

НЯКОЛКО ПРИЛОЖЕНИЯ НА ВЪРТЯЩАТА ХОМОТЕТИЯ

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Висше военноморско училище „Никола Вапцаров“ – Варна

Резюме. Разгледани са няколко основни свойства на въртящата хомотетия. Показани са приложения на отбелязаните свойства при обобщаване на няколко известни задачи от планиметрията и една от задачите, участваща в темата на 60. международна олимпиада по математика.

Ключови думи: геометрична трансформация; хомотетия; въртяща хомотетия; решения

Еднаквостите и хомотетията са основни геометрични преобразувания, които често помагат при опростяването на решенията на някои задачи. Най-общо, произведението на еднаквост с хомотетия дава като резултат подобност. По-специално, когато се извършва последователно прилагане на ротация и хомотетия (или обратното) с един и същ център, имаме въртяща хомотетия. По-точно, ако h е произведение на хомотетия с център O и коефициент k и на ротация с център O и ъгъл φ , казваме, че h е въртяща хомотетия с център O , коефициент k и ъгъл φ .

Като използваме въртяща хомотетия, ще докажем обобщения на няколко известни задачи от планиметрията. Също така ще покажем едно решение на задача 6 от 60. международна олимпиада по математика.

Първо ще отбележим някои свойства на въртящата хомотетия, които са непосредствени следствия от отделните свойства на преобразуванията ротация и хомотетия.

1) Въртящата хомотетия h изобразява отсечка, лъч, права съответно в отсечка, лъч, права;

2) Ако $X \neq O$ е произволна точка и $X' = h(X)$, то $OX' = |k| \cdot OX$ и $\sphericalangle X'OX = \varphi$;

3) Ако m е отсечка и $m' = h(m)$, то $m' = |k| \cdot m$;

4) Ако p и q са произволни прави и $p' = h(p)$ и $q' = h(q)$, то $\sphericalangle(p', q') = \sphericalangle(p, q)$;

5) Въртящата хомотетия h изобразява окръжност ω с радиус r в окръжност ω' с радиус $r' = |k| \cdot r$;

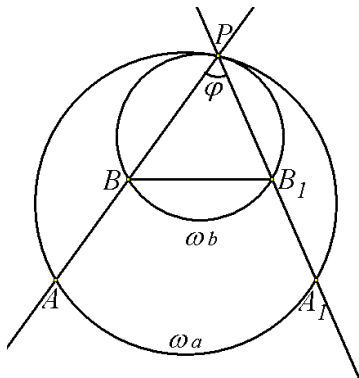
б) Ако s_1 и s_2 са произволни линии в равнината, то общият брой на точките, които имат $s'_1 = h(s_1)$ и $s'_2 = h(s_2)$, е равен на общия брой на точките, които имат s_1 и s_2 . Ако s_1 и s_2 се допират, то $s'_1 = h(s_1)$ и $s'_2 = h(s_2)$ също се допират.

Освен тези свойства въртящата хомотетия притежава и някои по-специални свойства. Сега ще покажем няколко от тях.

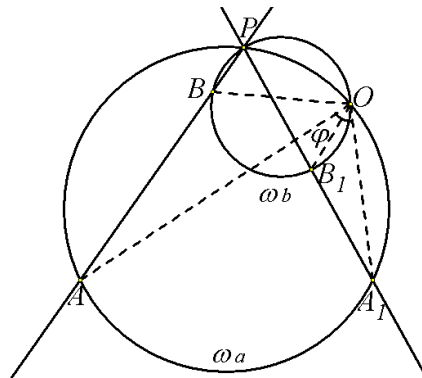
Свойство 1. Нека точките A и B лежат върху права c , а точките A_1 и B_1 – върху права c_1 . Ако никои две от точките A , B , A_1 , B_1 и $P = c \cap c_1$ не съвпадат, съществува единствена въртяща хомотетия h с център пресечната точка на описаните около триъгълниците AA_1P и BB_1P окръжности, при която $h(A) = A_1$ и $h(B) = B_1$.

