

ОТНОСНО НЯКОИ ИЗХОДНИ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИ КОНСТРУИРАНЕТО НА ЕДНА ЕВРИСТИЧНО ОРИЕНТИРАНА СИСТЕМА ОТ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Нина Иванова

Резюме. Защо трябва да насърчаваме учениците да разгръщат своя евристичен и творчески потенциал? Кога и как да развиваме уменията им да прилагат прийома на допълнителните построения в качеството му на специална евристика? Кои са изходните положения, свързани с изграждането на дидактически целесъобразна система от задачи, обслужваща овладяването на този прием? В статията са представени и подкрепени с примери възгледите на автора относно поставените и други, тясно свързани с тях въпроси. Предложени са основания за систематизиране на действията, които обикновено наричаме допълнителни построения.

Keywords: heuristics, heuristic problem, additional construction, auxiliary elements

Защо да обучаваме учениците да прилагат евристични схеми на разсъждение?

В научната литература терминът *евристика* покрива широк диапазон от понятия, обединени от неразривната им връзка с творческия процес. В най-общ план, евристиката е наука, изследваща човешките способности за откривателство, за решаване на поставен проблем по оригинален начин въз основа на проявени комбинативност, съобразителност, интуиция и др. по отношение на по-рано усвоени знания и умения и търсеща подходи, методи и прийоми за усъвършенстването им. *Евристики* се наричат и самите методи, които се прилагат при изследването на нестандартни проблемни ситуации с цел тяхното разрешаване.

Евристичната¹ дейност в учебно-познавателния процес по математика е насочена към решаването на т. нар. *евристични задачи*. В дидактически план, общоприето е евристични да се наричат тези задачи, които съответстват на изследователското равнище² от учебно-познавателната дейност на учениците. За целите на настоящата статия ще се придържаме към по-конкретизираното становище, че евристична задача е тази, „която предполага самостоятелно формулиране на начин за намиране на решение, в процеса на което ученикът попада в ситуация на проявяване на своите евристични позиции“ (Скафа&Милушев, 2009), стр. 8.

Изучаването на училищния курс по геометрия предоставя богати възможности за изява и усъвършенстване на евристичното мислене на учениците. Достатъчно е да споменем класа задачи, чието решаване предполага наличието на умение към дадените в условието на задачата фигури да се добавят и нови фигури, подпомагащи прилагането на определено геометрично твърдение (определение, аксиома, теорема). Въвеждането на спомагателен елемент, както го нарича Д. Пойа (Пойа, 1959: 71), днес се окачествява като *специална базова евристика* за решаване на евристични задачи (Скафа&Милушев, 2009: 103).

Откриването на необходимостта от построяване на спомагателни фигури, както и избор на подходящи такива в конкретна задачна ситуация, е сложно умение, основаващо се предимно на прилагането на евристични схеми на разсъждение. Овладеяването на *прийома на допълнителните построения* е продължителен процес, обхващащ почти целия курс на обучение по математика в средното училище. Поради недостиг на знания за метрични, тригонометрични и други зависимости между елементите на геометричните фигури, основният обем задачи, чието решение е достъпно за учениците единствено след построяване на непосредствена в условието фигура, се концентрира в началото на систематичния курс по геометрия (7. – 8. клас). Тази благоприятна възможност за илюстриране на разглеждания прием обаче се появява почти паралелно с началния етап от осъзнаването на дедуктивната структура на Евклидовата геометрия, усвояването на несвойствено дотогава количество геометрични понятия и твърдения, изграждането на умения за прилагане на тези понятия и твърдения, особено при осъществяване на логически правилни доказателства. Струпването на описаната нова и различна по същество образователна информация естествено стъписва подрастващите.

