

ОБВЪРЗВАНЕ НА ОБУЧЕНИЕТО ПО АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Румяна Маврова, Пенка Рангелова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Резюме. В настоящата статия показваме приложението на безкрайно малка геометрична прогресия в геометрията. За целта предлагаме система от задачи, илюстриращи тази връзка.

Keywords: interdisciplinary relations, infinitely small geometric series

Идеята за обвързване на учебните предмети в процеса на обучение е твърде стара и повече или по-малко е изяснена в работите на А. Дистерверг (Diesterweg, 1966), Я. А. Коменски (Comenius, 1956), Дж. Лок (Locke, 1985), Й. Т. Песталоци (Pestalozzi, 1963) и много други.

Я. А. Коменски (Comenius, 1956) пръв издига тази идея и подчертава значението ѝ за обучението. Той отбелязва: „Никому не трябва да се раздава образование на основата на една която и да е частна наука, независимо от останалите науки... както в природата всичко е свързано едно с друго, така и в обучението е нужно да се свързва всяко нещо...“. Коменски подчертава важно значение на обвързването на близки учебни предмети, което е необходима предпоставка за осигуряване на цялостност и системност на знанията.

Още през XIX в. интересът към проблема за обвързване на учебните предмети нараства значително, тъй като по-нататъшната диференциация довежда до увеличаване броя на учебните предмети. Осъществяването на връзка между учебните предмети е сложна задача, която изисква решаване на редица въпроси, свързани със съдържанието, методите и организационните форми на обучение.

В (Rashkova, 1977) Ст. Рашкова използва термина междупредметни връзки и прави опит да дефинира това понятие. Тя счита, че за правилното осъществяване на тези връзки е важно протичането им на три нива: вътрешнопредметно, вътрещиклично и междущиклично. Имайки предвид нейното мнение за всяко едно от тези нива, считаме, че в обучението по математика в училище може успешно да се осъществи първото ниво.

В настоящата статия ще илюстрираме обвързването на конкретна тема от алгебричния материал с теми от геометричния материал. В часовете по ма-

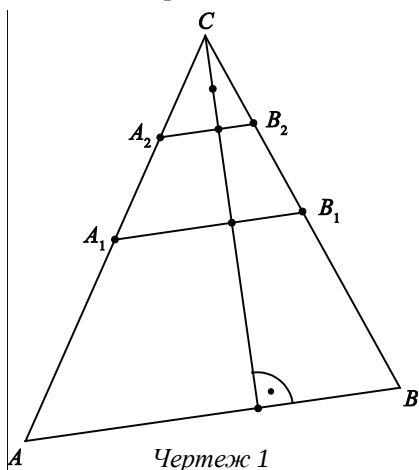
тематика в XI клас (Lozanov, Vitanov & Nedevski, 2001; Paskalev & Paskaleva, 2002 и др.) се изучават аритметична, геометрична и безкрайно малка геометрична прогресия. Показано е приложението на първите две прогресии при пресмятане на различни видове лихви, кредити, ренти и др. Разгледаните свойства на безкрайно малка геометрична прогресия се свеждат до използване на формулата за нейната сума и намиране на един от участващите в нея елементи, ако са известни другите два. Изучаването на тази прогресия дава възможност да се осъществят вътрешнопредметни връзки в обучението по математика. Подходящо е да се покаже приложението при решаване на геометрични задачи.

В статията предлагаме поредица от задачи, при решаването на които се изискват различни геометрични знания и свойствата на безкрайно малка геометрична прогресия. Предложените задачи сме обособили в няколко групи.

Първа група. Безкрайна редица от триъгълници или окръжности и триъгълници, отговарящи на определени условия.

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$. През средата на височината му през върха C е построена права, успоредна на AB . Тя отсича $\triangle A_1B_1C$. По същия начин за $\triangle A_1B_1C$ е построен $\triangle A_2B_2C$ и т.н. Ако периметърът на $\triangle ABC$ е $P = a$, а лицето му – $S = b$, то намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на всички триъгълници.