Доказателство. Означаваме с ω_a и ω_b описаните окръжности съответно за триъгълниците AA_1P и BB_1P . В зависимост от броя на общите точки на ω_a и ω_b са възможни два случая.

1) Нека ω_a и ω_b имат единствена обща точка P (фиг. 1). Тогава P е център на хомотетия за тези окръжности, при която двойките точки (A, B) и (A_1, B_1) са съответни. Затова $A_1B_1 \parallel AB$ и $\frac{PA_1}{PA} = \frac{PB_1}{PB} = k$. Въртящата хомотетия h с ъгъл $\varphi = \angle PAA_1$ и коефициент k притежава описаните свойства.



Фигура 1



Фигура 2

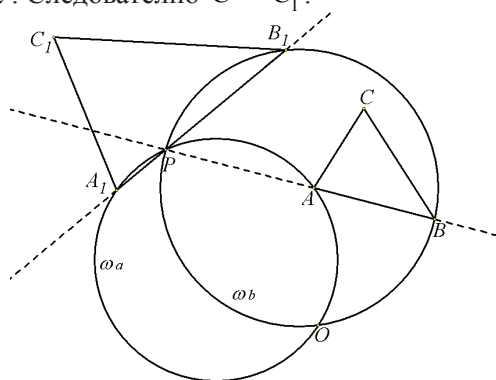
2) Нека ω_a и ω_b имат втора обща точка O (фиг. 2). От окръжността ω_a имаме $\angle OA_1P = \angle OAP = \frac{\widehat{OP}}{2}$. Следователно $\angle OA_1B_1 = \angle OAB$. Аналогично от окръжността ω_b имаме $\angle OB_1P = \angle OBP = \frac{\widehat{OP}}{2}$. Последните равенства

водят до $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OB_1A_1$. Така получаваме, че $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$. Следователно $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k$ и $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle AOB = \varphi$. Въртящата хомотетия h с ъгъл φ и коефициент k притежава описаните свойства.

Нека сега h_1 е въртяща хомотетия с център O_1 , при която $h_1(A) = A_1$ и $h_1(B) = B_1$. Ако $O_1 \neq P$, то $h_1(\sphericalangle O_1AB) = \sphericalangle O_1A_1B_1$. Затова $\sphericalangle O_1A_1B_1 = \sphericalangle O_1AB$. Това означава, че отсечката O_1P се вижда под равни ъгли от точките A и A_1 . Следователно точките O_1, P, A и A_1 лежат на една окръжност. Така получаваме, че $O_1 \in \omega_a$. Аналогично се забелязва, че точките O_1, P, B и B_1 лежат на една окръжност, което показва, че $O_1 \in \omega_b$. Следователно $O_1 \equiv O$. Като вземем предвид и това, че $h_1(A) = A_1$, получаваме, че $h_1 \equiv h$. Ако $O_1 \equiv P$, то $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$. Следователно тези триъгълници са хомотетични и описаните им окръжности ω_a и ω_b се допират в точката P . Така стигаме до разглеждания вече случай, който отново показва, че $h_1 \equiv h$. С това е доказана единствеността на h .

Свойство 2. Ако ABC и $A_1B_1C_1$ са еднакво ориентирани подобни триъгълници, които са с неуспоредни страни, то съществува въртяща хомотетия, която преобразува ABC в $A_1B_1C_1$.

Доказателство. Нека правите AB и A_1B_1 се пресичат в точка P (фиг. 3). От свойство 1 следва, че съществува единствена въртяща хомотетия h с център втората пресечна точка O на окръжностите ω_a и ω_b , които са описани съответно около AA_1O и BB_1O . Коефициентът на h е $k = \frac{A_1B_1}{AB}$. Нека $h(C) = C'$. Тъй като h запазва ъглите, то $A_1B_1C' \sim ABC$. От свойствата на ротацията следва, че триъгълниците ABC и A_1B_1C' са еднакво ориентирани. От друга страна коефициентът, на подобност за триъгълниците A_1B_1C' и ABC е равен на k . Следователно $C' \equiv C_1$.