Какво тогава поражда необходимостта от разглеждането на задачи, изискващи прилагането на допълнителни построения в училищния курс? Тяхната евристичност. Необходимостта от изграждане на умения за решаване на евристични задачи е очевидна от гледна точка на науката и практиката. Дори без реализиране на съществен краен резултат (несериозно е да се очаква всички обучавани да умеят да прилагат прийома на допълнителните построения или който и да било друг прием или метод, изискващ евристичен подход), самият процес на тяхното формиране е насочен пряко към постигане на основни развиващи цели на обучението: усъвършенстване на логическото и творческото мислене и на въображението, изграждане на умения за прилагане (поотделно и в единство) на рационални и евристични схеми на разсъждение и много други. „Именно приемът на допълнителните построения играе значителна роля при формирането на евристични прийоми на дейност и развитието на изследователските умения“ (Скафа&Милушев, 2009: 96).

Напредвайки в училищния курс по геометрия, учениците добиват все повече

знания и опит, насочващи към аналитични решения. Постепенно се алгоритмизира решаването на задачи, които доскоро са се оказвали евристични. Но умението на решаващия да прилага балансирано аналитични и геометрични методи, да избира основателно по-удачния подход, значително увеличава шансовете му за успех, тъй като предимствата на едните или другите изпъкват в хода на търсене на решение на конкретната задача. Това, от своя страна, е още един аргумент в полза на необходимостта от поддържане на уменията за прилагане на свойствата и признаците на геометричните обекти в по-късните етапи на обучение.

Описаните съображения предполагат, че умението да се решават задачи с геометрични методи и прийоми, включително и чрез прилагане на допълнителни построения, трябва да се изгражда постепенно, да се развива и поддържа през целия курс на училищното обучение посредством нарочно конструиран дидактически инструментариум.

Кога да ориентираме учебно-познавателната дейност на учениците към овладяване на прийома на допълнителните построения?

При съпоставяне на съдържанието на актуалните учебни програми с очаквания резултат от обучението в разглежданата насока и възрастовите особености се очертават *три основни етапа* по отношение на възможностите на учениците да прилагат прийома на допълнителните построения.

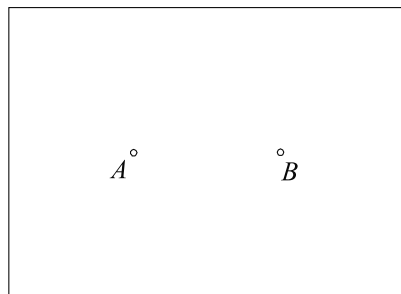
Първият, *подготвителен* етап (Милушев & Иванова, 2012) обхваща обучение по математика в нагледния курс по геометрия от 4. до 6. клас. Възрастовите особености и знанията на учениците им позволяват да осмислят необходимостта от довършителна работа върху чертеж и да изградят първоначални умения за извършване на допълнителни построения, предимно чрез дочертаване на фигура и чрез „сглобяване“, „разглобяване“ или „преконструиране“ на фигура в съответствие с посочени условия и изисквания.

Пример.

Задача 1 (4. клас). По колко начина може да се построи квадрат така, че точките A и B на *чертеж 1* да са два от неговите върхове? Начертайте всички такива квадрати.

(Иванова и др., 2011: 37).

Задача 2 (5. клас). През върха C на квадрата $ABCD$ е прекарана права, която пресича продълженията на страните AB и AD съответно в

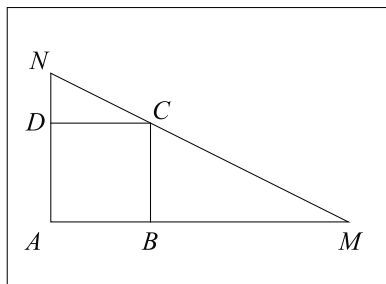


чертеж 1

точките M и N (вж. *чертеж 2*). Ако $AM = 12$ см и $AN = 6$ см, намерете дължината на страната на квадрата.

(Състезание по математика, Пловдив, 2003 г.)

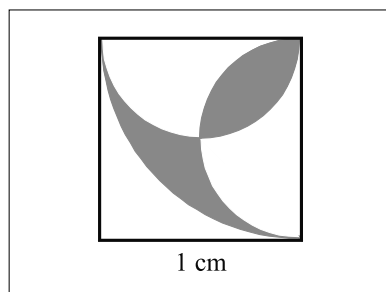
В *задача 1* учениците трябва да съобразят, че отсечката AB може да бъде страна или диагонал на търсения квадрат, т. е. могат да се начертаят три квадрата, отговарящи на условието. Решението на *задача 2* изисква построяване на отсечката AC и прилагане на метода на лицата.



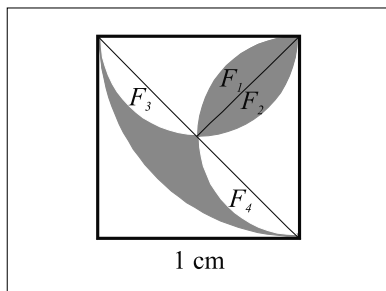
чертеж 2

Задача 3 (6. клас). Оцветената фигура на *чертеж 3* е заградена от дъги от окръжности, центровете на които лежат на страните на квадрата. Намерете лицето на оцветената фигура.

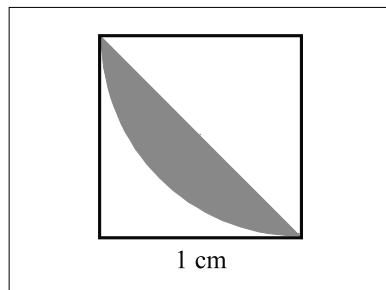
Опитът показва, че при решаването на *задача 3* повечето шестокласници се насочват към прилагане на адитивността на лицата по отношение на познати фигури, от които тя е съставена. Това води до необходимост от опростяване на дълги и сложни за възрастта алгебрични изрази, в резултат на което те трудно постигат положителен краен резултат. Много малка част от учениците забелязват, че фигурите F_1, F_2, F_3 и F_4 (вж. *чертеж 4*) са еднакви и следователно – равнолицеви, т. е. разглежданата фигура лесно се прекоonstrуира в тази, показана на *чертеж 5*, задачата за намирането на чието лице е добре позната.



чертеж 3



чертеж 4

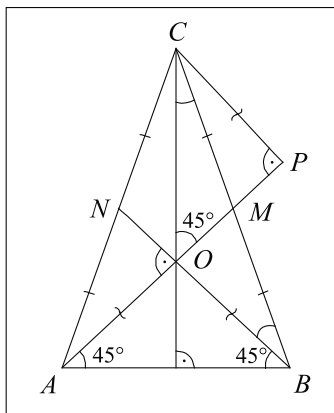


чертеж 5

Качествената пропеедветика в подготвителния етап е ключов фактор за съзнателно усвояване на прийома на допълнителните построения през следващия, *втори етап*, който обхваща обучението по математика в началото на систематичния курс по геометрия (7. и 8. клас). Възрастовите особености и знанията на учениците позволяват явното и целенасочено прилагане на прийома. Съществени характеристики на знанията им по геометрия са непознаването на аналитични методи

т. C към правата AM (вж. чертеж 7) позволява лесно да се докаже, че $\triangle CPM \cong \triangle BOM$ (втори признак), $\triangle COP \cong \triangle ABO$ (втори признак) и следователно $CO = AB$.

Надяваме се, че разгледаните дотук примери припомниха на читателя очарованието, което крие прилагането на разглеждания прием. Само по себе си то е достатъчно основание да се стремим да формираме у учениците умения целенасочено да търсят възможности за прилагането му при решаване на геометрични задачи. За целта, разбира се, е необходимо да се изгради цялостна система от задачи, обхващаща отделни подсистеми, съответстващи на всяка от изучаваните теми (особено през втория от посочените етапи) и структурирани съгласно принципите на системния подход. Тази дейност учебните програми предоставят изцяло на учителя.



чертеж 7

Как да конструираме дидактически целесъобразна система от задачи, предназначена за овладяване на приема на допълнителните построения?

Доколкото изучаването на този прием не е основна образователна цел в обучението по математика, освен изграждане на умения за прилагането му при решаване на геометрични задачи, системата от задачи трябва да обслужва и редица други цели:

- поетапно задълбочаване и разширяване на знанията за геометричните фигури и изграждане на умения за доказване и прилагане на техни основни свойства и признаци;
- усвояване на основни приложения на изучаваните геометрични знания посредством разширяване на вътрешнопредметни връзки;
- усъвършенстване на уменията за прилагане на основни методи на разсъждение и на различни евристични подходи при решаване на задачи;
- създаване на благоприятна образователна среда за изява на логическото мислене;
- развиване на съществени за изграждането на творчески личности качества – наблюдателност, въображение, конструктивно мислене, концентрираност и настойчивост при решаване на поставен проблем, услужливост на паметта и др.

Умениято да се открива необходимостта от въвеждане на спомагателна фигура и да се определя видът ѝ при решаването на конкретна задача действително остава зад пределите на възможностите на значителен брой ученици, но причината за

това рядко се корени в персоналните им възможности и способности. В повечето случаи се касае за неправилен дидактически подход към усвояването на това умение и преди всичко за неспазване на основни изисквания при съставянето на системи от математически задачи, свързани с отделните изучавани теми. Такива изисквания са разработени детайлно от В. Й. Крупич (Крупич, 1995) въз основа на принципите на системния подход, преразгледани в синергетичен аспект от В. Милушев – принцип на цялостност, на сложност, на организираност (и самоорганизираност), на йерархичност (Милушев, 2008), стр. 141. Специфика в разработените от Крупич изисквания е внесена във (Френкев & Милушев, 2000). Присъствието и позиционирането на определена задача в системата се обуславят от прецизното й окачествяване по *степен на сложност* и *степен на проблемност* (по отношение на нейното рационално решение) към дадения етап от обучението и от степента на подготвеност на обучаваните (Милушев, 2008: 142 – 146). В цитираните и други изследвания (Гроздев, 2007) се подчертава необходимостта от цялостност на системата. Средство за преодоляване на затрудненията авторите намират не в елиминирането на задачите с по-висока степен на сложност и проблемност, а в по-плавния преход към тях.

Прилагането на прийома на допълнителните построения води на практика до преобразуване на дадената задача – дейност, сочена от редица автори (Л. Фридман, П. Ердниев, Б. Ердниев, Д. Френкев, В. Милушев, Е. Скафа и др.) като важно средство за повишаване на ефективността на учебния процес. При преобразуването се извършват изменения в устройството на разглежданата задача в съответствие с определена дидактическа цел (Скафа&Милушев, 2009: 210). Основание за дейността (Фридман, 1998: 112), в случая се явява необходимостта да се замени дадената задача с такава с по-ниска степен на сложност или проблемност. В много случаи основанието възниква в резултат от наблюдения и експерименти на решаващия относно това, как влияят направените изменения в отделни компоненти върху цялостната конфигурация.

Поддържайки становището, че „за постигане на целта на определена *дейност* се извършват *действия* или *съвкупност от действия* с различна степен на сложност“ (Скафа&Милушев, 2009: 13), намираме за необходимо да внесем известна конкретика в общоприетото разбиране за действието „построяване на допълнителна фигура“. Предлагаме построяването на допълнителна фигура с цел заменянето на дадена задача с такава с по-ниска степен на сложност или на проблемност да се разглежда като действие, в субординация на което се разграничават две различни по отношение на степента на своята предопределеност действия:

- построяване на фигура, която е определена в условието на задачата, но не е била начертана при изготвянето на чертежа;

- построяване на фигура, която не е определена в условието на задачата.

Разграничаването на два вида допълнителни построения според степента на определеност на фигурите има за цел да подсказва критерии за съвместимостта на тяхната реализация с възможностите на определена възрастова група, за тяхната посилност на даден етап от обучението в средното училище, да съдейства за аргументирането на последователността и етапността при формиране на умения за прилагане на метода на допълнителните построения и да ориентира към по-конкретни идеи, свързани със систематизация на допълнителните построения и с възможности за алгоритмизация на някои видове допълнителни построения.

Първият вид действия представлява, с известна условност³, прилагане на някоя от аксиомите на построението (решаване на елементарна пострителна задача, при това позиционна) в равнината, а именно построяване на:

- права (отсечка, лъч), определена от две дадени точки;
- обща точка на две дадени прави, за които е известно (или доказано), че не са успоредни;
- окръжност с дадени център и радиус;
- общи точки на две дадени окръжности, за които е известно (или доказано), че се пресичат или допират;
- общи точки на дадена окръжност и дадена права, за която е известно (или доказано), че пресича окръжността или се допира до нея;

или в пространството, където към посочените елементарни построения се присъединяват и построяване на:

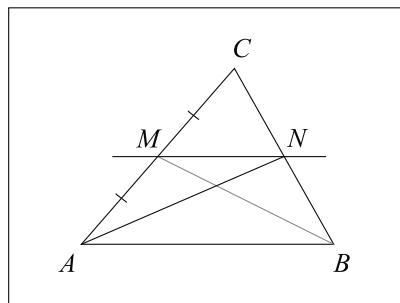
- равнина, определена от три дадени точки, които не лежат на една права;
- пресечница на две дадени равнини.

Строго погледнато, никое от описаните действия не води до прибавяне на „допълнителна“ към дадените фигури, а само до начертаването на фигура, която до момента не се е „виждала“.

Пример.

Задача 6 (5. клас). Точка M е среда на страната CA на $\triangle ABC$. През M е построена права, успоредна на страната AB , която пресича страната BC в точка N . Ако лицето на $\triangle ABC$ е 10 cm^2 , намерете лицето на $\triangle ABN$.

Тъй като учениците в пети клас не могат да докажат, че точка N е среда на страната BC , трябва да построят отсечката BM (вж. *чертеж 8*) и да използват, че $\triangle ABN$ е равнолицев на $\triangle ABM$.



чертеж 8

Отсечката AC , която трябва да се построи при решаването на *задача 2*, също е определена от условието на задачата. Други по-конкретни примери за допълнителни построения от първия вид са:

- построяване на пресечна точка на две прави, които са посочени в условието на задачата;
- построяване на разстоянията от дадена точка от симетралата на дадена отсечка до краищата на отсечката;
- построяване на окръжност, описана около даден правоъгълен триъгълник.

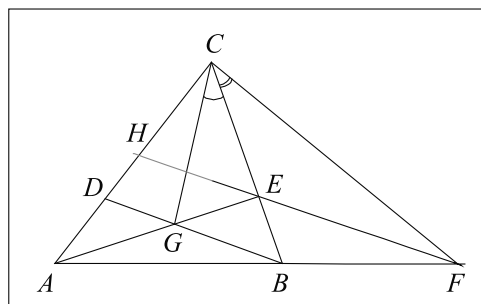
Построяването на допълнителна фигура, която е определена в условието на задачата, ще наричаме *построяване на детерминирана допълнителна фигура* или по-кратко – **детерминирано допълнително построение**. В случая терминът *детерминирано* се тълкува в смисъл *определено* (съгласно условието), което далеч не предполага, че необходимостта от извършване на такова допълнително построение с цел подпомагане на разсъжденията в хода на решението се съобразява сравнително лесно.

Пример.

Задача 7 (9. клас). Точка D върху страната AC на $\triangle ABC$ е такава, че $BD = CD$. През точка E от страната BC е прекарана права, успоредна на BD , която пресича правата AB в точка F . Ако $G = AE \cap BD$, да се докаже, че $\angle BCG = \angle BCF$.

(Гроздев&Дойчев, 2011)

Не е съвсем очевидна необходимостта да построим точка $H = AC \cap EF$ (вж. *чертеж 9*) и да докажем, че $\triangle CDG \sim \triangle FHC$ (втори признак). Нататък твърдението се доказва лесно.



чертеж 9

Допълнителни построения от втория вид – построяване на фигура, която не е определена в условието на задачата, ще наричаме **недетерминирано допълнително построение** (*построяване на недетерминирана допълнителна фигура*). Примери за такива действия са:

- построяване на права, която минава през дадена точка и е успоредна на дадена права;
- построяване на разстоянията от дадена точка от ъглополовящата на ъгъл до раменете му;
- построяване на точка, която дели дадена отсечка в определено отношение (включително среда на отсечка);
- построяване на медиана, височина или ъглополовяща в триъгълник;

- прилагане на еднаквост относно дадена фигура, когато нейният образ се явява допълнителна към дадените фигури;
- построяване на окръжност, чиито център и/или радиус не са посочени в условието и други.

Конкретни примери за прилагане на недетерминирани допълнителни построения посочихме във връзка с решенията на *задачи 4 и 5*. Ще обърнем внимание и на факта, че употребата на термина *недетерминиран* не предполага случайност в подбора на действията, прилагани при извършването на такова допълнително построение.

Безусловно може да се твърди, че наличието на ситуация, изискваща добавяне на нова фигура към дадена геометрична конфигурация, сериозно затруднява, почти без изключение, обучаваните. При това отново ще подчертаем, че степента на определеност на фигурата, чието построяване трябва да се съобрази с оглед на успешното реализиране на геометрично решение, е относителен критерий за степента на сложност на действието.

Ограничаването на който и да е учебен предмет в рамките на задължителното учебно съдържание неминуемо води до отлив на интереса към неговото изучаване. Обратно, отправянето на нови и нови предизвикателства към учениците, т. е. създаването на благоприятна образователна среда за изява и развитие на техните творчески и евристични способности, дава възможност да бъдат приобщени към учебния процес не само тези от тях, които системно показват положителни резултати от обучението. Затова набелязахме някои изходни положения, въз основа на които би могла да бъде разработена и апробирана конкретна технология, позволяваща по-пълноценно използване на потенциала на една група геометрични задачи – тези, чиито решения изискват въвеждане на допълнителна фигура, с цел усъвършенстване на творческите и евристичните способности на учениците.

Представената накратко концепция може да бъде обобщена по следния начин. Успешната реализация в съвременното общество предполага наличие на евристични и творчески умения на личността. Такива умения се формират в учебния процес по математика предимно чрез решаване на съответните видове задачи⁴. Обучението, целящо усвояване на прийома на допълнителните построения, позволява изграждането на дидактически целесъобразна система от евристични задачи и се нуждае от такава. Това обучение следва да протече на три основни етапа: подготвителен етап (4. – 6. клас), етап на явно и целенасочено изучаване на прийома (7. – 8. клас), етап на поддържане и развиване на придобитите умения за прилагането му (9. – 12. клас). Конструирането на съответна подсистема от задачи във всеки от посочените етапи предполага правилно оценяване на нейните елементи по степен на сложност и степен на проблемност съобразно критерии, свързани с възрастовите особености

и индивидуалните възможности на обучаваните. Тази трудна и отговорна дейност, предоставена на преподавателя, може съществено да бъде облекчена от наличието на целесъобразна систематизация на прилаганите допълнителни построения, в основата на която предлагаме да залегнат два основни вида – *детерминирани* и *недетерминирани* допълнителни построения.

Примери за подсистеми от задачи, адекватни на набелязаните цели и свързани с изучаването на конкретни теми от учебната програма, сме представили в предишни публикации (Иванова, 2013), (Милушев&Иванова, 2012).

БЕЛЕЖКИ

1. Понятието *евристична дейност* е с по-широк обем от понятието *творческа дейност*. То обхваща както самите творчески процеси, насочени към разрешаването на поставен проблем, така и съпровождащите ги познавателни, организационни, методологически и др. процеси (вж. (Скафа & Милушев, 2009, стр. 29)).
2. В. Й. Крупич разграничава три равнища на учебно-познавателна дейност на учениците: репродуктивно, частично-търсещо и изследователско (творческо) (Крупич, 1995, стр. 37).
3. Условността се предпоставя от факта, че построеното се позиционира върху чертеж, който не е изграден като решение на построителна задача и следователно, такова построение невинаги може да е прецизно. Така например при построяване на окръжност, чийто център и радиус са определени от чертежа, тя се чертае (понякога дори „на ръка“) така, че да минава през всички точки, които трябва да лежат върху нея съгласно приложими към ситуацията необходими и/или достатъчни условия.
4. Относно взаимовръзките между понятията *творческа задача*, *евристична задача*, *нестандартна задача* и *проблемна задача* вж. „Конструиране на ...“ (Скафа & Милушев, 2009).

ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. Theory and Practice (The Bulgarian Experience)*. Sofia: ADE.
- Гроздев, С., Св. Дойчев (2011). *Математически текстове*. София: Регалия 6.
- Иванова, Н. (2013). *Допълнителните построения – магията на геометрията*. Пловдив: Коала прес.
- Иванова, Н., Дилкина, Л., & Бекриев, К. (2011). *Сборник по математика за 4 клас*. Пловдив: Коала прес.
- Крупич, В. Й. (1995). *Теоретические основы обучения решению школьных математических задач*. Москва: Прометей.
- Милушев, В. Б. (2008). Триада на дейности решаване, съставяне и преобразуване на математически задачи в контекста на рефлексивно-синергетичния подход.

- Дисертация за присъждане на научна степен доктор на педагогическите науки.*
Пловдив: ПУ „Паисий Хилендарски“.
- Милушев, В., & Иванова, Н. (2012). Усовершенствование пропедевтики изучения систематического курса планиметрии средствами рефлексивного подхода. *Міжнародна науково-методична конференція „ІТМ*плюс – 2012“* (стр. 127 – 131). Україна, Суми: ВВП „Мрія“ ТОВ.
- Пойа, Д. (1959). *Как решать задачу*. Москва: Учпедгиз.
- Скафа, Е., & Милушев, В. (2009). *Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи*. Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски“.
- Френкев, Д. Б., & Милушев, В. Б. (2000). Върху някои изисквания към системите учебни математически задачи и средства за осъществяването им. *Юбилейна научна сесия „30 години факултет по математика и информатика към ПУ“* (стр. 362 – 368). Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски“.
- Фридман, Л. М. (1998). *Теоретические основы методики обучения математике. Пособие для учителей, методистов и пед. вузов*. Москва: Флинта.

ABOUT CERTAIN FOUNDATIONS IN THE DESIGN OF A HEURISTIC-ORIENTED SYSTEM OF GEOMETRIC PROBLEMS

Abstract. Why should we encourage the students to unleash their heuristic and creative potential? When and how to develop their skills in applying the method of additional constructions as a special heuristics? Which are the foundations related to the development of an appropriate didactic problem system, serving mastery of this method? The article shows the author's views by examples on the presented and other related problems. Reasons for systematic actions are given, which are usually called additional constructions.

Nina Ivanova

✉ Department of Mathematics and Computer
Science Teaching Methodology
Plovdiv University „Paisii Hilendarski“
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: ivanovanina@uni-plovdiv.bg