

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ДРОЗ-ФАРНИ, ОПРЕДЕЛЕНО ОТ ОПИСАНО КОНИЧНО СЕЧЕНИЕ

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси

²⁾ Технически колеж – Ловеч

Резюме. Във връзка с описаните за даден триъгълник ABC конични сечения е установено едно обобщение на известна теорема на Дроз-Фарни. Описаното обобщение е свързано със специални вписани за ΔABC конични сечения.

Keywords: triangle, conic, Euler circle, Euler line, conjugate line

1. Увод. Геометрията на триъгълника е изпъстрена с прости и красиви теореми. Една от тях е открита през 1899 г. от швейцарския математик Арнолд Дроз-Фарни (1856 – 1912). Тази теорема може да се формулира по следния начин.

Теорема на Дроз-Фарни. Перпендикулярните прави l_1 и l_2 минават през ортоцентъра H на ΔABC . Ако l_i ($i = 1, 2$) пресича правите $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ съответно в точките A_i , B_i и C_i ($i = 1, 2$), то средите A_0 , B_0 и C_0 съответно на отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 лежат на една права d .

Любопитно е, че теоремата на Дроз-Фарни често привлича вниманието на математиците, като предизвиква търсене на различни доказателства и обобщения. Синтетични доказателства на тази теорема могат да се намерят в Бележките^{1,2,3}, а аналитични доказателства се съдържат в (Sharygin, 1986), (Karlov, 2015) и (Nenkov, 1996). Освен това в Бележката³ е доказано твърдението на Ван Ламоен, че ако точките A_0 , B_0 и C_0 делят отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 в едно и също просто отношение, те отново лежат на една права. Друго обобщение, получено с проективни средства, е представено в Бележката⁴, където H е произволна точка в равнината на ΔABC . Показано е, че средите A_0 , B_0 и C_0 съответно на отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 лежат на една права d тогава и само тогава, когато правите l_1 и l_2 са допирателни за параболата, вписана в ΔABC . Самата права d също е допирателна за параболата. В Бележката⁵ е изяснено, че ако правите, минаващи през върховете на ΔABC и успоредни на срещуположните им страни, образуват $\Delta A'B'C'$, то правите l_1 и l_2 от Бележката⁴ са спрегнати диаметри на коничното сечение, което има за център точката H и е

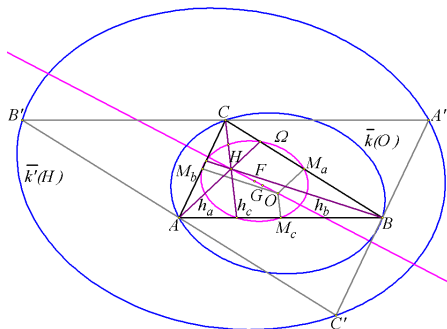
описано за $\Delta A'B'C'$. Във връзка с коничните сечения трябва да се отбележи и това, че в оригиналната теорема на Дроз-Фарни правите d са допирателни за едно специално конично сечение, вписано в ΔABC .

Целта на настоящата работа е да се покаже едно обобщение на теоремата на Дроз-Фарни от гледна точка на описаните за триъгълника криви от втора степен. Споменатите по-горе резултати ще се получат по естествен начин от настоящите изследвания. Така ще покажем друг начин за доказване на споменатите резултати, свързани с конични сечения. Освен това ще намерим и някои нови резултати.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC . Спрямо ΔABC ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Grozdev & Nenkov, 2015). Средите на страните BC , CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, а с $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – медицентъра на ΔABC . В равнината на ΔABC ще разглеждаме произволно конично сечение $\bar{k}(O)$ с център $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$). Координатите на точките от $\bar{k}(O)$ удовлетворяват уравнението

$$(1) \quad (1 - 2x_0)x_0yz + (1 - 2y_0)y_0zx + (1 - 2z_0)z_0xy = 0.$$

Преди да преминем към обобщението на теоремата на Дроз-Фарни, ще припомним някои понятия, свързани с описаната крива. Освен това в някои от изследванията ще използваме програмата The Geometer's Sketchpad (Gsp).



Фигура 1

2. Ойлерова права и Ойлерова крива, асоциирани с описана за триъгълника крива. Забележителните за триъгълника права на Ойлер и ок-

ръжност на Ойлер могат да се обобщят спрямо произволна описана за $\triangle ABC$ крива. Определяме правите h_a , h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A , B и C и успоредни съответно на правите OM_a , OM_b и OM_c (фиг. 1). Тези прави се пресичат в една точка $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$, която се получава от O посредством равенството $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Тъй като точката H притежава свойства, подобни на ортоцентъра, ще я наричаме ортоид на $\triangle ABC$ относно $\bar{k}(O)$, а правата OH – Ойлерова права, асоциирана с $\bar{k}(O)$ (фиг. 1). Средите на отсечките AH , BH , CH и точките M_a , M_b , M_c , $h_a \cap BC$, $h_b \cap CA$, $h_c \cap AB$ лежат на едно конично сечение Ω , което наричаме Ойлерова крива, асоциирана с $\bar{k}(O)$ (фиг. 1) (Mateev, 1977). Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(2) \quad \Omega: \quad 4[(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy] - \\ - [(1-2y_0)(1-2z_0)x + (1-2z_0)(1-2x_0)y + (1-2x_0)(1-2y_0)z](x+y+z) = 0.$$

Ойлеровата крива Ω има за център средата $F\left(\frac{1-x_0}{2}, \frac{1-y_0}{2}, \frac{1-z_0}{2}\right)$ на отсечката OH (фиг. 1).