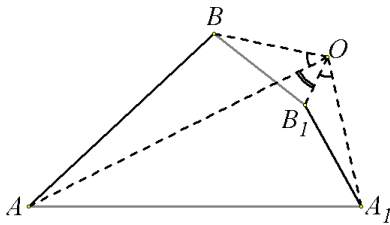
Фигура 3

Свойство 3. Ако въртящите хомотетии h и h_1 са такива, че $h(AB) = A_1B_1$ и $h_1(AA_1) = BB_1$, центровете на h и h_1 съвпадат.

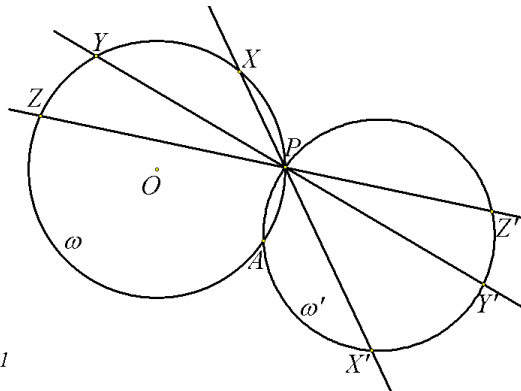
Доказателство. Нека O е центърът на h (фиг. 4). Тогава $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$. Следователно $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$ и $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}$. Оттук следва, че $\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1$ и $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$. Това означава, че $\triangle OAA_1 \sim \triangle OBB_1$. Следователно O е център и на h_1 .

Свойство 4. Нека A е точка от окръжността ω и h е въртяща хомотетия с център A . Ако X е точка от ω и $X' = h(X)$, правата XX' минава през втората обща точка P на ω и $\omega' = h(\omega)$.

Доказателство. Нека X и Y са две различни точки от ω и $h(XY) = X'Y'$ (фиг. 5). Означаваме с P пресечната точка на XX' и YY' (фиг. 5). От свойство 3 следва, че въртящата хомотетия h_1 , при която $h_1(XX') = YY'$, има за център точката A . Като приложим свойство 1 за h_1 , получаваме, че точките A, P, X и Y лежат на една окръжност, т.е. $P \in \omega$. Отново според свойство 1, точките A, P, X' и Y' лежат на една окръжност, която съвпада с ω' . Следователно P е обща точка за окръжностите ω и ω' . С това свойство 4 е доказано.



Фигура 4



Фигура 5

Като приложения на току-що доказаните свойства ще решим следващите задачи.

Задача 1. Нека правите l_1 и l_2 се пресичат в точка P , а точките A_1 и A_2 лежат съответно върху l_1 и l_2 и са различни от P . Да се построи цен-

търът на въртяща хомотетия h с коефициент k , при която $h(l_1) = l_2$ и $h(A_1) = A_2$.

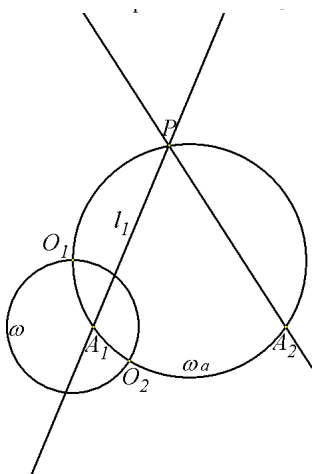
Решение. Съгласно свойство 1 центърът на h лежи върху описаната около $\triangle AA_1P$ окръжност ω_a (фиг. 6). От друга страна, за коефициента k на h е изпълнено равенството $k = \frac{OA_2}{OA_1}$. Геометричното място на точките X , за

които е изпълнено равенството $\frac{XA_2}{XA_1} = k$, е окръжност ω , която се нарича

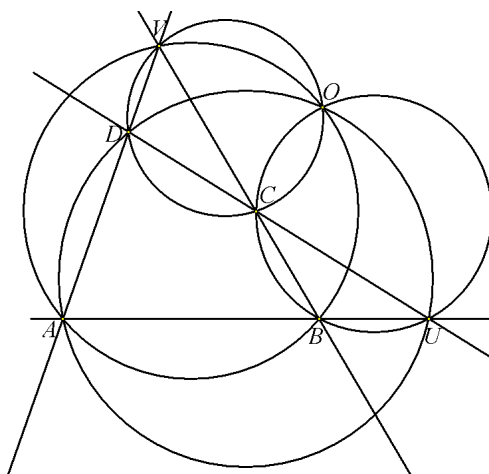
Аполониева окръжност (фиг. 6). Следователно търсеният център е обща точка на окръжностите ω и ω_a (фиг. 6). Задачата има две решения.