Решение: по условие (черт. 1) $P_{ABC} = AB + BC + CA = a$. Лесно определяме $P_{A_1B_1C} = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}a$, $P_{A_2B_2C} = \frac{1}{2}P_{A_1B_1C} = \frac{1}{4}a$ и т.н. Така получаваме следната редица от числа, задаващи периметрите на триъгълниците:



Чертеш 1

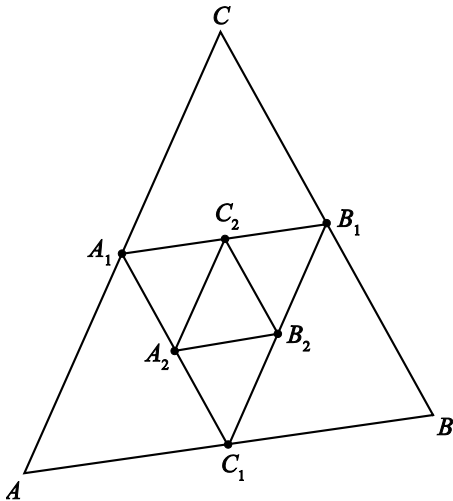
$a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{8}a, \dots$, която е безкрайно малка геометрична прогресия с частно $q = \frac{1}{2}$ и първи член a . Тогава сумата на всички тези периметри е $S = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 2a$.

За лицата на получените триъгълници имаме $S_{ABC} = b$, $S_{A_1B_1C} = \frac{b}{4}$, $S_{A_2B_2C} = \frac{b}{16}$ и т.н.

Отново се получава безкрайно малка геометрична прогресия с първи член b и частно $q = \frac{1}{4}$. Следователно сборът от лицата е $S = \frac{b}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}b$.

В тази задача обвързахме знанията за безкрайно малка геометрична прогресия с тези за средна отсечка в триъгълник.

Задача 2. Даден е равностранен триъгълник със страна a . Чрез съединяване средите на страните му в него е вписан друг триъгълник. По същия начин във втория триъгълник е вписан трети триъгълник и т.н. Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на тези триъгълници (Лозанов, Витанов & Недевски, 2001: 41).



Чертeж 2

Решение: нека даденият триъгълник е ABC и $AB = a_1 = a$ (черт. 2). Тогава $A_1B_1 = a_2 = \frac{a}{2}$, $A_2B_2 = a_3 = \frac{a}{4}$ и т.н. Така стигаме до следната редица от периметри на тези триъгълници: $3a, 3\frac{a}{2}, 3\frac{a}{4}, \dots$.

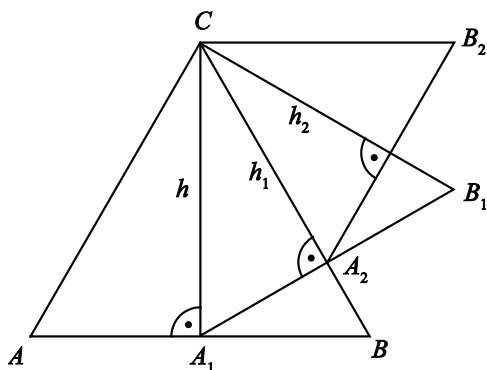
Получената редица е безкрайно малка геометрична прогресия, чиято сума е $S = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$.

Ако с S_1 означим лицето на $\triangle ABC$, то $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. За лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ със

страна $\frac{a}{2}$ намираме $S_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. Лесно се установява, че $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$ и т.н. Така стигнахме до редицата $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}, \frac{a^2\sqrt{3}}{64}, \dots$, която е безкрайно малка геометрична прогресия със сума $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Тук обвързахме знанията за безкрайно малка геометрична прогресия с периметър и лице на равностранен триъгълник, както и средна отсечка в него.

Задача 3. Даден е равностранен триъгълник със страна a . Една от височините на триъгълника е взета за страна на друг равностранен триъгълник. Една от височините на новия триъгълник е взета за страна на трети равностранен триъгълник и т.н. Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на така получените равностранни триъгълници (Paskalev & Paskaleva, 2002).



Чертeж 3

Решение: ако h е височина-

та на дадения $\triangle ABC$ (черт. 3),

то $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ако h_1 е височината

на $\triangle A_1B_1C$, то $h_1 = \frac{h\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$. За

височината h_2 на $\triangle A_2B_2C$ получа-

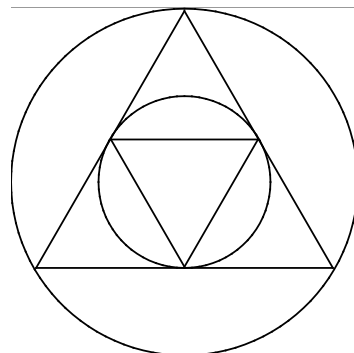
ваме $h_2 = \frac{h_1\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$ и

т.н. Периметрите на тези триъгълници образуват редицата $3a, \frac{3a\sqrt{3}}{2}, \frac{9a}{4}, \frac{9a\sqrt{3}}{8}, \dots$ и сумата от членовете ѝ е $S = \frac{3a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6a(2 + \sqrt{3})$.