Нека страните $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ на $\triangle A'B'C'$ минават съответно през върховете A , B и C на $\triangle ABC$, като са съответно успоредни на BC , CA и AB (фиг. 1). Кривата $\bar{k}'(H)$, която има за център точката H и е описана около $\triangle A'B'C'$, е хомотетична на $\bar{k}(O)$ с център на хомотетия G и коефициент (фиг. 1). Затова спрегнатите диаметри на $\bar{k}'(H)$ са спрегнати прави спрямо $\bar{k}(O)$. Това наблюдение обяснява връзката на изследванията, които следват, с описаното в Бележката⁵ пояснение към работата в Бележката⁴.

3. Обобщение на теоремата на Дроз-Фарни. Тъй като ортоидът H спрямо $\bar{k}(O)$ има свойства, подобни на тези на ортоцентъра спрямо описаната за триъгълника окръжност, то е естествено в оригиналната теорема на Дроз-Фарни да заместим ортоцентъра с ортоида. От друга страна, перпендикулярните прави в теоремата на Дроз-Фарни са спрегнати спрямо описаната окръжност. Затова е естествено да заменим тези прави с прави през ортоида H , които са спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$.

Нека l_1 е права през H , която е колинеарна с вектор (α, β, γ) ($\alpha + \beta + \gamma = 0$). Тогава параметричните уравнения на l_1 се изразяват с равенствата

$$(3) \quad l_1: x = 1 - 2x_0 + \alpha t, \quad y = 1 - 2y_0 + \beta t, \quad z = 1 - 2z_0 + \gamma t.$$

Преди да продължим, за да се опрости записът на някои от следващите изрази, въвеждаме следните означения:

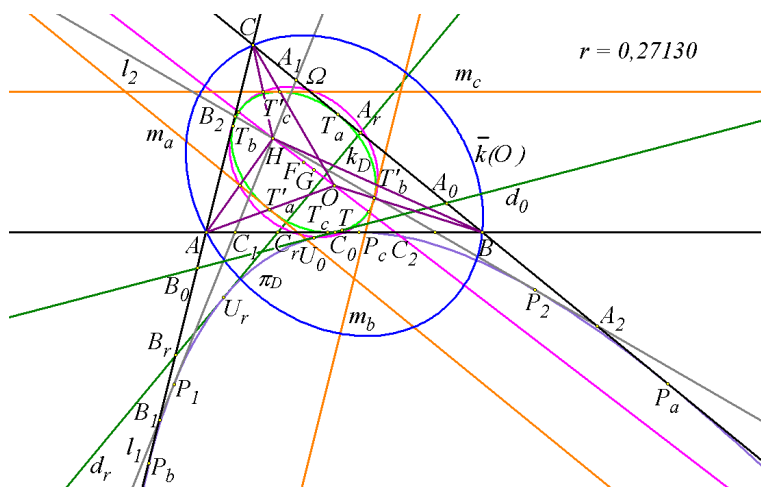
$$\begin{aligned} \dot{u}_a &= (1-2x_0)\beta - (1-2y_0)\gamma, \quad p_b = (1-2x_0)\gamma - (1-2z_0)\alpha, \\ p_c &= (1-2y_0)\alpha - (1-2x_0)\beta, \quad f = (1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta. \end{aligned}$$

Оттук се получават равенствата

$$(4) \quad p_b p_c = 2f - (1-2x_0)\beta\gamma, \quad p_c p_a = 2f - (1-2y_0)\gamma\alpha, \quad p_a p_b = 2f - (1-2z_0)\alpha\beta.$$

От (3) и уравненията на правите BC , CA и AB намираме, че точките $A_1 = l_1 \cap BC$, $B_1 = l_1 \cap CA$ и $C_1 = l_1 \cap AB$ имат следните координати

$$(5) \quad A_1\left(0, \frac{p_c}{\alpha}, -\frac{p_b}{\alpha}\right), \quad B_1\left(-\frac{p_c}{\beta}, 0, \frac{p_a}{\beta}\right), \quad C_1\left(\frac{p_b}{\gamma}, -\frac{p_a}{\gamma}, 0\right).$$



Фигура 2

Нека сега правата l_2 , минаваща през H , е спрегната с l_1 спрямо $\bar{k}(O)$. Ако векторът $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ е спрегнат с (α, β, γ) , то уравненията на l_2 записваме във вида

$$(6) \quad l_2 : x = 1 - 2x_0 + \alpha_1 t_1, \quad y = 1 - 2y_0 + \beta_1 t_1, \quad z = 1 - 2z_0 + \gamma_1 t_1.$$

От резултатите за спрегнати вектори, получени в (Grozdev & Nenkov, 2015), следва, че са изпълнени равенствата: $\alpha_1 = -(1-2x_0)p_a$, $\beta_1 = -(1-2y_0)p_b$, $\gamma_1 = -(1-2z_0)p_c$. От тези равенства, от (6) и от уравненията на правите BC , CA и AB намираме, че точките $A_2 = l_2 \cap BC$, $B_2 = l_2 \cap CA$ и $C_2 = l_2 \cap AB$ имат следните координати

$$(7) \quad \begin{aligned} A_2 & \left(0, -\frac{(1-2y_0)\gamma}{p_a}, \frac{(1-2z_0)\beta}{p_a} \right), \\ B_2 & \left(\frac{(1-2x_0)\gamma}{p_b}, 0, -\frac{(1-2z_0)\alpha}{p_b} \right), \\ C_2 & \left(-\frac{(1-2x_0)\alpha}{p_c}, \frac{(1-2y_0)\beta}{p_c}, 0 \right). \end{aligned}$$