Задача 2. Четири прави в равнината определят четири триъгълника. Да се докаже, че описаните окръжности на тези триъгълници минават през една точка (теорема на Микел).

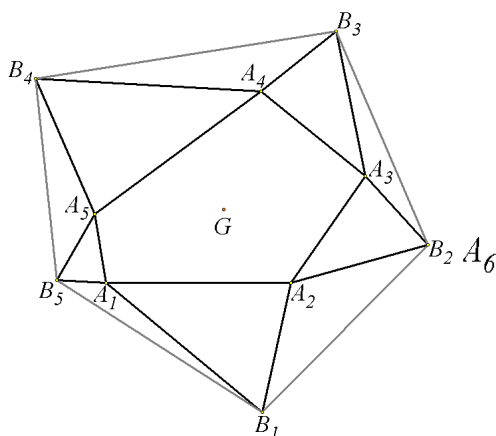
Решение. Ще използваме означенията на фиг. 7. Нека h е въртяща хомотетия, при която $h(AD) = BC$. От свойство 1 следва, че центърът O на h е втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABV и DCV окръжности. Ако h_1 е въртяща хомотетия, при която $h_1(AB) = DC$, то отново по свойство 1 центърът ѝ е втората пресечна точка O_1 на описаните за триъгълниците ADU и BCU окръжности. Сега от свойство 3 следва, че $O_1 \equiv O$. Следователно описаните окръжности за триъгълниците ABV , DCV , ADU и BCU минават през една точка O , която се нарича точка на Микел за четириъгълника $ABCD$.



