. Да се реши неравенството $\frac{2x+1}{(a-1)x} - \frac{3}{x} > \frac{a+5}{a-1}$.

Отговор: При $a \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$, $x \in \left(\frac{4-3a}{a+3}; 0\right)$;

При $a = -3$, $x \in (-\infty; 0)$;

При $a \in (-3; 1)$, $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4-3a}{a+3}; +\infty\right)$;

При $a = 1$ неравенството не съществува;

При $a \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$, $x \in \left(0; \frac{4-3a}{a+3}\right)$;

При $a = \frac{4}{3}$ няма решение.

ЛИТЕРАТУРА

Горнщейн, П. И., Полонский, В. Б. & Якир, М. С. (1996). *Задачи с параметри*.
София: АИ “Проф. М. Дринов”.

✉ **Ваня Бизова-Лалева**

Национална търговска гимназия

бул. „Шести септември” 226

Пловдив

E-mail: v_laleva@abv.bg

PARAMETERS, TABLES AND DYNAMIC CHARTS

Abstract. Some parametric inequalities are considered in the paper whose solutions are reduced to quadratic ones. The problems are solved algebraically and geometrically. Tables are used for the algebraic solutions and the dynamical environment *GeoGebra* for the geometric ones.

✉ **Vania Bizova-Laleva**

National High School of Commerce

226, av. 6th September

Plovdiv

E-mail: v_laleva@abv.bg