По аналогичен път стигаме до извода, че сумата от лицата им е $S = a^2\sqrt{3}$.

Задача 4. В окръжност с радиус R е вписан равностранен триъгълник. В него е вписана окръжност и в нея е вписан отново равностранен триъгълник и т.н. Намерете сумата от лицата на получените кръгове и сумата от лицата на получените равностранни триъгълници.

Упътване: установете, че радиусите на разглежданите кръгове са: $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \dots$, а сумата от лицата им е $\frac{4}{3}\pi R^2$. За страните на



Чертeж 4

триъгълниците установете, че те са: $R\sqrt{3}$, $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $\frac{R\sqrt{3}}{4}$ Пресметнете съответните лица и установете, че тяхната сума е $R^2\sqrt{3}$.

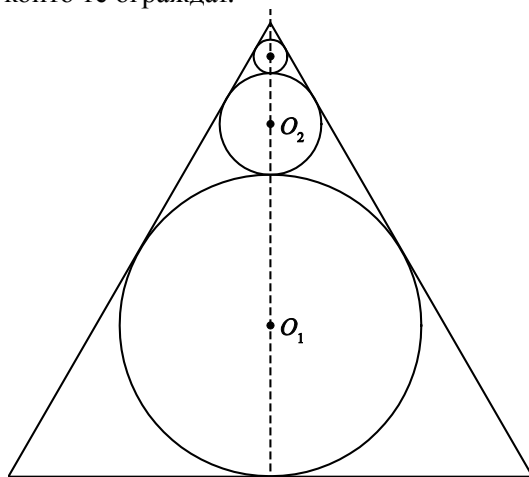
По аналогичен начин се постъпва и при решаване на следната задача.

Задача 5. В равностранен триъгълник със страна a е вписан кръг. В него е вписан равностранен триъгълник и така до безкрайност. Намерете сумата от:

- а) радиусите на получените кръгове;
- б) дължините на ограждащите ги окръжности;
- в) лицата на получените кръгове.

(Rangelova 2006)

Задача 6. В равностранен триъгълник със страна a е вписана окръжност. Построена е безкрайна редица от окръжности, всяка от които се допира до две от страните на триъгълника и до предходната окръжност (черт. 5). Намерете сумата от дължините на тези окръжности и сумата от лицата на кръговете, които те ограждат.



Чертеш 5

Упътване: установете, че радиусите на тези окръжности са:

$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18}, \quad r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{54} \text{ и т.н.}$$

Пресметнете дължините на съответните окръжности и лицата на кръговете, които те ограждат. За получените безкрайно малки геометрични прогресии намерете сумите.

Втора група. Безкрайна редица от квадрати или квадрати и кръгове, отговарящи на определени условия.

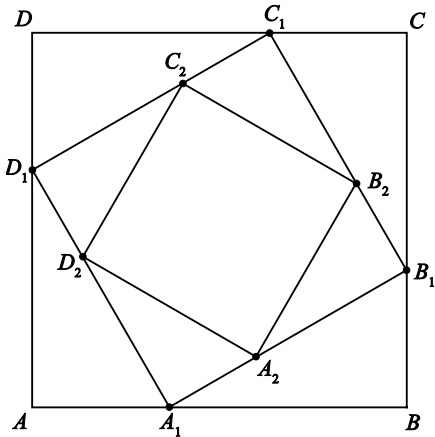
Задача 7. В квадрат със страна a е вписан друг квадрат, а в него е вписан трети квадрат и т.н. Намерете сумата от лицата на тези квадрати.

Решение: ако S_1 е лицето на дадения квадрат $ABCD$, то $S_1 = a^2$ (черт. 6). Разделяме всяка от страните му на n равни части и избираме

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \frac{1}{n}a, \text{ а } A_1B = B_1C = C_1D = D_1A = \frac{n-1}{n}a. \text{ Тогава лицето } S_2 \text{ на квадрата } A_1B_1C_1D_1 \text{ е } S_2 = A_1B_1^2 = \frac{(n-1)^2 a^2}{n^2} + \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2} [(n-1)^2 + 1].$$

След разделяне на страните на квадрата $A_1B_1C_1D_1$ на n равни части определяме

$$A_2B_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a}{n} \sqrt{(n-1)^2 + 1} \text{ и } B_1B_2 = \frac{a}{n^2} \sqrt{(n-1)^2 + 1}, \text{ откъдето лицето на този квадрат } S_3 = A_2B_2^2 = \frac{(n-1)^2 a^2}{n^4} [(n-1)^2 + 1] + \frac{a^2}{n^4} [(n-1)^2 + 1] = \frac{a^2 [(n-1)^2 + 1]^2}{n^4}.$$



Черт. 6

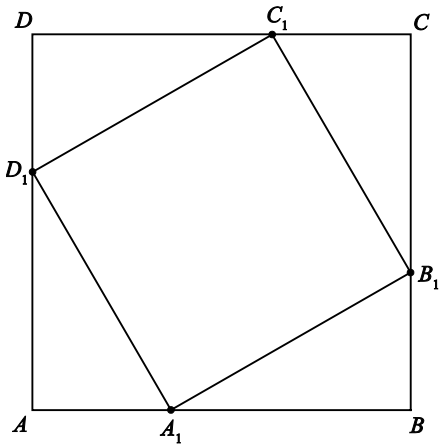
Аналогично $S_4 = \frac{a^2 [(n-1)^2 + 1]^3}{n^6}$ и

т.н. Понеже $\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \dots = \frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} < 1$, то редицата $S_1, S_2, S_3, \dots$ е безкрайно малка геометрична прогресия и сумата ѝ е $S = \frac{a^2 n^2}{(n-1)^2 + 1}, n \geq 2$.

С тази задача обобщаваме задача от (Lozanov, Vitanov & Nedevski, 2001).

Задача 8. В квадрат със страна a е вписан квадрат с най-малко лице, а в него е вписан трети квадрат с най-малко лице и т.н. Намерете сумата от лицата на тези квадрати и сумата от периметрите им.

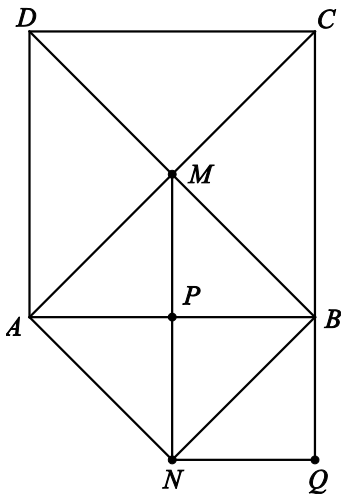
Упътване: нека $A_1B = B_1C = C_1D = D_1A = x$ (черт. 7). Тогава $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = a - x$ ($0 < x < a$). Лицето $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1^2 = x^2 + (a - x)^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$. От последната формула се вижда, че лицето ще приеме най-малка стойност при $x - \frac{a}{2} = 0$, т.е. $x = \frac{a}{2}$.



Чертeж 7

дратите са $4a$, $\frac{4a}{\sqrt{2}}$, $\frac{4a}{2}$,

Последната редица е безкрайно малка геометрична прогресия и сумата от членовете ѝ е $S = 4a\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$.



Чертeж 8

Следователно върховете A_1 , B_1 , C_1 и D_1 са среди на съответните страни в квадрата $ABCD$. Аналогично и останалите квадрати са с върхове средите на страните на предходния квадрат.

Така задачата става частен случай на задача 7 при $n = 2$. Тогава сумата от лицата на всички получени квадрати е

$$S = \frac{a^2 \cdot 2^2}{(2-1)^2 + 1} = 2a^2.$$

Понеже $A_1B_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $A_2B_2 = \frac{a}{2}$ и т.н., то периметрите на ква-

Задача 9. Даден е квадрат с диагонал d . Страната на този квадрат е взета за диагонал на втори квадрат, страната на втория квадрат е диагонал на трети квадрат и т.н. (черт. 8). Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на получените квадрати.

Решение: използваме теоремата на Питагор за $\triangle AMB$ и получаваме, че страната на квадрата $ABCD$ е $a_1 = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Аналогично за страните на втория и третия квадрат намираме $a_2 = \frac{d}{2}$ и $a_3 = \frac{d}{2\sqrt{2}}$. Периметрите на тези квадрати образуват редицата $\frac{4d}{\sqrt{2}}$, $\frac{4d}{2}$, $\frac{4d}{2\sqrt{2}}$, ... , а лицата

им задават редицата $\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{4}, \frac{d^2}{8}, \dots$, които са безкрайно малки геометрични прогресии. Техните суми са съответно $S_1 = 4d(\sqrt{2} + 1)$ и $S_2 = d^2$.

С аналогични разсъждения разгледайте

Задача 10. В кръг с радиус R е вписан квадрат. В този квадрат е вписан кръг, а в него е вписан нов квадрат и така до безкрайност. Намерете сумата от:

- а) радиусите на тези кръгове;
- б) лицата на тези кръгове.