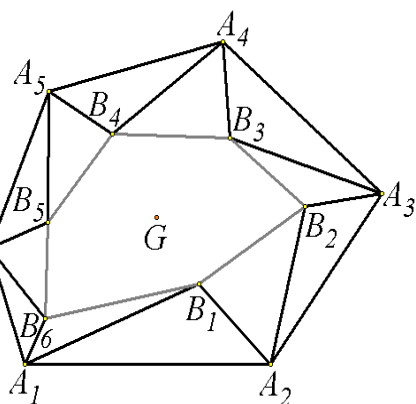
Фигура 6



Фигура 7



Фигура 8

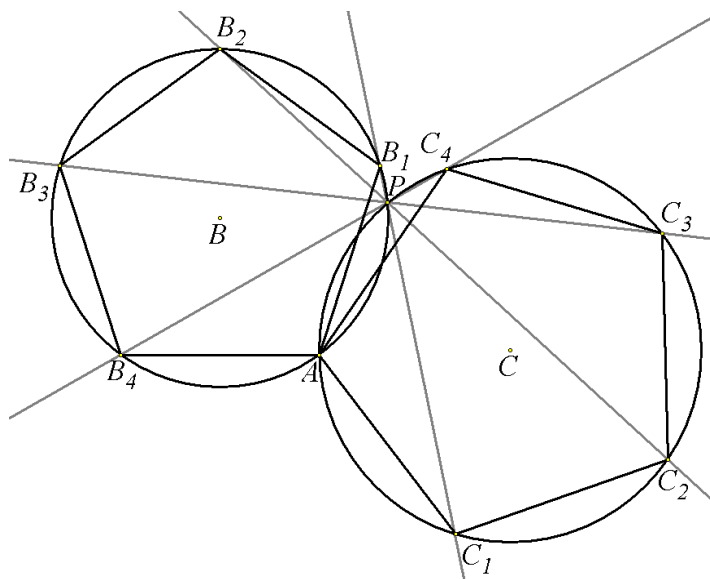


Фигура 9

Задача 3. Нека върху страните на изпъкнал многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$ са построени външно за многоъгълника подобни триъгълници $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_nB_nA_1$ така, че $\sphericalangle A_2A_1B_1 = \sphericalangle A_3A_2B_2 = \dots = \sphericalangle A_1A_nB_n$ и $\sphericalangle A_1A_2B_1 = \sphericalangle A_2A_3B_2 = \dots = \sphericalangle A_nA_1B_n$. Да се докаже, че медицентровете на многоъгълниците $B_1B_2 \dots B_n$ и $A_1A_2 \dots A_n$ съвпадат (фиг. 8).

Решение. Разглеждаме въртяща хомотетия h с ъгъл $\varphi = \sphericalangle A_2A_1B_1 = \sphericalangle A_3A_2B_2 = \dots = \sphericalangle A_1A_nB_n$ и коефициент $k = \frac{A_1B_1}{A_1A_2} = \frac{A_2B_2}{A_2A_3} = \dots = \frac{A_nB_n}{A_nA_1}$ (фиг. 8). Изпълнени са равенствата $h(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{A_1B_1}$, $h(\overrightarrow{A_2A_3}) = \overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $h(\overrightarrow{A_nA_1}) = \overrightarrow{A_nB_n}$. Тъй като $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$, от последните равенства следва $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$. От друга страна, медицентърът G на $A_1A_2 \dots A_n$ удовлетворява равенството $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$, където O е произволна точка в пространството. При $O \equiv G$ имаме $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. От получените равенства следва $\overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GB_2} + \dots + \overrightarrow{GB_n} = (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{A_2B_2}) + \dots + (\overrightarrow{GA_n} + \overrightarrow{A_nB_n}) = (\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}) + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n}) = \vec{0}$. Следователно G е медицентър на $B_1B_2 \dots B_n$.

Твърдението е изпълнено и в случая, когато триъгълниците $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_nB_nA_1$ са ориентирани към вътрешността на $A_1A_2 \dots A_n$ (фиг. 9).

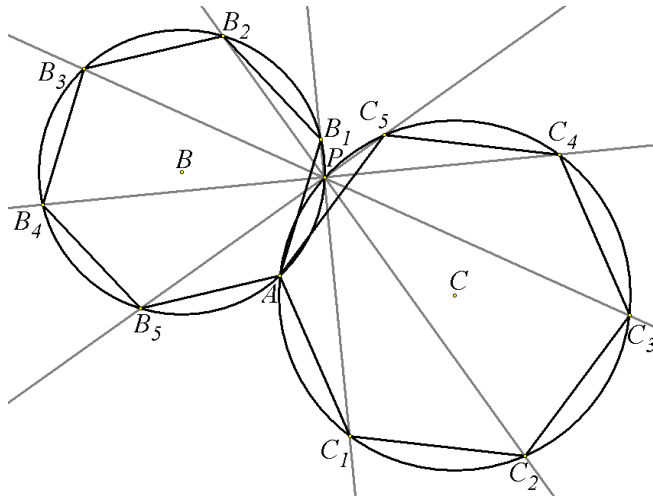


Фигура 10

Задача 4. Ако правилните многоъгълници $AB_1B_2 \dots B_n$ и $AC_1C_2 \dots C_n$ са еднакво ориентирани, да се докаже, че правите B_1C_1 , B_2C_2 , ..., B_nC_n минават през една точка (фиг. 10, 11).

Решение. Разглеждаме въртяща хомотетия h с център A , коефициент $k = \frac{AC_1}{AB_1}$ и ъгъл $\varphi = \angle B_1AC_n + \frac{(n-3)\pi}{n}$ (фиг. 10, 11). Тогава $h(B_j) = C_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). От свойство 4 следва, че правите B_1C_1 , B_2C_2 , ..., B_nC_n минават през втората пресечна точка P на описаните около $AB_1B_2 \dots B_n$ и $AC_1C_2 \dots C_n$ окръжности.

Задача 5. Нека многоъгълникът $A_1A_2A_3 \dots A_{2n-1}A_{2n}$ ($n \geq 3$) е вписан в окръжност Γ и са изпълнени равенствата $A_1A_2 = A_3A_4 = \dots = A_{2n-1}A_{2n}$. Ако $A_1A_3 \cap A_2A_4 = B_1$, $A_3A_5 \cap A_4A_6 = B_2$, ..., $A_{2n-1}A_1 \cap A_{2n}A_2 = B_n$, точките C_1 , C_2 , ..., C_n са средите съответно на A_1A_3 , A_3A_5 , ..., $A_{2n-1}A_1$ и точките D_1 , D_2 , ..., D_n са средите съответно на A_2A_4 , A_4A_6 , ..., $A_{2n}A_2$, да се докаже, че



Фигура 11

многоъгълниците $B_1B_2 \dots B_n$, $C_1C_2 \dots C_n$ и $D_1D_2 \dots D_n$ са подобни (фиг. 12, 13).

Решение. Нека M е средата на A_1A_2 и $\sphericalangle A_1OM = \varphi$ (фиг. 12). От равенствата $A_1A_2 = A_3A_4 = \dots = A_{2n-1}A_{2n}$ следва, че $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_3OA_4 = \dots = \sphericalangle A_{2n-1}OA_{2n} = 2\varphi$ и $\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_3A_4} = \dots = \widehat{A_{2n-1}A_{2n}}$. За това имаме $\sphericalangle A_3B_1A_4 = \frac{\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_3A_4}}{2} = \frac{\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_1A_2}}{2} = \widehat{A_1A_2} = \sphericalangle A_1OA_2 = 2\varphi$

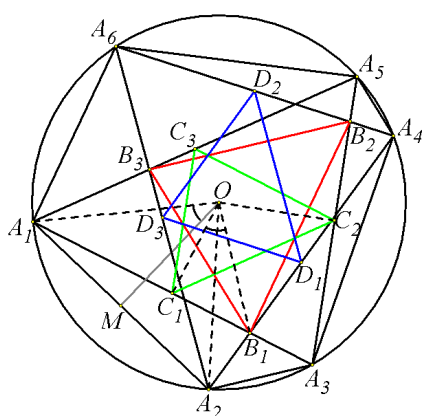
и $\sphericalangle A_1B_1A_4 = 180^\circ - \sphericalangle A_3B_1A_4 = 180^\circ - 2\varphi$. Освен това $A_1A_2A_3A_4$ е равнобедрен трапец. Оттук следва, че OB_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1B_1A_4$. Следователно $\sphericalangle A_1B_1O = 90^\circ - \varphi$. Тъй като C_1 е среда на A_1A_3 , то $OC_1 \perp A_1A_3$. Така забелязваме, че $\sphericalangle C_1OB_1 = \varphi$ и $OB_1 = \frac{1}{\cos \varphi} OC_1$. Сега, ако h е въртяща хомотетия с

център O , коефициент $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ и ъгъл φ , имаме $h(C_1) = B_1$. По аналогичен

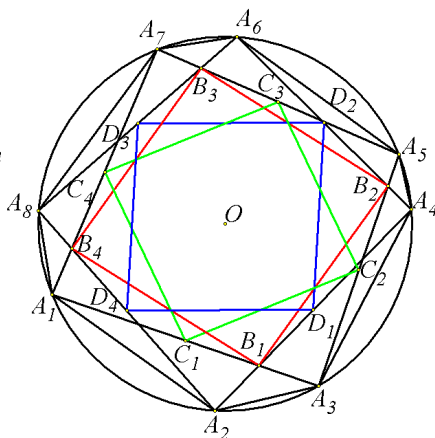
начин се вижда, че $h(C_j) = B_j$ при $j = 2, 3, \dots, n$. Следователно многоъгълниците $B_1B_2 \dots B_n$ и $C_1C_2 \dots C_n$ са подобни. Аналогично се показва, че многоъгълниците $B_1B_2 \dots B_n$ и $D_1D_2 \dots D_n$ са подобни. С това е доказано, че многоъгълниците $B_1B_2 \dots B_n$, $C_1C_2 \dots C_n$ и $D_1D_2 \dots D_n$ са подобни.

Ако $n = 3$, центърът на описаната около $\Delta A_1A_3A_5$ окръжност е ортоцентър за $\Delta C_1C_2C_3$. Следователно O е ортоцентър и за $\Delta B_1B_2B_3$ (фиг. 12).

Ако $n = 4$, точките C_1, C_2, C_3 и C_4 са среди на страните на четириъгълника $A_1A_3A_5A_7$. Затова четириъгълникът $C_1C_2C_3C_4$ е успоредник. Следователно четириъгълникът $B_1B_2B_3B_4$ също е успоредник (фиг. 13).



Фигура 12



Фигура 13

Задача 6. Даден е остроъгълен триъгълник ABC , за който $AB \neq AC$. Вписаната в триъгълника окръжност ω с център I се допира до страните BC, CA и AB съответно в точките D, E и F . Правата през D , която е перпендикулярна на EF , пресича ω в точка R , а правата AR пресича ω за втори път в точката P . Описаните окръжности около триъгълниците PCE и PBF се пресичат за втори път в точката Q . Да се докаже, че правите DI и PQ се пресичат в точка от правата през A , която е перпендикулярна на AI .

Решение. Както обикновено, за ъглите на $\triangle ABC$ ще използваме означенията $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тъй като по условие

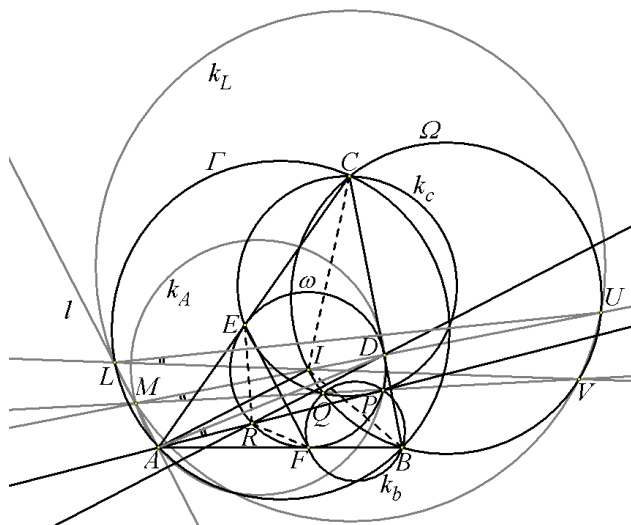
$DR \perp EF$, от връзките между ъгли и дъги в ω , имаме $\frac{\widehat{ER}}{2} + \frac{\widehat{FD}}{2} = 90^\circ$

и $\widehat{FD} = \sphericalangle DIF = 180^\circ - \beta$ (фиг. 14). Затова $\frac{\widehat{ER}}{2} = \frac{\beta}{2}$. Следователно

$\sphericalangle EFR = \frac{\widehat{ER}}{2} = \frac{\beta}{2}$. Аналогично се получава, че $\sphericalangle FER = \frac{\gamma}{2}$. По този начин

установяваме, че $\triangle EFR \sim \triangle BCI$. Освен подобни тези триъгълници са еднакво ориентирани. Този факт, според свойство 2, подсказва, че съществува въртяща хомотетия h , при която $h(B) = F$, $h(C) = E$ и $h(I) = R$. Освен това, ако Ω е описаната около $\triangle BCI$ окръжност, то $h(\Omega) = \omega$. Това означава, че

точката D е образ при h на някоя точка от Ω . Правата DR е перпендикулярна на EF , а това означава, че DR е образ при h на права през I , която е перпендикулярна на BC , т.е. правата DR е образ на правата ID . Това означава, че ако ID пресича за втори път Ω в точка U , то $h(U) = D$.



Фигура 14

Нека сега l е правата през A , която е перпендикулярна на AI . По друг начин казано, l е външната ъглополовяща на $\triangle ABC$ при върха A . Затова, ако L е втората пресечна точка на l с описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ , то $\triangle BLC$ е равнобедрен с ъгъл между бедрата $\sphericalangle BLC = \alpha$. Следователно $\triangle BCL \sim \triangle FEA$. Тъй като $h(BC) = FE$, то $h(L) = A$. Сега, ако $ID \cap l = M$, то е достатъчно да докажем, че PQ минава през M .

