

ОЩЕ ЕВРИСТИКИ С EXCEL

Пламен Пенев

СОУ „П. Волов“ – Шумен

Резюме. Статията информира за развитието на експерименталната среда на Excel, описана в бр. 1 от 2014 г. на „Математика и информатика“. Обосновава се откриването на рубрика „Математика с компютър“.

Keywords: problem solving, equation, numbers, tables, macros

1. Увод

Настоящата статия е продължение на „Евристика с Excel“ от бр.1, 2014 г. на сп. „Математика и информатика“ и считаме, че читателят е запознат с основните моменти в нея. На срещата-семинар „Математика с компютър“ в с. Оряховица (юни, 2014), организирана от фондация „М. Балканска“, авторът получи отзиви и препоръки, въз основа на които извърши подобрения на моделите в следните насоки.

1. Възприемане на универсална форма за въвеждане на уравнение в компютърната памет.

2. Добавяне на макроси за решаване на тригонометрични и параметрични уравнения.

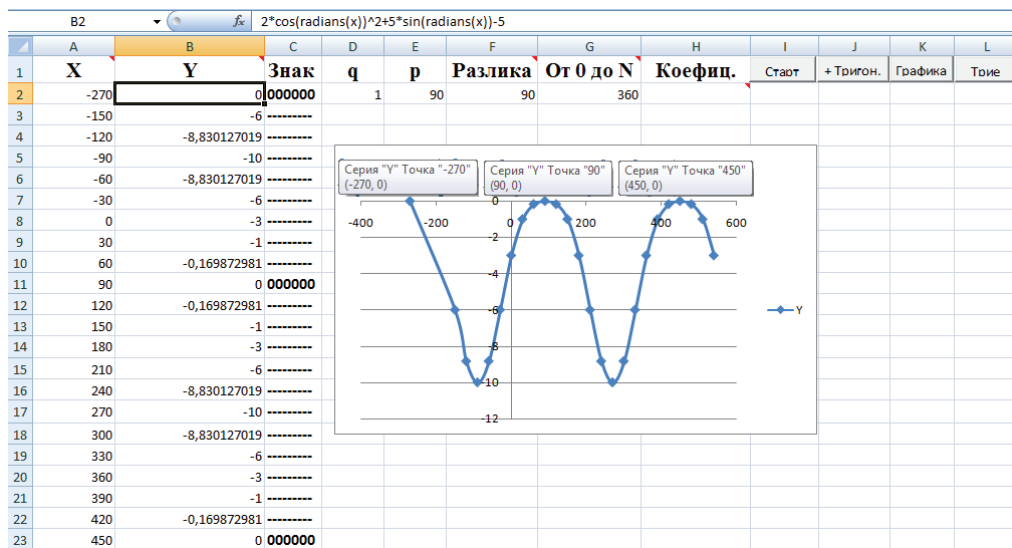
Продължилите след срещата в с. Оряховица контакти и обсъждания между участниците в семинара доведоха до формирането на предложение за откриване на рубрика „Математика с компютър“, в която да се изнасят интересни и характерни задачи, решени с помощта на компютърни програми. Целта е не само получаване на отговори за проверка, но и пораждање на идеи за математически решения и доказателства. Всъщност, без да е обявена изрично, рубриката на практика съществува. Редица статии в предишни броеве на списанието, в т. ч. и в брой 4, 2014 г., са посветени на тази тема. Основанията се засилват и от факта, че вече съществува българска интелигентна компютърна система, която отрива нови теореми в математиката. Анонсът е приет за публикуване в бележка 98.33 “Computer-generated mathematics: points on the Kiepert hyperbola” в английското списание *The Mathematical Gazette*, ноемврийски брой, 2014 г., стр. 37 – 38 (Grozdev & Dekov, 2014). Бележката анонсира нова теорема, открита от компютърната програма „Откривател“, която гласи следното: Ако точките P и Q са изогонално спрегнати спрямо $\triangle ABC$, то произведението на Чева на техните допълнения лежи върху хи-

перболата на Kiepert. Авторите отбелязват, че в тяхната статия (Grozdev & Dekov, 2013) е публикуван списък от над 2000 теореми, генерирани от „Откривател“ и свързани частично с горната теорема. Предвиждаме рубриката да бъде широко отворена за ученици и учители. Надяваме се, че тя ще помогне за преодоляване на техническите трудности, съпровождащи процеса на решаване на задачи, и стимулиране на креативното математическо мислене.