Задача 11. В кръг с радиус R е вписан правилен шестоъгълник, в него е вписан кръг и отново е вписан правилен шестоъгълник. Намерете сумата от лицата на получените:

- а) кръгове;
- б) шестоъгълници.

Упътване: ако страните на получените правилни шестоъгълници са b_6 ,

$b'_6, b''_6, \dots$, а радиусите на кръговете са $R, R_1, R_2, \dots$, то установете, че $b_6 = R$,
 $b'_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $b''_6 = \frac{3R\sqrt{3}}{8}$, ... и $R, R_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $R_2 = \frac{3R}{4}$...

Намерете лицата им и установете, че те образуват безкрайно малки геометрични прогресии.

Аналогични въпроси могат да се разглеждат и за стереометрични задачи. Ето условията с кратки упътвания и отговори на няколко такива задачи.

Задача 12. В права призма с основа квадрат е вписана друга права призма, върховете на която са среди на основните ръбове на дадената призма. Във втората призма е вписана по същия начин трета призма и т.н. Намерете сбора от обемите на тези призми, ако основният ръб на първата призма е a , а височината ѝ е h .

Упътване: установете, че $V = a^2h$, $V_1 = \frac{a^2h}{2}$, $V_3 = \frac{a^2h}{4}$, ...

Задача 13. В куб с ръб a е вписано кълбо, в него е вписан куб, а в този куб е вписано отново кълбо и т.н. Намерете сбора от обемите на всички кубове и сбора от обемите на всички кълба.

Отговор: $\frac{3a^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}$ и $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2(3\sqrt{3}-1)}$.

Задача 14. В правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $2a$ и околните стени, наклонени към основата под ъгъл α , е вписана безкрайна редица от кълба, така че първото кълбо се допира до основата и до околните стени на пирамидата. Всяко следващо кълбо се допира до предходното кълбо и до околните стени на пирамидата. Намерете сбора от обемите на така получени те кълба.

Упътване: установете, че $R_1 = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $R_2 = R_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$, $R_3 = a \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$ и т.н. Следователно обемите образуват безкрайно малка геометрична прогресия с частно $q = \operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}$.

С настоящата статия провокираме читателите да съставят и решават сами задачи от разглежданата тема.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Comenius, J. A. (1956). *Velikaya didaktika*. Moskva: Uchpedgiz [Коменски, Я. А. (1956). *Великая дидактика*. Москва: Учпедгиз].
- Diestewerg, A. (1966). *Izbrannyye pedagogicheskiye sochineniya*. Moskva: Uchpedgiz [Дистерверг, А. (1966). *Избранные педагогические сочинения*. Москва: Учпедгиз].
- Locke, J. (1985). *Sochineniya v trekh tomakh (vol 1 – 2)*. Moskva: Mysl' [Лок, Дж. (1985). *Сочинения в трех томах (т. 1 – 2)*. Москва: Мысль.].
- Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2001). *Matematika XI klas (profilirana podgotovka)*. Sofia: Anubis [Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2001). *Математика XI клас (профилирана подготовка)*. София: Анубис].
- Paskalev, G. & Paskaleva, Zdr. (2002). *Matematika XI klas (vtoro ravnishte)*. Sofia: Arhimed [Паскалев, Г. & Паскалева, Здр. (2002). *Математика XI клас (второ равнище)*. София: Архимед.].
- Pestalozzi, J. T. (1963). *Izbrannyye pedagogicheskiye sochineniya*. Moskva: APN [Песталоци, И. Т. (1963). *Избранные педагогические сочинения*. Москва: АПН].
- Rangelova, P. (2006). *Sbornik po matematika IX – XII klas s metodicheski ukazaniya*. Plovdiv: Makros [Рангелова, П. (2006). *Сборник по математика IX – XII клас с методически указания*. Пловдив: Макрос].
- Rashkova, St. (1977). *Mezhdupredmetni vrazki*. Sofia: Narodna prosveta [Рашкова, Ст. (1977). *Междупредметни връзки*. София: Народна просвета].

CONNECTING THE EDUCATION IN ALGEBRA AND GEOMETRY

Abstract. It is shown in the present paper the application of infinitely small geometric progressions in geometry. A system of tasks is proposed for the purpose, that illustrate the corresponding relation.

✉ **Dr. Rumiyan Mavrova, Assoc. Prof.**

Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University "Paisiy Hilendarskiy"
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: rummav@abv.bg

✉ **Prof. Penka Rangelova, DSc**

Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University "Paisiy Hilendarskiy"
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: rangelova_penka@abv.bg