Нека описаните около триъгълниците PCE и PBF са съответно k_c и k_b . От връзките между ъгли и дъги в k_b и ω имаме

$$\sphericalangle BQP = \frac{\widehat{BP}}{2} = \sphericalangle BFP = \frac{\widehat{FP}}{2} = \sphericalangle FRP. \text{ Аналогично от } k_c \text{ и } \omega \text{ получа-}$$

ваме $\sphericalangle CQP = \frac{\widehat{CP}}{2} = \sphericalangle CEP = \frac{\widehat{EP}}{2} = \sphericalangle ERP$. От тези равенства следва

$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP + \sphericalangle CQP = \sphericalangle FRP + \sphericalangle ERP = \sphericalangle FRE = \sphericalangle BIC$. Следователно точките B , C , I и Q лежат на една окръжност, т.е. точката Q лежи върху окръжността Ω . Нека втората пресечна точка на PQ с Ω е V . От окръж-

ността Ω имаме $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BQV = \frac{\widehat{BV}}{2}$, а от ω получаваме $\sphericalangle BFP = \frac{\widehat{FP}}{2}$.

Освен това от k_b имаме $\sphericalangle BQP = \frac{\widehat{BP}}{2} = \sphericalangle BFP$. Следователно дъгите $\widehat{BV}$ и $\widehat{FP}$ съответстват на равни ъгли в съответните окръжности Ω и ω при h . Тъй като $h(B) = F$, то $h(\widehat{BV}) = \widehat{FP}$. Следователно $h(V) = P$. Тъй като по условие точките A , R и P лежат на една права и $h(LIV) = ARP$, то точките L , I и V също лежат на една права.

Сега от окръжността ω получаваме равенствата $\sphericalangle DPA = \sphericalangle DPR = \frac{\widehat{DER}}{2} = \sphericalangle DFR = \sphericalangle DFE + \sphericalangle EFR = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \sphericalangle DIE + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \beta$. От четириъгълника $ABDM$ получаваме $\sphericalangle AMD = 360^\circ - (\sphericalangle MAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDM) = 360^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \beta + 90^\circ\right) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$. Следователно четириъгълникът $ABDM$ е вписан в окръжност k_A . От последното равенство следва още, че $\sphericalangle LMU = \sphericalangle LMD = \frac{\alpha}{2} + \beta = \sphericalangle DPA$. От друга страна, $h(\sphericalangle IVU) = \sphericalangle RPD$, което означава, че $\sphericalangle LVU = \sphericalangle IVU = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Следователно отсечката UL се вижда под равни ъгли от точките M и V . Затова точките M , L , U и V лежат на една окръжност k_L .

Тъй като $h(\sphericalangle ULV) = \sphericalangle DAP$, то $\sphericalangle DAP = \sphericalangle ULV$. От последното равенство и откритите две окръжности получаваме $\sphericalangle UMP = \sphericalangle DMP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle ULV = \sphericalangle UMV$. Следователно правата MU съдържа равни ъгли с правите MP и MV . Тъй като точките P и V лежат в една полуравнина относно правата MU , то правите MP и MV съвпадат. От друга страна, по построение точката Q лежи върху правата PV . Следователно точките M , Q и V лежат на една права. Това означава, че правата PQ минава през M . С това твърдението на задачата е доказано.

ЛИТЕРАТУРА

Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Часть I*. Москва: Наука.

REFERENCES

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1)

Prasolov, V. (1986). *Problems in Plane Geometry. Part I*. Moscow: Nauka.

SOME APPLICATIONS OF SPIRAL SIMILARITY

Abstract. Same basic properties of spiral similarity are considered. Their applications are discussed in generalizing well known plane geometry problems and a problem from the 60th International Mathematical Olympiad paper.

Keywords: geometric transformation; homothety; spiral similarity; IMO problem; solution

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg