

## ОТНОСНО ПОЛИНОМИТЕ С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ЕДИН КЛАС ИЗПЪКНАЛИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

<sup>1)</sup> Сава Гроздев, <sup>2)</sup> Веселин Ненков

<sup>1)</sup> Висше училище по застраховане и финанси – София

<sup>2)</sup> ВВМУ „Никола Вапцаров“ – Варна

**Резюме.** Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми на комплексна променлива с кратни корени във върховете на изпъкнал четириъгълник и корените на съответните им производни. Накрая, като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

**Ключови думи:** полином; производна на полином; корени на полином; изпъкнал четириъгълник; елипса; фокус

В (Grozdev & Nenkov, 2019) е описана една геометрична връзка между полиномите, корените на които се намират във върховете на успоредник, и корените на съответните им производни. Тази геометрична връзка съдържа фокусите на подходяща елипса, вписана в разглеждания успоредник. От друга страна, във всеки изпъкнал четириъгълник могат да се впишат безкраен брой елипси. Така възниква въпросът за съществуване на връзка между някои от тези елипси и производните на полиномите, които имат корени само във върховете на даден четириъгълник. Целта на този материал изложение е да се покаже как изглежда една такава връзка между някои полиноми с корени във върховете на изпъкнал четириъгълник, съответните им производни и подходящо подбрани елипси, вписани в разглеждания четириъгълник.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на разглежданата тема, ще отбележим две помощни твърдения.

**Лема 1.** *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.*

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 a). От лема 1 следва, че от всички полиноми, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, е достатъчно да се изследва само някой нормиран полином, за да се определи геометрията на класа, определен от производните на полиномите от разглеждания клас.

**Лема 2.** Ако  $a_1, a_2, \dots, a_s$  са корени на полином  $P(z)$  от  $n$ -та степен, така че  $a_j$  е  $k_j$  ( $j=1,2,\dots,s$ ) кратен корен на  $P(z)$  и  $k_1+k_2+\dots+k_s=n$ , то коефициентът пред първата степен на променливата  $z$  е равен на

$$a_1^{k_1-1} a_2^{k_2-1} \dots a_s^{k_s-1} (k_1 a_2 a_3 \dots a_s + k_2 a_3 \dots a_s a_1 + \dots + k_s a_1 a_2 \dots a_{s-1}).$$

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 b).

Основният резултат, който ще докажем, се съдържа в следващата теорема.

**Теорема.** Нека  $k_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) са естествени числа и  $k$  е елипса, вписана в изпъкналият четириъгълник  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , така че за допирните точки  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  на  $k$  съответно с отсечките  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4$  и  $A_4 A_1$  са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad \overline{A_1 P_1} : \overline{A_2 P_1} = -k_1 : k_2, \quad \overline{A_2 P_2} : \overline{A_3 P_2} = -k_2 : k_3, \quad \overline{A_3 P_3} : \overline{A_4 P_3} = -k_3 : k_4, \quad \overline{A_4 P_4} : \overline{A_1 P_4} = -k_4 : k_1.$$

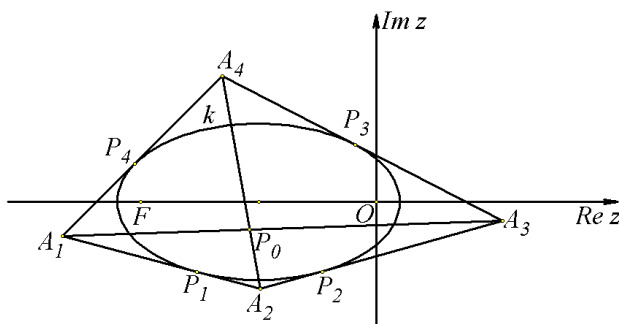
Ако един полином  $P(z)$  от степен  $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$  на комплексна променлива с комплексни коефициенти има  $k_j$  кратен корен във върха  $A_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) на  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , то производната на  $P(z)$  има корени в точката  $P_0 = A_1 A_3 \cap A_2 A_4$  и във фокусите на елипсата  $k$ .

Нека елипсата  $k$  има за фокус точката  $O$ , фокален параметър  $p$  и числен ексцентрицитет  $e$ . Спрямо Гаусовата координатна система  $K_0$  от фиг. 1, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите  $p_j$  и  $a_j$  на точките  $P_j$  и  $A_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) се изразяват съответно с формулите

$$(2) \quad p_1 = \frac{2p}{et_1^2 + 2t_1 + e}, \quad p_2 = \frac{2p}{et_2^2 + 2t_2 + e}, \quad p_3 = \frac{2p}{et_3^2 + 2t_3 + e}, \quad p_4 = \frac{2p}{et_4^2 + 2t_4 + e}.$$

$$(3) \quad a_1 = \frac{2p}{et_4 t_1 + t_4 + t_1 + e}, \quad a_2 = \frac{2p}{et_1 t_2 + t_1 + t_2 + e}, \quad a_3 = \frac{2p}{et_2 t_3 + t_2 + t_3 + e}, \quad a_4 = \frac{2p}{et_3 t_4 + t_3 + t_4 + e},$$

където  $|t_1| = |t_2| = |t_3| = |t_4| = 1$ .



Фигура 1

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (1). Тъй като простото отношение на произволни три точки  $A_k$ ,  $A_l$  и  $P_j$  от една права се изразява с равенството  $\frac{\overline{A_k P_j}}{\overline{A_l P_j}} = \frac{a_k - p_j}{a_l - p_j}$ , от (2) и (3) след не сложни пресмятания се получават равенствата

$$(4) \quad \frac{\overline{A_1 P_1}}{\overline{A_2 P_1}} = \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{\overline{A_2 P_2}}{\overline{A_3 P_2}} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_2} \cdot \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{\overline{A_3 P_3}}{\overline{A_4 P_3}} = \frac{t_2 - t_3}{t_4 - t_3} \cdot \frac{a_3}{a_4}, \quad \frac{\overline{A_4 P_4}}{\overline{A_1 P_4}} = \frac{t_3 - t_4}{t_1 - t_4} \cdot \frac{a_4}{a_1}.$$

От равенствата (4) получаваме

$$(5) \quad a_2 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot a_1, \quad a_3 = -\frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot a_1, \quad a_4 = -\frac{k_4}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_3} \cdot a_1.$$

От равенствата (5) следва

$$(6) \quad k_1 a_2 a_3 a_4 + k_2 a_3 a_4 a_1 + k_3 a_4 a_1 a_2 + k_4 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином  $P_0(z)$  от степен  $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$  на комплексна променлива с комплексни коефициенти, който има  $k_j$  кратен корен във върха  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) на  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . От лема 2 и равенството (6) следва, че коефициентът пред  $z$  има стойност, равна на 0. Затова производната  $P'_0(z)$  има корен  $z = 0$ . Това всъщност на геометричен език означава, че  $P'_0(z)$  има корен във фокуса  $O$  на елипсата  $k$ . Следователно според лема 1 и бележката към нея се получава, че производната  $P'(z)$  на произволен полином  $P(z)$  със свойствата на  $P_0(z)$  има корен в точката  $O$ .

Аналогично, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус  $F$  на  $k$ , получаваме, че  $P'(z)$  има корен и в точката  $F$ . По този начин доказахме частта от теоремата, отнасяща се до елипсата  $k$ .

Остава да докажем теоремата за точката  $P_0$ . Нека нормираният полином  $P_0(z)$  се представя във вида:

$$P(z) = (z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} (z - a_3)^{k_3} (z - a_4)^{k_4}.$$

Тогава за неговата производна имаме

$$P'(z) = (z - a_1)^{k_1-1} (z - a_2)^{k_2-1} (z - a_3)^{k_3-1} (z - a_4)^{k_4-1} U(z),$$

където

$$(7) \quad U(z) = k_1 (z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) + k_2 (z - a_3)(z - a_4)(z - a_1) + k_3 (z - a_4)(z - a_1)(z - a_2) + k_4 (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3).$$

Тъй като  $\overline{A_3 P_0} : \overline{A_1 P_0} = -k_3 : k_1$  и  $\overline{A_4 P_0} : \overline{A_2 P_0} = -k_4 : k_2$ , то  $\overline{OP_0} = \frac{k_3 \overrightarrow{OA_1} + k_1 \overrightarrow{OA_3}}{k_3 + k_1}$  и  $\overline{OP_0} = \frac{k_4 \overrightarrow{OA_2} + k_2 \overrightarrow{OA_4}}{k_4 + k_2}$ . Като използваме (5) за афикса на  $p_0$  получаваме следващите две равенства:

$$(8) \quad p_0 = \frac{k_3(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{(t_3 - t_2)(k_3 + k_1)} a_1, \quad p_0 = \frac{k_2 k_4(t_4 - t_1)(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{k_1(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)(k_2 + k_4)} a_1.$$

Като приравним стойностите на  $p_0$  от (8), получаваме зависимостта

$$(9) \quad \begin{aligned} & (k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_1 + k_4 k_1 k_2)(t_3 t_1 + t_4 t_2) = \\ & = k_3 k_1(k_4 + k_2)(t_2 t_3 + t_4 t_1) + k_4 k_2(k_3 + k_1)(t_1 t_2 + t_3 t_4). \end{aligned}$$

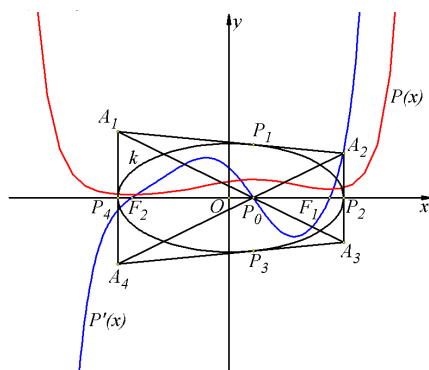
От (7) и (8) имаме

$$\begin{aligned} U(p_0) &= \frac{k_3 \left[ k_1(t_2 - t_3) - k_3(t_4 - t_1) \right]^2 (t_1 - t_2 + t_3 - t_4) a_1^3}{k_1^2 (k_3 + k_1)^3 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)^3 (t_3 - t_4)} \times \\ & \times \left[ (k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_1 + k_4 k_1 k_2)(t_3 t_1 + t_4 t_2) - \right. \\ & \left. - k_3 k_1(k_4 + k_2)(t_2 t_3 + t_4 t_1) + k_4 k_2(k_3 + k_1)(t_1 t_2 + t_3 t_4) \right]. \end{aligned}$$

Оттук и равенството (9) следва, че  $U(p_0) = 0$ , което означава, че  $p_0$  е корен на  $P'_0(z)$ . С това е доказано твърдението на теоремата и за пресечната точка на диагоналите на  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

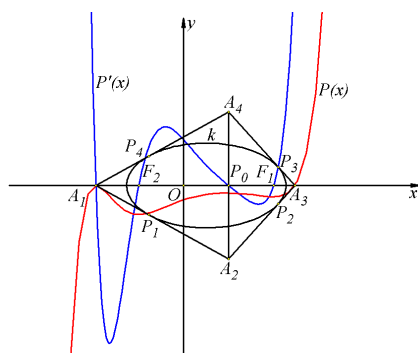
Полиномът  $P'(z)$  има  $k_j - 1$  кратен корен във върха  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) (Genov, Mihovski & Mollov, 1991), а останалите три корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на  $P'(z)$ .

Доказаната теорема е обобщение на съответния резултат за успоредници, описан в (Grozdev & Nenkov, 2019).



Фигура 2

Ако  $P(z) = P(x)$  е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема. На фиг. 2 е представен полином  $P(x)$  с корени във върховете на трапец, симетричен относно абсцисната ос. Той има трикратни комплексно спрегнати корени в точките  $A_1$  и  $A_4$  и двукратни комплексно спрегнати корени в точките  $A_2$  и  $A_3$ . На фиг. 3 е представен полином  $P(x)$  с корени във върховете на делтоид, симетричен относно абсцисната ос. Той има двукратен реален корен в точката  $A_1$ , прост реален корен в точката  $A_3$  и трикратни комплексно спрегнати корени в точките  $A_2$  и  $A_4$ .



Фигура 3

## ЛИТЕРАТУРА

- Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник, *Математика и информатика*, 5, 54 – 59
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 а). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник, *Математика и информатика*, 3, 283 – 293.

- Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 b). Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник, *Математика и информатика*, 4, 352 – 359.
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2019). Полиноми с кратни корени във върховете на правоъгълник, *Математика и информатика*, 4, 2019, 435 – 443.

## REFERENCES

- Nenkov, V. (1998). Conic sections, inscribed in a triangle, *Mathematics and informatics*, 5, 54 – 59.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 a). Polynomials of fourth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 3, 283 – 293.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 b). Polynomials with multiple roots in the vertices of a triangle, *Mathematics and informatics*, 4, 352 – 359.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2019). Polynomials with multiple roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 4, 435 – 443.

## ON THE POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THE VERTICES OF A CLASS OF CONVEX QUADRILATERALS

**Abstract.** A geometrical relation is derived for the roots of polynomials of complex variable with multiple roots in the vertices of a convex quadrilateral and the roots of the corresponding derivatives. As an application some polynomials of real variable and with real coefficients are considered.

**Keywords:** polynomial; derivative a polynomial; polynomial roots; convex quadrilateral; ellipse; focus

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

Researcher ID: AAG-4146-2020

ORCID 0000-0002-1748-7324

University of Finance, Business Entrepreneurship  
1, Gusla St.

1618 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Prof. Dr. Veselin Nenkov**

Researcher ID: AAB-5776-2019

Department of Mathematics and Physics

Faculty of Engineering

Nikola Vaptsarov Naval Academy

73, Vasil Drumev St.

Varna, Bulgaria

E-mail: v.nenkov@nvna.eu

E-mail: vnenkov@mail.bg