Нека $r \neq 1$ е реално число, а точките A_r , B_r и C_r са такива, че са изпълнени равенствата $\frac{\overline{A_1 A_r}}{\overline{A_2 A_r}} = r$, $\frac{\overline{B_1 B_r}}{\overline{B_2 B_r}} = r$, $\frac{\overline{C_1 C_r}}{\overline{C_2 C_r}} = r$. Тогава от (5) и (7) за координатите на точките A_r , B_r и C_r получаваме

$$(8) \quad \begin{aligned} A_r & \left(0, \frac{2f - (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha}{(1-r)\alpha p_a}, \frac{-2f + (1-r)(1-2z_0)\alpha\beta}{(1-r)\alpha p_a} \right), \\ B_r & \left(\frac{-2f + (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma}{(1-r)\beta p_b}, 0, \frac{2f - (1-r)(1-2z_0)\alpha\beta}{(1-r)\beta p_b} \right), \\ C_r & \left(\frac{2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma}{(1-r)\gamma p_c}, \frac{-2f + (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha}{(1-r)\gamma p_c}, 0 \right). \end{aligned}$$

Сега да отбележим, че точките $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

От (8) и (9) получаваме, че точките A_r , B_r и C_r лежат на една права d_r (фиг. 2), чието уравнение е следното

$$(10) \quad d_r : \begin{aligned} & [2f - (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha][2f - (1-r)(1-2z_0)\alpha\beta]x + \\ & + [2f - (1-r)(1-2z_0)\alpha\beta][2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma]y + \\ & + [2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma][2f - (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha]z = 0. \end{aligned}$$

По този начин получихме следното обобщение на теоремата на Дроз-Фарни.

Теорема 1. *Спрегнатите спрямо описаното конично сечение $\bar{k}(O)$ прави l_1 и l_2 минават през ортоида H на $\triangle ABC$, определен от $\bar{k}(O)$. Ако l_i ($i=1,2$) пресича правите BC , CA и AB съответно в точките A_i , B_i и C_i ($i=1,2$), то точките A_r , B_r и C_r , делящи съответно отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 в просто отношение r , лежат на една права d_r (фиг. 2).*

Правата d_r ще наричаме *обобщена права на Дроз-Фарни, съответстваща на спрегнатите спрямо $\bar{k}(O)$ прави l_1 и l_2* . В случая, при който $r = -1$, приемаме, че $A_0 \equiv A_{-1}$, $B_0 \equiv B_{-1}$ и $C_0 \equiv C_{-1}$. В този случай от теорема 1 се получава следното

Следствие 1. Средите A_0 , B_0 и C_0 на отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 лежат на една права d_0 (фиг. 2).

Правата d_0 ще наричаме *права на Дроз-Фарни, съответстваща на спрегнатите спрямо $\bar{k}(O)$ прави l_1 и l_2* . От (10), при $r = -1$, се получава, че уравнението на правата на Дроз-Фарни спрямо $\bar{k}(O)$ има следното уравнение

$$(11) \quad d_0 : \begin{aligned} & [f - (1-2y_0)\gamma\alpha][f - (1-2z_0)\alpha\beta]x + \\ & + [f - (1-2z_0)\alpha\beta][f - (1-2x_0)\beta\gamma]y + \\ & + [f - (1-2x_0)\beta\gamma][f - (1-2y_0)\gamma\alpha]z = 0. \end{aligned}$$

4. Крива на Дроз-Фарни. Ако с помощта на GSP извършим някои целенасочени наблюдения, се забелязва, че когато правите l_1 и l_2 описват множеството на всички двойки спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$ прави, които минават през точката H , правата на Дроз-Фарни d_0 описва множеството от допирателните към едно вписано в $\triangle ABC$ конично сечение. Затова си поставяме задачата да определим тази крива и някои нейни свойства.

Лесно се забелязва, че правата m_c , спрегната на CH , е успоредна на AB . Оттук се вижда, че правата на Дроз-Фарни, съответстваща на тези спрегнати прави, минава през средата на CH (фиг. 2). Аналогични свойства притежават и правите m_a и m_b , които са спрегнати съответно на AH и BH (фиг. 2). Сега с GSP лесно се построява крива, която се допира до правите BC , CA , AB , m_a , m_b и m_c (фиг. 2). Наблюденията с GSP ни показват, че построената крива се допира до правата m_c в пресечната точка на m_c и OC (фиг. 2). Тъй като правите m_c и OC имат съответно уравнения $z = 1 - z_0$ и $y_0x - x_0y = 0$, то за координатите на пресечната им точка ' получаваме $T'_c \left(\frac{z_0x_0}{1-z_0}, \frac{y_0z_0}{1-z_0}, 1-z_0 \right)$.

Аналогично се определят координатите на точките $T'_a = m_a \cap OA$ и $T'_b = m_b \cap OB$. Така, като обобщим получените резултати, имаме

$$(12) \quad T'_a \left(1-x_0, \frac{x_0y_0}{1-x_0}, \frac{z_0x_0}{1-x_0} \right), T'_b \left(\frac{x_0y_0}{1-y_0}, 1-y_0, \frac{y_0z_0}{1-z_0} \right), T'_c \left(\frac{z_0x_0}{1-z_0}, \frac{y_0z_0}{1-z_0}, 1-z_0 \right).$$

Наблюденията с GSP показват още, че центърът на построената крива съвпада с центъра F на Ойлеровата крива Ω (фиг. 2). Следователно, ако кривата се допира до BC , CA и AB съответно в точките T_a , T_b и T_c , то тези точки са симетрични съответно на T'_a , T'_b и T'_c спрямо F (фиг. 2). Така за координатите на точките T_a , T_b и T_c намираме

$$(13) \quad T_a \left(0, \frac{z_0}{1-x_0}, \frac{y_0}{1-x_0} \right), T_b \left(\frac{z_0}{1-y_0}, 0, \frac{x_0}{1-y_0} \right), T_c \left(\frac{y_0}{1-z_0}, \frac{x_0}{1-z_0}, 0 \right).$$

Сега ще намерим уравнението на кривата от втора степен k_D , която минава през точките T_a , T_b , T_c , T'_a , T'_b и T'_c . За целта извършваме смяна на координатния триъгълник ABC с $T_aT_bT_c$. Ако координатите на точка P спрямо ΔABC са (x, y, z) , а спрямо $\Delta T_aT_bT_c$ са (x', y', z') , то са изпълнени равенствата

$$(14) \quad x = \frac{z_0}{1-y_0}y' + \frac{y_0}{1-z_0}z', \quad y = \frac{z_0}{1-x_0}x' + \frac{x_0}{1-z_0}z', \quad z = \frac{y_0}{1-x_0}x' + \frac{x_0}{1-y_0}y' \quad [9].$$

От (14) следват и равенствата

$$(15) \quad x' = \frac{1-x_0}{2y_0z_0}(-x_0x + y_0y + z_0z), \quad y' = \frac{1-y_0}{2z_0x_0}(x_0x - y_0y + z_0z), \quad z' = \frac{1-z_0}{2x_0y_0}(x_0x + y_0y - z_0z).$$

Тъй като спрямо $\triangle ABC$ точката F има координати $x_F = \frac{1-x_0}{2}$, $y_F = \frac{1-y_0}{2}$, $z_F = \frac{1-z_0}{2}$, то за координатите (x'_F, y'_F, z'_F) на F спрямо $\triangle T_a T_b T_c$ от (15) се получават равенствата $x'_F = \frac{1-x_0}{2}$, $y'_F = \frac{1-y_0}{2}$, $z'_F = \frac{1-z_0}{2}$. Сега от (1) следва, че уравнението на k_D е от вида $(1-2x'_F)x'_F y'_F z'_F + (1-2y'_F)y'_F z'_F x'_F + (1-2z'_F)z'_F x'_F y'_F = 0$. След заместване в последното равенство на координатите на F и равенствата (15) получаваме уравнението

$$(16) \quad k_D : (1-x_0)^2 yz + (1-y_0)^2 zx + (1-z_0)^2 xy - (x_0^2 x + y_0^2 y + z_0^2 z)(x+y+z) = 0.$$

Сега остава да докажем, че намерената крива притежава свойството да се допира до всяка права d_0 с уравнение (11). След заместване на z от равенството $z = 1 - x - y$ в (11) получаваме $y = \frac{[f - (1-2y_0)\gamma\alpha][f - (1-2x_0)\beta\gamma + p_b\beta x]}{p_a\alpha[f - (1-2x_0)\beta\gamma]}$. Този израз за y замества в уравнението (16) на кривата k_D и след известни преобразувания установяваме, че полученото квадратно уравнение притежава двоен корен $x = \frac{[f - (1-2x_0)\beta\gamma]^2 x_0}{\tau}$, където $\tau = -f^2 + (1-2x_0)^2 x_0 \beta^2 \gamma^2 + (1-2y_0)^2 y_0 \gamma^2 \alpha^2 + (1-2z_0)^2 z_0 \alpha^2 \beta^2$. Сега се връщаме към предишните две равенства и получаваме останалите две координати на допирната точка $T(x_T, y_T, z_T)$ на правата d_0 с k_D . След обобщаване на получените резултати имаме:

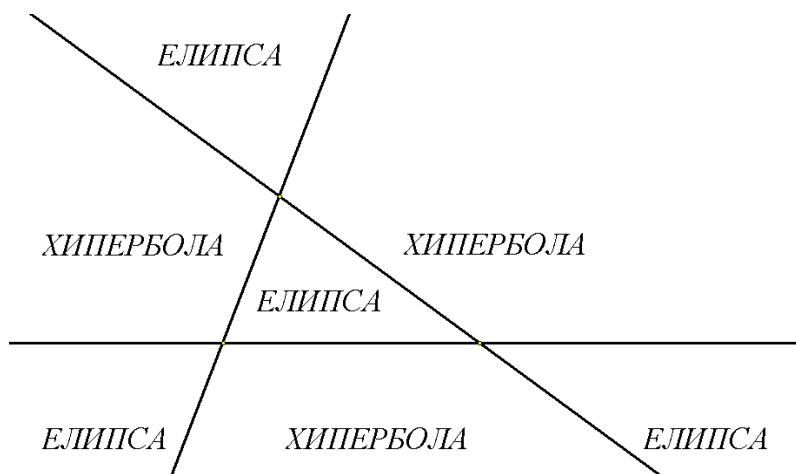
$$(17) \quad x_T = \frac{[f - (1-2x_0)\beta\gamma]^2 x_0}{\tau}, \quad y_T = \frac{[f - (1-2y_0)\gamma\alpha]^2 y_0}{\tau}, \quad z_T = \frac{[f - (1-2z_0)\alpha\beta]^2 z_0}{\tau},$$

където

$$\tau = (1-2x_0)^2 x_0 \beta^2 \gamma^2 + (1-2y_0)^2 y_0 \gamma^2 \alpha^2 + (1-2z_0)^2 z_0 \alpha^2 \beta^2 - f^2.$$

Следователно всяка права d_0 на Дроз-Фарни наистина се допира до кривата k_D . Така доказахме следната

Теорема 2. Когато правите l_1 и l_2 описват множеството на всички двойки спрегнати спрямо $k(O)$ прави, които минават през точката H , съответната права на Дроз-Фарни d_0 описва множеството от допирателните към едно вписано в $\triangle ABC$ конично сечение k_D .



Фигура 3

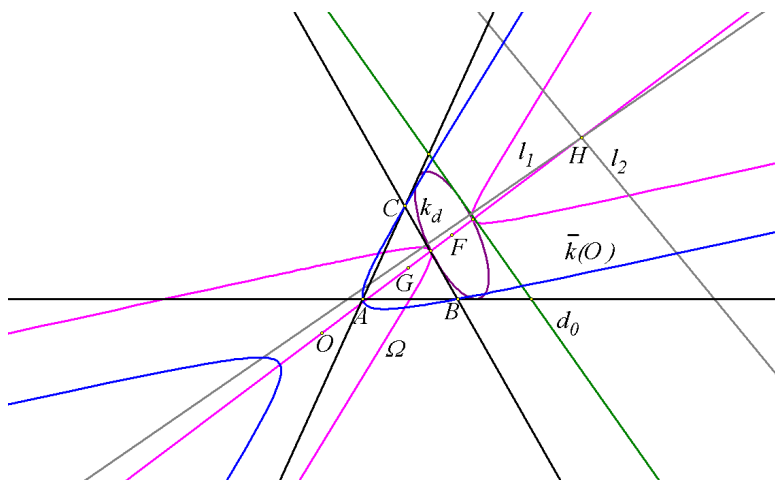
Кривата k_D ще наричаме крива на Дроз-Фарни спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$. Тази крива притежава някои интересни свойства. Първо ще отбележим, че видът на k_D може да се определи, като се реши системата от уравнението на безкрайната права $x + y + z = 0$ и уравнението (16) на k_D . След елиминирание на z от тези уравнения получаваме $(1 - y_0)^2 x^2 + 2(z_0 - x_0 y_0)xy + (1 - x_0)^2 y^2 = 0$. Дискриминантата на тази квадратична форма е $D = -4x_0 y_0 z_0$. Оттук следва, че видът на кривата на Дроз-Фарни k_D зависи само от положението на центъра O . По-специално, кривата k_D никога не е парабола. Зависимостта на вида на кривата на Дроз-Фарни k_D от положението на центъра O на описаната крива $\bar{k}(O)$ в равнината на $\triangle ABC$ е показана на фиг. 3. Различни видове криви k_D са показани на фиг. 2, 4, 5, 6. На тези фигури се забелязва, че съществуват всички възможни комбинации от видове на двойките криви $\bar{k}(O)$ и k_D .

Наблюденията с GSP показват още, че е изпълнена следната

Теорема 3. Кривата на Дроз-Фарни k_D и Ойлеровата крива Ω се допират в точки, лежащи на Ойлеровата права, асоциирана с $\bar{k}(O)$ (фиг. 2, 4, 5, 6).

Доказателството на това твърдение се получава лесно чрез следните пресмятания. Уравнението на Ойлеровата права е $(y_0 - z_0)x + (z_0 - x_0)y + (x_0 - y_0)z = 0$. От това уравнение и равенството $z = 1 - x - y$ получаваме $y = \frac{(1 - 3y_0)x - x_0 + y_0}{1 - 3x_0}$. След заместване на това равенство в уравненията (2) и (16) на кривите k_D и Ω получаваме квад-

ратното уравнение $4\Delta x^2 - 4(1-x_0)\Delta x - (1-2x_0)^2(y_0-z_0)^2 = 0$, където $\Delta = (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) - x_0y_0z_0$. Това означава, че кривите k_D и Ω пресичат Ойлеровата права в една и съща двойка точки. Освен това от $z = 1 - x - y$ и уравненията (2) и (16) получаваме, че общите точки на кривите k_D и Ω удовлетворяват същото уравнение. Следователно концентричните криви k_D и Ω имат само две общи точки, лежащи върху техен общ диаметър – Ойлеровата права. Затова те се допират в тези точки.



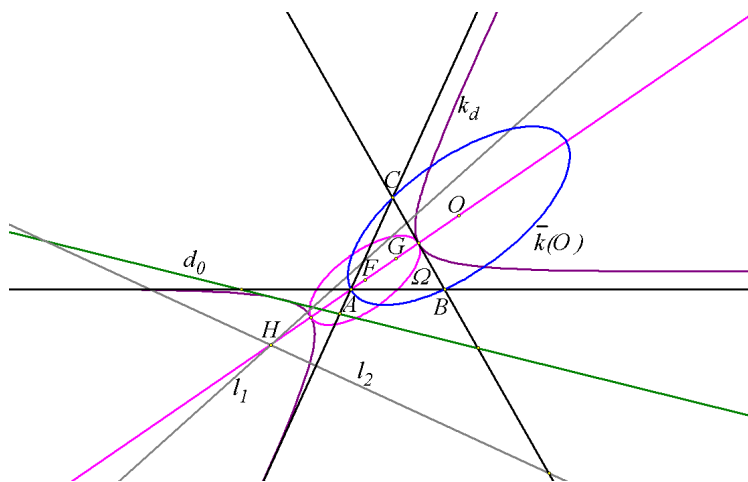
Фигура 4

По отношение на обобщените прави на Дроз-Фарни експериментите с GSP показват, че теорема 2 не е вярна.

5. Парабола на Дроз-Фарни. От проективни съображения следва, че петте прави $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, l_1 и l_2 са допирателни за еднозначно определено конично сечение π_D [12]. Затова е интересно на намерим уравнението на кривата π_D , допираща се до тези прави. За намирането на уравнението на кривата π_D е необходимо да знаем допирните ѝ точки с правите a ,

b , c , l_1 и l_2 . Тези точки ще определим с помощта на теоремата на Брианшон (Mateev, 1977). За да определим допирната точка P_a на π_D с правата a , прилагаме теоремата на Брианшон за правите $aabcl_1l_2$. Тук правите CH и AA_2 се пресичат в точка K_1 , която лежи на правата през C_1 и P_a . От уравненията на CH и AA_2 лесно се намират координатите на пресечната им точка $K_1\left(-\frac{(1-2x_0)\gamma}{\beta+2\alpha z_0}, -\frac{(1-2y_0)\gamma}{\beta+2\alpha z_0}, \frac{(1-2z_0)\beta}{\beta+2\alpha z_0}\right)$. Сега от уравненията на правите C_1K_1 и a получаваме $P_a\left(0, -\frac{p_c\gamma}{p_a\alpha}, -\frac{p_b\beta}{p_a\alpha}\right)$. По аналогичен начин след прилагане на теоремата на Брианшон за последователностите от шесторки прави $bbac l_1l_2$ и $ccba l_1l_2$ се получават координатите на допирните точки P_b и P_c на π_D съответно с b и c . Така, като обобщим резултатите, имаме

$$(18) \quad P_a\left(0, -\frac{p_c\gamma}{p_a\alpha}, -\frac{p_b\beta}{p_a\alpha}\right), P_b\left(-\frac{p_c\gamma}{p_b\beta}, 0, -\frac{p_a\alpha}{p_b\beta}\right), P_c\left(-\frac{p_b\gamma}{p_c\gamma}, -\frac{p_a\alpha}{p_c\gamma}, 0\right).$$



Фигура 5

Допирната точка P_1 на правата l_1 с π_D определяме от теоремата на Брианшон за последователността от прави $l_1l_1abcl_2$. Тук правите CH и A_1C_2 се пресичат в точка L_1 , която лежи на правата през A и P_1 . От уравненията на CH и A_1C_2 намираме коорди-

натите на пресечната им точка $x_{l_1} = \frac{(1-2x_0)p_c\beta}{(1-2x_0)^2\beta\gamma - 2(1-2y_0)y_0\gamma\alpha + 4z_0^2\alpha\beta}$,

$$y_{l_1} = \frac{(1-2y_0)p_c\beta}{(1-2x_0)^2\beta\gamma - 2(1-2y_0)y_0\gamma\alpha + 4z_0^2\alpha\beta}, \quad z_{l_1} = \frac{-(1-2y_0)[(1-2x_0)\beta + 2y_0\alpha]\gamma}{(1-2x_0)^2\beta\gamma - 2(1-2y_0)y_0\gamma\alpha + 4z_0^2\alpha\beta}.$$

Сега от уравнения на правите AL_1 и l_1 получаваме

$$(19) \quad P_1 \left(-\frac{p_b p_c}{\beta\gamma}, -\frac{p_c p_a}{\gamma\alpha}, -\frac{p_a p_b}{\alpha\beta} \right).$$

Допирната точка P_2 на правата l_2 с π_D определяме от теоремата на Брианшон за последователността от прави $l_2 l_2 abcl_1$. Тук правите CH и A_2C_1 се пресичат в точка L_2 , която лежи на правата през A и P_2 . От уравнения на CH и A_2C_1 намираме координатите на пресечната им точка

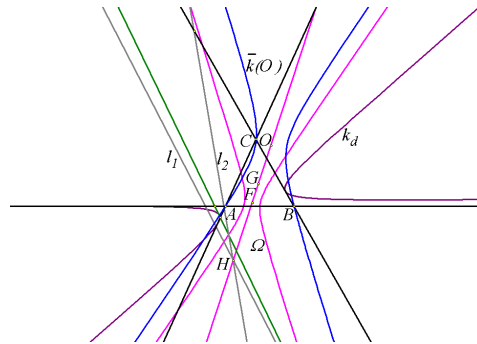
$$x_{L_2} = \frac{(1-2x_0)(1-2y_0)p_b\gamma}{(1-2x_0)(1-2z_0-4z_0x_0)\beta\gamma - 4(1-2y_0)y_0z_0\gamma\alpha + 4(1-2z_0)^2z_0\alpha\beta},$$

$$y_{L_2} = \frac{(1-2y_0)^2p_b\gamma}{(1-2x_0)(1-2z_0-4z_0x_0)\beta\gamma - 4(1-2y_0)y_0z_0\gamma\alpha + 4(1-2z_0)^2z_0\alpha\beta},$$

$$z_{L_2} = \frac{(1-2x_0)(1-4y_0z_0-4z_0x_0)\beta\gamma + 4(1-2z_0)^2z_0\alpha\beta}{(1-2x_0)(1-2z_0-4z_0x_0)\beta\gamma - 4(1-2y_0)y_0z_0\gamma\alpha + 4(1-2z_0)^2z_0\alpha\beta}.$$

Сега от уравнения на правите AL_2 и l_2 получаваме

$$(20) \quad P_2 \left(-\frac{(1-2x_0)^2\beta\gamma}{p_b p_c}, -\frac{(1-2y_0)^2\gamma\alpha}{p_c p_a}, -\frac{(1-2z_0)^2\alpha\beta}{p_a p_b} \right).$$



Фигура 6

По-нататък ще намерим уравнението на кривата от втора степен π_D , която минава през точките P_a, P_b, P_c, P_1 и P_2 . За целта извършваме смяна на координатния триъгълник ABC с $P_a P_b P_c$. Ако координатите на точка P спрямо ΔABC са (x, y, z) , а спрямо $\Delta P_a P_b P_c$ са (x'', y'', z'') , то са изпълнени равенствата

$$(21) \quad x = -\frac{p_c \gamma}{p_b \beta} y'' - \frac{p_b \beta}{p_c \gamma} z'', \quad y = -\frac{p_c \gamma}{p_a \alpha} x'' - \frac{p_a \alpha}{p_c \gamma} z'', \quad z = -\frac{p_b \beta}{p_a \alpha} x'' - \frac{p_a \alpha}{p_b \beta} y''$$

(Grozdev & Nenkov, 2014).

От (21) следват и равенствата

$$(22) \quad \begin{aligned} x'' &= \frac{p_a \alpha}{2 p_b p_c \beta \gamma} (-p_a \alpha x + p_b \beta y + p_c \gamma z), \\ y'' &= \frac{p_b \beta}{2 p_c p_a \gamma \alpha} (p_a \alpha x - p_b \beta y + p_c \gamma z), \\ z'' &= \frac{p_c \gamma}{2 p_a p_b \alpha \beta} (p_a \alpha x + p_b \beta y - p_c \gamma z). \end{aligned}$$

От (19), (20) и (22) намираме, че координатите на P_1 и P_2 спрямо $\Delta P_a P_b P_c$ са следните

$$(23) \quad \begin{aligned} P_1 &\left(-\frac{p_a^2}{\beta \gamma}, -\frac{p_b^2}{\gamma \alpha}, -\frac{p_c^2}{\alpha \beta} \right), \\ P_2 &\left(-\frac{(1-2y_0)(1-2z_0)\alpha^2}{p_b p_c}, -\frac{(1-2z_0)(1-2x_0)\beta^2}{p_c p_a}, -\frac{(1-2x_0)(1-2y_0)\gamma^2}{p_a p_b} \right). \end{aligned}$$

Уравнението на π_D спрямо $\Delta P_a P_b P_c$ има вида $a_{11} y'' z'' + a_{22} z'' x'' + a_{33} x'' y'' = 0$. След заместване на координатите (23) в това равенство намираме, че $a_{11} = p_a^3 \alpha^2$, $a_{22} = p_b^3 \beta^2$ и $a_{33} = p_c^3 \gamma^2$. Сега, като заместим тези равенства и

равенствата (22) в уравнението на кривата, окончателно получаваме

$$(24) \quad \pi_D : p_a^2 \alpha^2 yz + p_b^2 \beta^2 zx + p_c^2 \gamma^2 xy - (p_a^2 \alpha^2 x + p_b^2 \beta^2 y + p_c^2 \gamma^2 z)(x + y + z) = 0.$$

След заместване на $z = -x - y$ в (24) получаваме равенството $(p_b \beta x - p_a \alpha y)^2 = 0$. Това равенство означава, че кривата π_D е парабола. От последното равенство лесно се вижда още, че параболата π_D има ос, направление на която се определя от вектора $\vec{p}(p_a \alpha, p_b \beta, p_c \gamma)$.

Сега ще докажем, че намерената парабола притежава забележителното свойство да се допира до всяка права d_r с уравнение (10). След заместване на z от равенството $z = 1 - x - y$ в (10) получаваме

$$y = \frac{[2f - (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha][2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma + (1-r)p_b\beta x]}{(1-r)p_a\alpha[2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma]}.$$

Този израз за y замества в уравнението (24) на параболата π_D и след известни преобразувания установяваме, че полученото квадратно уравнение притежава двоен корен $x = -\frac{[2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma]^2}{(1-r)^2 p_b p_c \beta \gamma}$. Сега се връщаме към пре-

дишните две равенства и получаваме останалите две координати на допирната точка $U_r(x_{U_r}, y_{U_r}, z_{U_r})$ на правата d_r с . След обобщаване на получените резултати имаме:

$$(25) \quad \begin{aligned} x_{U_r} &= -\frac{[2f - (1-r)(1-2x_0)\beta\gamma]^2}{(1-r)^2 p_b p_c \beta \gamma}, \\ y_{U_r} &= -\frac{[2f - (1-r)(1-2y_0)\gamma\alpha]^2}{(1-r)^2 p_c p_a \gamma \alpha}, \\ z_{U_r} &= -\frac{[2f - (1-r)(1-2z_0)\alpha\beta]^2}{(1-r)^2 p_a p_b \alpha \beta}. \end{aligned}$$

Следователно правата d_r се допира до параболата π_D в точка U_r , чиито координати се изразяват с равенствата (25). Оттук следва, че ако r пробягва множеството на реалните числа, обобщените прави d_r на Дроз-Фарни описват множеството на всички допирателни на вписаната в $\triangle ABC$ парабола π_D . Така доказахме следната

Теорема 4. Ако l_1 и l_2 са две фиксирани спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$ прави, които минават през ортоида H , то множеството на всички прави на Дроз-Фарни, определени от l_1 и l_2 , образуват обвивка на парабола π_D , вписана в $\triangle ABC$.

От равенствата (25) се вижда, че правата на Дроз-Фарни d_0 се допира до параболата π_D в точката $U(x_{U_0}, y_{U_0}, z_{U_0})$, чиито координати се изразяват с равенствата:

$$(26) \quad x_{U_0} = -\frac{[f - (1-2x_0)\beta\gamma]^2}{p_b p_c \beta \gamma}, \quad y_{U_0} = -\frac{[f - (1-2y_0)\gamma\alpha]^2}{p_c p_a \gamma \alpha}, \quad z_{U_0} = -\frac{[f - (1-2z_0)\alpha\beta]^2}{p_a p_b \alpha \beta}.$$

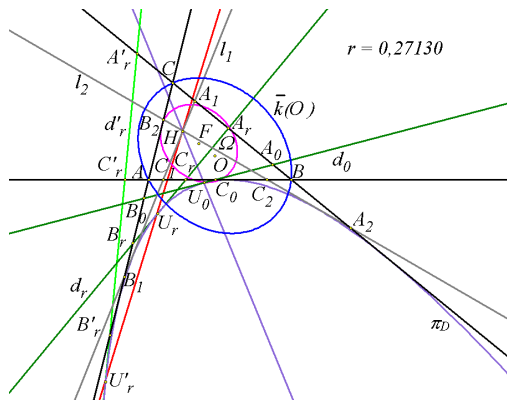
Още едно любопитно свойство на допирателните към параболата π_D е свързано с хармонично спрегнатите точки A'_r, B'_r, C'_r съответно на A_r, B_r, C_r спрямо съответните двойки точки $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$. От (25) следва, че координатите на допирателната d'_r към π_D , минаваща през точките A'_r, B'_r и C'_r , получаващи се при заместването на r с $-r$, се определят с равенствата

$$(27) \quad \begin{aligned} x_{U'_r} &= -\frac{[2f - (1+r)(1-2x_0)\beta\gamma]^2}{(1+r)^2 p_b p_c \beta \gamma}, \\ y_{U'_r} &= -\frac{[2f - (1+r)(1-2y_0)\gamma\alpha]^2}{(1+r)^2 p_c p_a \gamma \alpha}, \\ z_{U'_r} &= -\frac{[2f - (1+r)(1-2z_0)\alpha\beta]^2}{(1+r)^2 p_a p_b \alpha \beta}. \end{aligned}$$

Заместваме координатите на точките U_r и U'_r от (25) и (27) и координатите $x_H = 1 - 2x_0, y_H = 1 - 2y_0, z_H = 1 - 2z_0$ на H в лявата страна на (9). След извършване на известни преобразувания се получава, че (9) е вярно равенство. Така получаваме следното

Следствие 2. Точките U_r и U'_r лежат на една права с ортоида H .

В случая, когато разглеждаме правата на Дроз-Фарни d_0 , правата d'_0 е безкрайната права. Тя, от своя страна, се допира до параболата π_D в нейната безкрайна точка. Следователно правата HU_0 е коллинеарна с оста на параболата. Това се доказва и като се забележи, че HU_0 е коллинеарен с вектора $p(p_a\alpha, p_b\beta, p_c\gamma)$, който определя направлението на оста на параболата π_D .



Фигура 7

Заклучение. Полученото обобщение на теоремата на Дроз-Фарни беше съпроводено с описанието на две специални вписани за ΔABC криви, които са определени от описаното конично сечение $k(O)$. Всъщност правите на Дроз-Фарни и обобщените прави на Дроз-Фарни определят две криви от втори клас при дадено описано за триъгълника конично сечение.

NOTES / БЕЛЕЖКИ

1. Pamfilos, P. Droz-Farny, an inverse view, http://www.researchgate.net/publication/273695589_Droz-Farny_an_inverse_view.
2. Ayme, J-L. A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem, <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200426.pdf>.
3. Pohoata, C., Son Hong Ta. A Short Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Line Theorem, <http://geometry.ru/articles/short-Droz-Farny.pdf>.
4. Ehrmann, J-P, Floor van Lamoen, A Projective Generalization of the Droz-Farny Line Theorem, <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200427.pdf>.
5. Thas, C. A Note on the Droz-Farny Theorem, http://www.researchgate.net/publication/238502384_A_Note_on_the_Droz-Farny_Theorem.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Sharygin, I. (1986). *Zadachi po geometrii. Planimetriya*. Moskva: Nauka, zad. 206, 157 – 158. [Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука, зад. 206, 157 – 158.]
- Karlov, E.(2015). Belezhki po teoremata na Droz-Farni, *Matematika*, 1, 27 – 28. [Карлов, Е.(2015). Бележки по теоремата на Дроз-Фарни, *Математика*, 1, 27 – 28.]
- Nenkov, V. (1996). Nay-estestvenite koordinatni osi za teoremata na Droz – Farni, *Matematika i informatika*, 2, 78 – 79. [Ненков, В. (1996). Най-естествените координатни оси за теоремата на Дроз-Фарни, *Математика и информатика*, 2, 78 – 79.]
- Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika*. Sofia: Narodna prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). *Obobshcheniya nekotorykh klassicheskikh teorem geometrii treugol'nika. Teoreticheskie i prikladnaye aspektay matematiki, informatiki i obrazovaniya. Sbornik materialov mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*. Arhangelsk: SAFU, 35 – 54. [Гроздев, С. & В. Ненков (2014). *Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и*

прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск: САФУ, 35 – 54.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Geometrichna konstruktsiya na kriva na Cheva, *Matematika i informatika*, 1, 52 – 57. [Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика*, 1, 52-57.]

Mateev, A. (1977). *Proektivna geometriya*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективная геометрия*. София: Наука и искусство.]

GENERALIZATION OF DROZ-RARNY THEOREM DEFINED BY A CIRCUM-CONIC

Abstract. A generalization of a well-known theorem of Droz-Farny is established concerning the circum-conics of a given triangle ABC . The described generalization is connected with special circum-conics of $\triangle ABC$.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev St.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg