

НЯКОЛКО ХОМОТЕТИЧНО ПОРОДЕНИ СВОЙСТВА НА ФОЙЕРБАХОВИТЕ КОНФИГУРАЦИИ

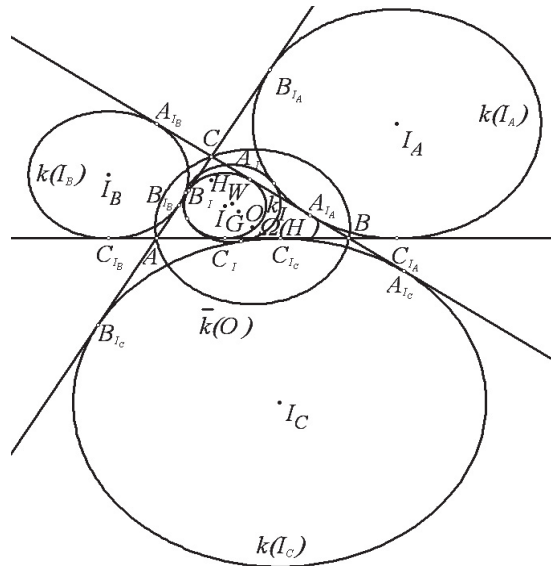
¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков, Деко Деков

¹Българска академия на науките, ²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия се разглеждат обобщения на няколко известни свойства от геометрията на триъгълника, свързани с вписаните и описаните окръжности. Тези обобщения са няколко свойства на една специална комбинация от централни конични сечения в равнината на триъгълника, наречена в (Ненков, 2010) Фойербахова конфигурация.

Key words: triangle, homothety, Feuerbach configuration, Euler curve

В началото ще припомним какво разбираме под понятието „Фойербахова конфигурация“. Нека ABC е произволен триъгълник. Означаваме с A_0 , B_0 и C_0 средите съответно на страните BC , CA , AB , а с G - медицентъра на $\triangle ABC$.



Фиг. 1

Нека I е произволна (крайна) точка, нележаща върху никоя от правите BC , CA , AB , B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 , а точките I_A , I_B и I_C образуват хармоничен триъгълник на I спрямо $\triangle ABC$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Разглеждаме точките I , I_A , I_B и I_C като центрове съответно на конични сечения (елипси или хиперболи) $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в $\triangle ABC$ (Фиг. 1). Означаваме допирните точки на $k(I)$ с правите BC , CA и AB , и съответно с A_I , B_I и C_I , а допирните точки на $k(I_s)$ ($s = A, B, C$) с правите BC , CA и AB съответно с A_s , B_s и C_s ($s = A, B, C$). Средите M_A , M_B , M_C , M_{BC} , M_{CA} и M_{AB} съответно на отсечките I_A , I_B , I_C , I_BI_C , I_CI_A и I_AI_B , както е показано в (Ненков, 2008), лежат на конично сечение $\bar{k}(O)$ с център O , описано около $\triangle ABC$. Точката H , която се получава от O чрез равенството $\overline{HG} = 2\overline{GO}$, поражда конично сечение $\Omega(H)$, минаващо през точките A_0 , B_0 , C_0 и пресечните точки на правите AH , BH , CH съответно с правите BC , CA , AB . Наричаме кривата $\Omega(H)$ *Ойлерова крива* на точката H спрямо $\triangle ABC$ (Фиг. 1).

Всяка от точките I , I_A , I_B , I_C , O и H еднозначно определя конфигурация от шест криви $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$, $\bar{k}(O)$ и $\Omega(H)$. Поради доказаното в (Ненков, 2008) характерно свойство на $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$ да се допират до $\Omega(H)$, ще наричаме такова множество от шест конични сечения *Фойербахова конфигурация*.

Въвеждаме означенията: правата през I , успоредна на BC , пресича правите OMA и I_AI_A съответно в точки $A(I)$ и $A'(I)$; по аналогичен начин се получават двойките точки $B(I)$, $B'(I)$ и $C(I)$, $C'(I)$ от правите през I , съответно успоредни на страните CA и AB ; правата през I_A , успоредна на BC , пресича правите OMA и I_AI_A съответно в точки $A(I_A)$ и $A'(I_A)$; аналогично се получават двойките точки $B(I_B)$, $B'(I_B)$ и $C(I_C)$, $C'(I_C)$ от правите през I_B и I_C , съответно успоредни на страните CA и AB .

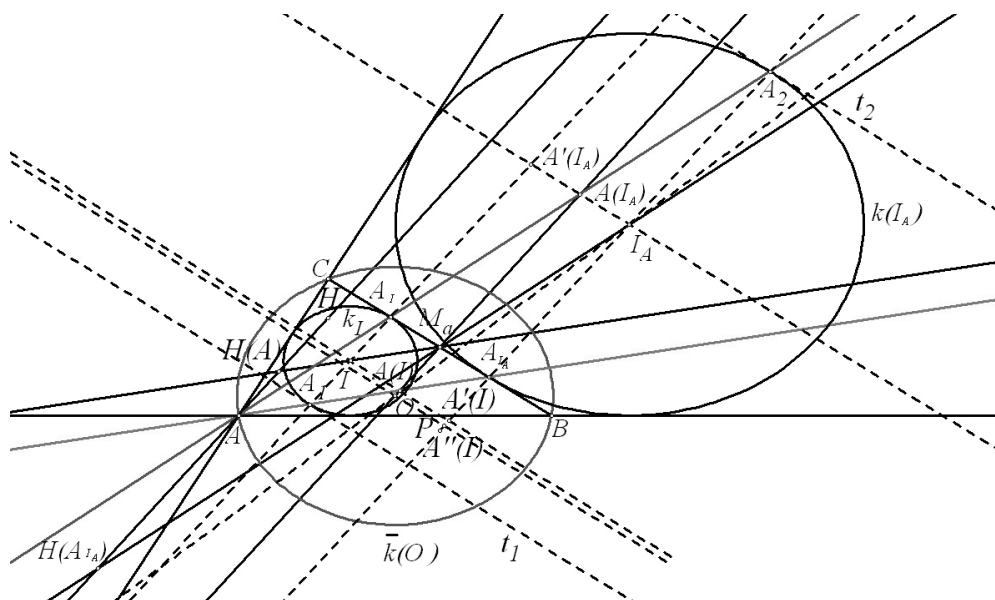
Във връзка с току-що въведените точки ще докажем едно твърдение, което има централна роля в обосноваването на следващите.

Твърдение 1. *Точките $A(I)$, $B(I)$, $C(I)$, $A(I_A)$, $B(I_B)$ и $C(I_C)$ са среди съответно на отсечките $IA'(I)$, $IB'(I)$, $IC'(I)$, $I_AA'(I_A)$, $I_BB'(I_B)$ и $IC'(I_C)$.*

Идеята за доказателство на това твърдение е подобна на изложената в (Табов, 1994). Тя се състои в използването на факта, че всеки две криви във Фойербаховата конфигурация са хомотетични (Ненков, 2010). Разглеждаме хомотетия h_a с център A и преобразуваща $k(I_A)$ в $k(I)$. Ако $h_a(A_{I_A}) = A_1$ и $h_a(BC) = t_1$, от свойствата на хомотетията следва, че t_1 е допирателна към $k(I)$ в A_1 и $t_1 \parallel BC$. Следователно A_1 е диаметрално противоположна на A_I върху $k(I)$. Сега ако $IA(I) \cap (A_{I_A} \equiv A_1A_{I_A}) = A'$, то се получава, че A' е средата на $A_1A_{I_A}$.

От свойството на допирателните, изразяващо се с равенството $|BA_I| = |CA_{I_A}|$ (доказано в (Ненков, 2010)), лесно се вижда, че M_a е среда на отсечката $A_I A_{I_A}$. Следователно $M_a A'$ е средна отсечка в $\triangle A_1 A_I A_{I_A}$ и затова е успоредна на IA_I , която

по построение е успоредна на OM_a . Затова правата M_aA' минава през O . По друг начин казано, A' лежи на правата OM_a . Следователно $A' \equiv A(I)$. Така показахме, че $A(I) \in A_{I_A}$ и че $A(I)$ е среда на отсечката $IA'(I)$. Аналогично се показва, че $B(I) \in B_{I_B}$ и $C(I) \in C_{I_C}$ като същевременно $B(I)$ и $C(I)$ са среди съответно на отсечките $IB'(I)$ и $IC'(I)$. По подобен начин следва, че $A(I_A) \in AA_I$, $B(I_B) \in BB_I$, $C(I_C) \in CC_I$, като същевременно $A(I_A)$, $B(I_B)$ и $C(I_C)$ са среди на отсечките $I_AA'(I_A)$, $I_BB'(I_B)$ и $I_CC'(I_C)$. С това твърдение 1 е доказано.



Фиг. 2

От доказателството на твърдение 1 се получават и следните две твърдения:

Твърдение 2. Правите $A(I)$, $B(I)$ и $C(I)$ се пресичат в една точка или са успоредни.

Твърдение 3. Правите $A(I_A)$, $B(I_B)$ и $C(I_C)$ се пресичат в една точка или са успоредни.

Наистина, в (Ненков, 2010) е доказано, че правите A_I , B_I и C_I имат обща точка J (крайна или безкрайна), която е наречена точка на Жергон, а правите A_{I_A} , B_{I_B} и C_{I_C} имат обща точка N (крайна или безкрайна), която е наречена точка на Нагел за разглежданата Фойербахова конфигурация. Тъй като тези две тройки прави, според доказаното в твърдение 1, съвпадат съответно с тройките $A(I)$, $B(I)$, $C(I)$ и $A(I_A)$, $B(I_B)$, $C(I_C)$, то непосредствено се получават твърдения 2 и 3.

По този начин намираме още по едно свойство на точките на Жергон и Нагел. Аналогични твърдения лесно се свързват и с другите точки на Жергон и Нагел, разгледани в (Ненков, 2010). Когато точката I е центърът на вписаната окръжност, т.е. Фойербаховата конфигурация се състои от окръжности, от твърдение 2 получаваме теоремата на Лонгшамп, доказана в (Табов, 1994), а от твърдение 3 – задача 4 от рубриката „Конкурсни задачи“ на сп. „Математика и информатика“, 1998, № 1.

Нека $IM_a \cap AH = H(A)$, $IM_b \cap BH = H(B)$, $IM_c \cap CH = H(C)$, $I_A M_a \cap AH = H(A_{I_A})$, $I_B M_b \cap BH = H(B_{I_B})$ и $I_C M_c \cap CH = H(C_{I_C})$. За тези точки е изпълнено следното

Твърдение 4.

Изпълнени са равенствата: $AH(A) = IA_p$, $BH(B) = IB_p$, $CH(C) = IC_p$, $AH(A_{I_A}) = I_A A_{I_A}$, $BH(B_{I_B}) = I_B B_{I_B}$, $CH(C_{I_C}) = I_C C_{I_C}$.

От твърдение 1 следва, че $IA(I) = M_a A_{I_A}$ и $IA(I) \parallel M_a A_{I_A}$. Следователно $IA(I) A_{I_A} M_a$ е успоредник, откъдето $H(A) M_a \parallel AA(I)$ и $A(I) M_a \parallel AH(A)$ (по построение). Затова $AH(A) M_a A(I)$ е успоредник. Оттук $AH(A) = A(I) M_a$. От друга страна, според твърдение 1, $A(I) M_a = IA_I$. Така получаваме $AH(A) = IA_I$. По аналогичен начин се доказват и останалите равенства.

Накрая ще отбележим следното

Твърдение 5.

а) Правите $I_A A_{I_A}$, $I_B B_{I_B}$, $I_C C_{I_C}$ се пресичат в една точка P , симетрична на I спрямо O ;

б) Правите IA_p , $I_B C_{I_B}$, $I_C B_{I_C}$ се пресичат в една точка P_A , симетрична на I_A спрямо O ;

в) Правите IB_p , $I_C A_{I_C}$, $I_A C_{I_A}$ се пресичат в една точка P_B , симетрична на I_B спрямо O ;

г) Правите IC_p , $I_A B_{I_A}$, $I_B A_{I_B}$ се пресичат в една точка P_C , симетрична на I_C спрямо O .

Нека t_1 е трансляция с вектор $2\overrightarrow{IA(I)}$ и t_2 е трансляция с вектор $2\overrightarrow{A(I)O}$. Тогава $t_2 \circ t_1(I) = t_2(A'(I)) = P$, където P е точка, симетрична на $A''(I)$. Но $t_2 \circ t_1$ е централна симетрия с център O , следователно P е симетрична на I спрямо O и лежи върху правата $I_A A_{I_A}$. По аналогични причини точката P лежи и върху правите $I_B B_{I_B}$ и $I_C C_{I_C}$. По подобен начин се доказват и останалите конкурентности.

Като приложение на твърдение 5 се получава решение на задача 3, публикувана в сп. „Математика и информатика“, брой 3, 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 2, 35–42.

- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 5, 42–61.
- Паскалев, Г. & Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Табов, Й. (1994). Три проекции върху симетралите. *Обучението по математика и информатика*, 4, 74.

SEVERAL HOMOTHETICALLY GENERATED PROPERTIES OF THE FEUERBACH CONFIGURATIONS

Abstract. The present paper considers generalizations of some known properties from the geometry of the triangle, which are connected with the circum-circles and the in-circles. The generalizations are several properties of a special combination of central conics, which is called to be Feuerbach configuration in (Ненков, 2010).

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc in Pedagogy**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com