2. Решаване на тригонометрични уравнения

Макросът за намиране на рационален корен ForFog лесно се настройва за решаване на тригонометрични уравнения. Особеното тук е, че тригонометричните функции ползват аргументи в радиани, а отговорите се изискват да бъдат в градуси, изразени чрез π . Това обстоятелство налага при въвеждане на условието на задачата да се ползва вградената функция RADIANS. Друга особеност е, че корените на уравненията са безкрайно множество и са разположени през определени интервали (периоди). Но за откриване на критичните точки е достатъчно да се изследва интервалът от 0 до 360° . За определяне на периодите помага XY графиката, изведена автоматично от по-широка експериментална област.

Пример 1. Да се реши уравнението $2\cos^2 x + 5\sin x = 5$.



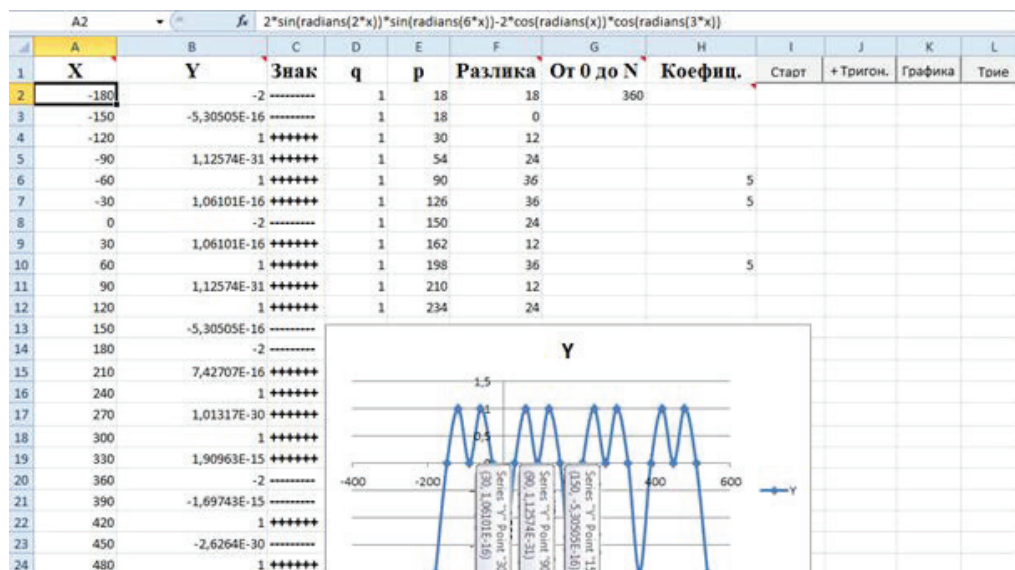
Макрос „+Тригон“ открива един корен 90° ($\pi/2$). „Графика“ уточнява още два корена -270° и 450° , откъдето следва, че периодът е $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Обръщаме внима-

ние на параболичната закръгленост на кривата и на възможността за свеждане на уравнението до квадратно – факт, който се проверява след прилагане на тъждеството $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и получаване на квадратния тричлен $2\cos^2 x - 5\sin x + 3 = 0$.

Когато корените са повече от един, за записване на резултата е необходим внимателен анализ на таблицата и чертежа.

Пример 2. Да се реши уравнението $2\sin(2x)\sin(6x) - 2\cos(x)\cos(3x) = 0$.

След кодиране на уравнението в B2 и стартиране на макросите получаваме следната картина:



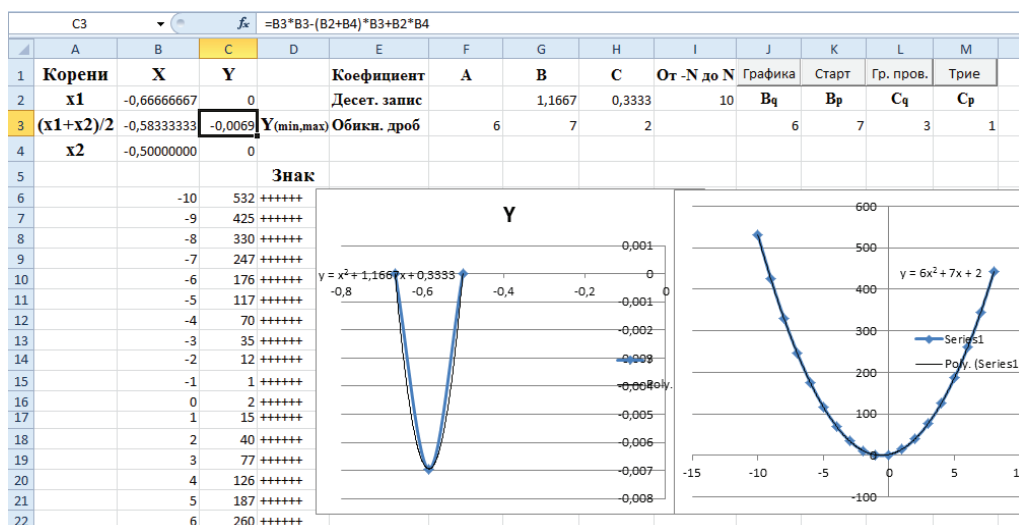
Наблюдаваме смесване на резултати от два периода – през 30° и 60° . Съответно можем да запишем отговорите: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ и $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

3. Обратна задача за квадратно уравнение

За съставяне на квадратно уравнение по известни корени се използват формулите на Виет $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Тук предлагаме начин, условно наречен „Метод на трите точки“, демонстриращ интересни възможности на графопостроителя.

Например при корени $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$ за x е известна и средната стойност $x_{\text{ср.}}$.

в която квадратната функция има екстремум. В случая това е $x_{cp.} = \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$: 2. Стойностите на функцията ще бъдат съответно: $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ а $y_{cp.}$ може да се изчисли автоматично по формулата $y_{cp.} = x_{cp.}^2 - (x_1 + x_2) x_{cp.} + x_1 x_2$. Линията на тренда възпроизвежда аналитичния вид на уравнението от графика, построена по три точки: $y = x^2 + 1,1667x + 0.3333$.



Получават се неточности, произтичащи от десетичния запис на коефициентите, но съвсем прост макрос лесно възстановява запис във вида $\frac{p}{q}$. Сега вече може да се построи точна графика и да се запише резултатът. Отговор: $y = 6x^2 + 7x + 2$.

Технология за работа с модел Viet:

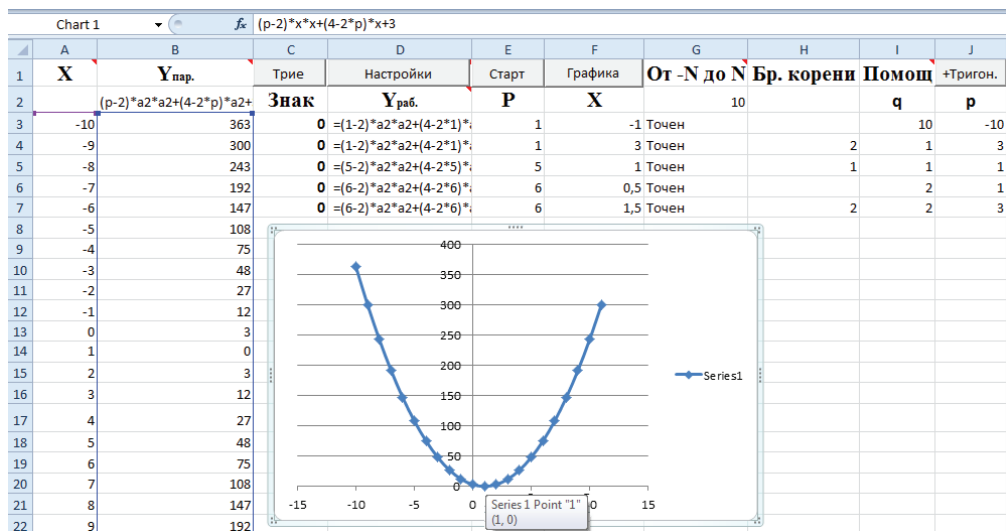
- x_1 и x_2 се въвеждат съответно в клетки B2 и B4.
- Построява се предварителна „Графика“. От чертежа се вземат коефициенти b и c (запис десетичен) и се въвеждат в клетки G2 и H2.
- „Старт“ намира точни коефициенти във вид на обикновени дроби.
- „Гр. пров.“ построява графика с точни коефициенти и извежда линия на тренда с точен резултат.

Техниката може да се използва и за преобразуване на десетични дроби в обикновени.

4. Модел за решаване на задачи с параметри

Уменията да се решават задачи с параметри е критерий за математическата култура на ученика. Голяма част от конкурсните задачи в престижни ВУЗ са с параметри. Този вид задачи стоят най-близо до реалната практика. Необходимост от параметризиране на условието възниква не само в алгебрата и геометрията. Почти всяка задача по физика или икономика предполага използване на повече от една променлива в едно уравнение. Особено тук е, че в същността си параметричното уравнение обединява множество от функции, явява се обобщение на функция. Съответно алгоритмите за автоматизиране на решението се оказват най-трудно реализувани. Например методът на пълното изброяване, към който се придържаме в настоящото изследване, означава, че в най-простия случай са необходими четири вложени цикъла – факт, който води до прекомерно увеличаване на времето за обработка. Но проблемът може да се заобиколи, като дълбочината на вложеност се „раздели“ на два тройни цикъла – отначало на параметъра p се подават цели числа, а на x – дробни, и ако резултатите задоволяват, се спира дотук. Ако не, се сменят местата на p и x (от машинна гледна точка е безразлично кои стойности са във външния цикъл) и отново проиграва алгоритъма. Обединяването на резултатите, допълнено с частни графики, дава сравнително пълна картина на изследваните зависимости. Остава да се анализират и запишат резултатите.

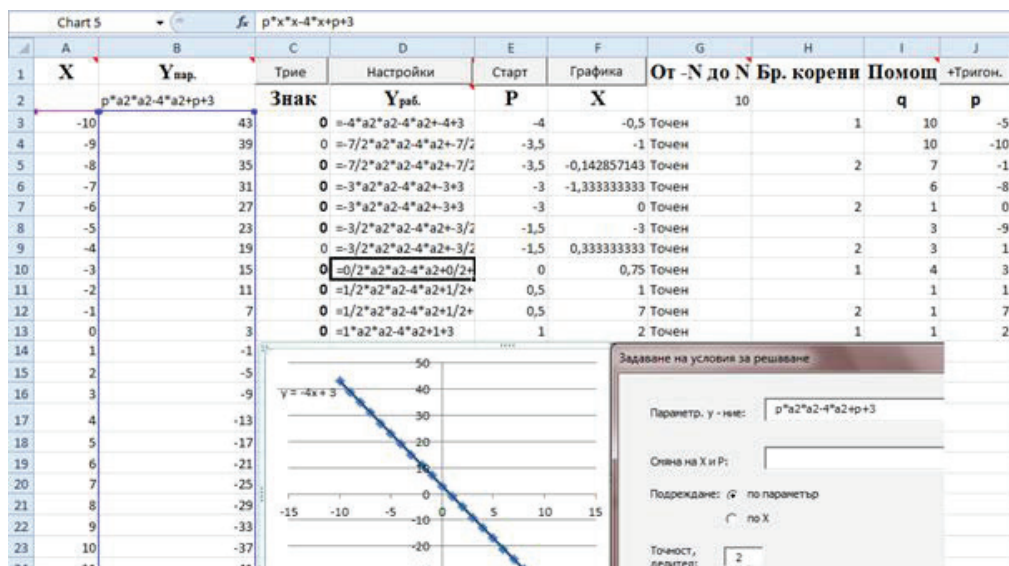
Пример 3. За кои стойности на p уравнението $(p-2)x^2 + (4-2p)x + 3 = 0$ има единствено решение?



Отговор: $p = 5$.

Експериментите показват, че когато в резултата присъства интервал от значения, е удобно за p да се зададе делител 2, т.е. стъпка на изменение на брояча на цикъла 0,5.

Пример 4. За кои стойности на p уравнението $px^2 - 4x + p + 3 = 0$ има повече от един корен?



Отговор: $-4 < p < 0$ или $0 < p < 1$.

Добре се вижда, а линията на тренда и доказва, че при $p = 0$ уравнението е линейно, т.е. решението е едно.

Ето случай, при който резултатът се различава по-ясно, когато в „Настройки“ се зададе „Само точен корен“. В противен случай, понеже интервалите за p са големи, излизат множество приближени значения, които препълват екрана.

Пример 5. Да се реши уравнението $(x + p)\sqrt{x - p} = 0$.

Отговор: Ако $p \geq 0$ $x = p$, ако $p < 0$ $x = p$ или $x = -p$.

B2		fx (a2+p)*sqrt(a2-p)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	X	Y пар.	Триг.	Настройки	Старт	Графика	От -N до N	Бр. корени	Помощ	+Тригон.	
2		(a2+p)*sqrt(a2-p)	Знак	Y раб.	P	X	10		q	p	
3	1	#NUM!	0	=(a2+10)*sqrt(a2--10)	-10	-10	Точен		1	-10	
4			0	=(a2+10)*sqrt(a2--10)	-10	10	Точен	2	1	10	
5			0	=(a2+9)*sqrt(a2--9)	-9	-9	Точен		1	-9	
6			0	=(a2+9)*sqrt(a2--9)	-9	9	Точен	2	1	9	
7			0	=(a2+8)*sqrt(a2--8)	-8	-8	Точен		1	-8	
8	Задаване на условия за решаване			X	-8	8	Точен	2	1	8	
9				--7)	-7	-7	Точен		1	-7	
10				--7)	-7	7	Точен	2	1	7	
11	Параметр. y - ние:	(a2+p)*sqrt(a2-p)	G	--6)	-6	-6	Точен		1	-6	
12				2--6)	-6	6	Точен	2	1	6	
13	Сняна на X и P:		C	--5)	-5	-5	Точен		2	-10	
14				--5)	-5	5	Точен	2	1	5	
15	Подреждане:	G по параметър	Добавяне на G Да	--4)	-4	-4	Точен		2	-8	
16		C по X	резултати C Не	--4)	-4	4	Точен	2	1	4	
17				--3)	-3	-3	Точен		3	-9	
18	Интервал от	-10 до 10	Изтриване на раб. област C	--3)	-3	3	Точен	2	1	3	
19				--2)	-2	-2	Точен		5	-10	
20	Точност, делителя:		Само точни корени	--2)	-2	2	Точен	2	1	2	
21				--1)	-1	-1	Точен		10	-10	
22	Забранена стойност за p		Забранена стойност за x	--1)	-1	1	Точен	2	1	1	
23				0)	0	0	Точен	1	1	0	
24				1)	1	1	Точен		1	1	
25				2)	2	2	Точен	1	1	2	
26				0	=(a2+3)*sqrt(a2-3)	3	3 Точен	1	1	3	
27				0	=(a2+4)*sqrt(a2-4)	4	4 Точен	1	1	4	
28				0	=(a2+5)*sqrt(a2-5)	5	5 Точен	1	1	5	

5. Заключение

С така предложените модели и техники се решава широк кръг от задачи от училищната математика. Средата осигурява богато поле за експерименти. Налице е удачно съчетание на аналитичния и графичния метод с възможности за таблично представяне на математическите обекти. Считаме, че в този вид платформата на Excel позволява на учителя да разглежда в час по-трудни задачи, а на ученика – да почувства вяра в собствените си сили. Рубриката „Математика с компютър“, за която става дума в началото, ще допринесе за ползотворна обмяна на опит и популяризиране на евристичните методики (Grozdev, 2007), (Князева и др., 2013).

ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & Dekov, D. (2014). Computer-generated mathematics: points on the Kiepert hyperbola. *The Mathematical Gazette*, note 98.33, 37 – 38 (to appear).
- Grozdev, S. & Dekov, D. (2013). Points on the Kiepert hyperbola. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, 8. (<http://www.ddekov.eu/j/contents.htm#2013>)

- Пенев, П. (2014). Евристика с Excel. *Математика и информатика*, 57, 1, 18 – 33.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 295 pages (ISBN 978-954-92139-1-1)
- Князева, Е., Гроздев, С., Георгиева, М. & Гълъбова, Д. (2013). *Синергетичният подход във висшето педагогическо образование (Върху примери от дидактиката на математиката)*. В. Търново: СЛОВО, 215 страници + 4 приложения. (ISBN 978-954-439-986-3)

REFERENCES

- Grozdev, S. & Dekov, D. (2014). Computer-generated mathematics: points on the Kiepert hyperbola. *The Mathematical Gazette*, note 98.33, 37 – 38 (to appear).
- Grozdev, S. & Dekov, D. (2013). Points on the Kiepert hyperbola. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, 8. (<http://www.ddekov.eu/j/contents.htm#2013>)
- Penev, P. (2014). Heuristics by Excel. *Mathematics and Informatics*, 57, 1, 18 – 33 (in Bulgarian).
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 295 pages (ISBN 978-954-92139-1-1).
- Knjazeva, E., Grozdev, S., Georgieva, M. & Galabova, D. (2013). *The synergetic approach in higher pedagogical education (On examples from the Didactics of Mathematics)*. V. Tarnovo: SLOVO, 215 pages + 4 appendices. (ISBN 978-954-439-986-3) (in Bulgarian).

MORE HEURISTICS BY EXCEL

Abstract. The paper informs about the development of the experimental platform of Excel, described in issue 1, 2014 of “Mathematics and Informatics” journal. Reasons are given for the start of the new heading “Mathematics with computer” in the journal.

✉ **Mr. Plamen Penev**
Teacher in Informatics
Secondary school “P. Volov”
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg