

## НЯКОЛКО КОНСТРУКЦИИ, ПОРОДЕНИ ОТ ПРИНЦИПА ЗА ДУАЛНОСТ

<sup>1)</sup>Сава Гроздев, <sup>2)</sup>Веселин Ненков

<sup>1)</sup>Висше училище по застраховане и финанси – София

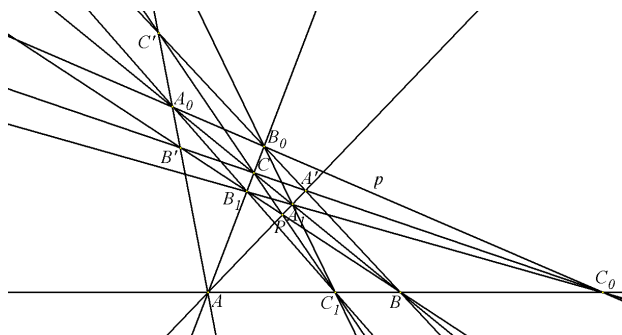
<sup>2)</sup>Технически колеж – Ловеч

**Резюме.** В статията е направен анонс за няколко геометрични конструкции, породени от принципа за дуалност и получени с помощта на компютър. Доказателствата ще бъдат изложени в следваща публикация.

**Keywords:** triangle; centroid; Desargues' theorem; circum curve; Euler curve; Euler line

Не е необичайна практика да се използват компютърни програми за изследване на свойствата на геометрични конструкции (Zlatanov, 2013), (Zlatanov, 2014). Тук ще разгледаме няколко конструкции, реализирани с програмата The Geometer's Sketchpad (GSP). Идеята на разглежданите конструкции е породена от принципа за дуалност в равнината на даден триъгълник (Mateev, 1977), (Grozdev & Nenkov, 2014).

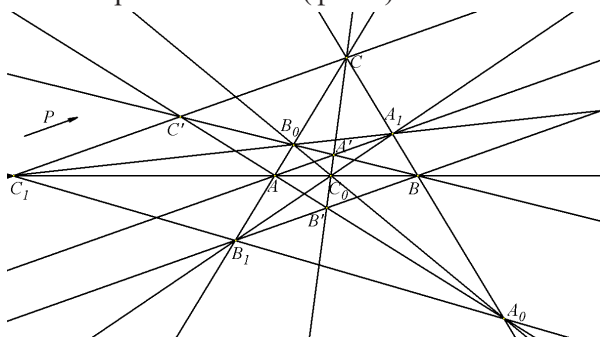
1. Едно съответствие в равнината на триъгълника. Нека  $P$  е точка в равнината на  $\triangle ABC$ , която не лежи върху никоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Да свържем точката  $P$  с върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  на  $\triangle ABC$ , а след това да намерим пресечните точки на получените прави със срещуположните страни на съответните върхове. Така получаваме точките  $A_1 = PA \cap BC$ ,  $B_1 = PB \cap CA$  и  $C_1 = PC \cap AB$ . Съгласно теоремата на Дезарг, приложена за триъгълниците  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , точките  $A_0 = BC \cap B_1C_1$ ,  $B_0 = CA \cap C_1A_1$  и  $C_0 = AB \cap A_1B_1$  лежат на една права  $p$  (фиг. 1) (Mateev, 1977). По този начин на точката  $P$  еднозначно съпоставяме правата  $p$ . Сега да извършим дуалната конструкция. Свързваме пресечните точки  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  на правата  $p$  (същата права, която току-що построихме) с върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  на  $\triangle ABC$ . След това построяваме пресечните точки на правите  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$ , като  $BB_0 \cap CC_0 = A'$ ,  $CC_0 \cap AA_0 = B'$  и  $AA_0 \cap BB_0 = C'$  (фиг. 1). Тогава според обратната посока на теоремата на Дезарг, приложена за триъгълниците  $ABC$  и  $A'B'C'$ , правите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  минават през една точка, която е точката  $P$  (фиг. 1) (Mateev, 1977). Следователно чрез дуалната конструкция на правата  $p$  съпоставяме точката  $P$ , от която се е получила тази права. Така описаните конструкции,



Фигура 1

основаващи се на теоремата на Дезарг, определят взаимно еднозначно съответствие  $\varphi$  в равнината на триъгълника, което на точка съпоставя права и на права съпоставя точка, т.е. изпълнени са равенствата  $\varphi(P) = p$ ,  $\varphi(p) = P$ ,  $\varphi^2(P) = P$  и  $\varphi^2(p) = p$ .

При съответствието  $\varphi$  образът на медицентъра на триъгълника е безкрайната права на равнината му. Дуално всяка безкрайна точка  $P$  има за образ при  $\varphi$  някоя крайна права  $p$ . Обратно, на всяка права  $p$ , получена по този начин, е съответна безкрайна точка  $P$  (фиг. 2).

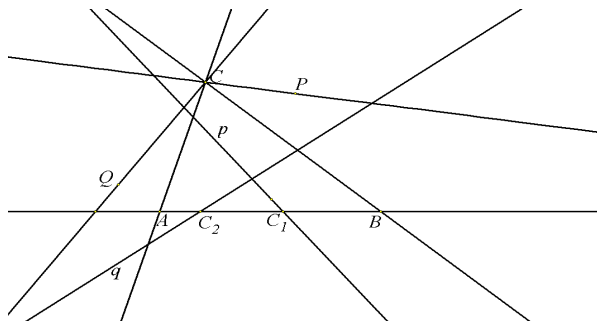


Фигура 2

Съответствието  $\varphi$  притежава следните свойства:

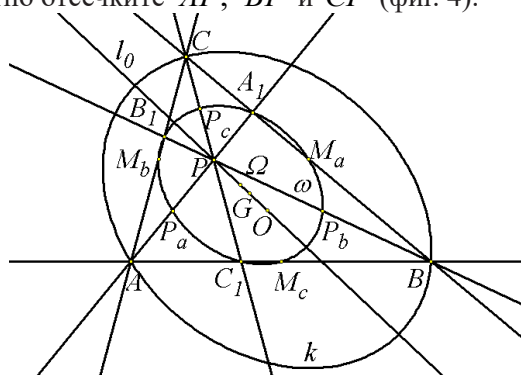
- 1) съответните точки  $P = \varphi(p)$  на всички прави  $p$ , минаващи през постоянна точка  $C_1$  от правата  $AB$ , лежат на една права през  $C$  (фиг. 3);
- 2) съответните прави  $q = \varphi(Q)$  на всички точки  $Q$ , лежащи на права през  $C$ , минават през постоянна точка  $C_2$  от правата  $AB$  (фиг. 3).

Тези свойства са изпълнени и за другите два върха, както и за другите две страни на  $\triangle ABC$ , но не са изпълнени за останалите точки и прави в равнината на  $\triangle ABC$ .



Фигура 3

**2. Ойлерова крива на точка спрямо триъгълник.** Нека отново  $P$  е точка в равнината на  $\triangle ABC$ , която не лежи върху никоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , като  $A_1 = PA \cap BC$ ,  $B_1 = PB \cap CA$  и  $C_1 = PC \cap AB$ . С  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  означаваме съответно средите на отсечките  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , а с  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  – средите съответно отсечките  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  (фиг. 4).



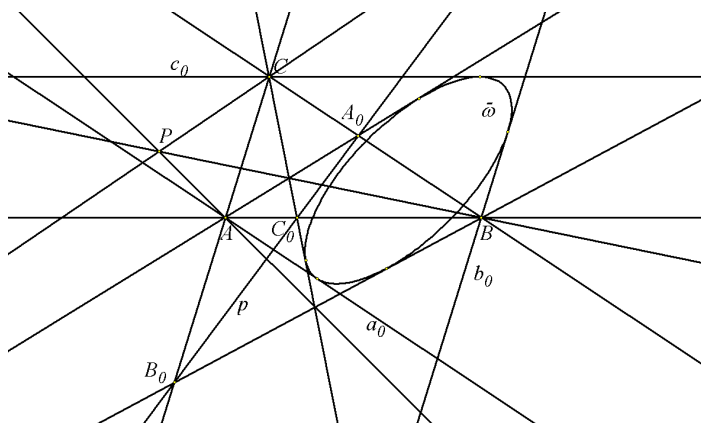
Фигура 4

Деветте точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ,  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  лежат на една крива от втора степен  $\omega$ , която наричаме крива на Ойлер за точката  $P$  спрямо  $\triangle ABC$  (фиг. 4) (Grozdev & Nenkov, 2014). Ако  $G$  е медицентърът на  $\triangle ABC$ , а  $O$  е такава точка, че  $\overline{GO} = \frac{1}{2} \overline{GP}$ , то средата  $\Omega$  на отсечката  $OP$  е център на  $\omega$ .

Следователно точките  $P$ ,  $O$ ,  $G$  и  $\Omega$  лежат на една права, която наричаме Ойлерова права за точката  $P$  спрямо  $\triangle ABC$  (фиг. 4) (Grozdev & Nenkov, 2014). Кривата от втора степен  $k$ , която е описана около  $\triangle ABC$  и има за център точката  $O$ , е хомотетична на  $\omega$ . Кривите  $\omega$  и  $k$  наричаме асоциирани спрямо  $\triangle ABC$  (Grozdev & Nenkov, 2014).

Някои свойства на съответните при изображението  $\varphi$  точка  $P$  и права  $p$ , свързани с асоциираните криви  $k$  и  $\omega$ , са описани в (Grozdev & Nenkov, 2015).

**3. Ойлерова крива на права спрямо триъгълник.** Нека  $p$  е права в равнината на  $\triangle ABC$ , като  $p \cap BC = A_0$ ,  $p \cap CA = B$  и  $p \cap AB = C_0$ . В конструкцията на кривата  $\omega$  заменяме точката  $P$  с правата  $p$ . След това заменяме пресечните точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  съответно с правите  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  (фиг. 5). Заменяме средите  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  с правите  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$ , които минават съответно през върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  и са съответно успоредни на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Оказва се, че шестте прави  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  са допирателни към крива от втора степен  $\bar{\omega}$ , т.е. тези прави принадлежат на крива от втори клас  $\tilde{\omega}$ . Кривата  $\bar{\omega}$  ще наричаме *крива на Ойлер за правата  $p$  спрямо  $\triangle ABC$*  (фиг. 5).



Фигура 5

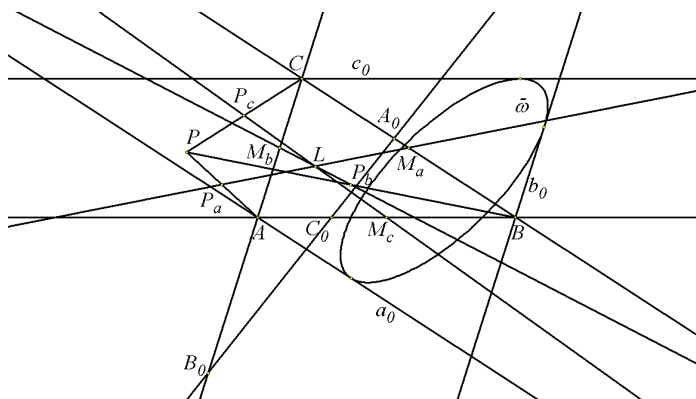
**4. Две свойства на шестте основни точки на  $\bar{\omega}$ .** Съответствието  $\varphi$  поставя на дадената права  $p$  определена точка  $P$  от равнината на  $\triangle ABC$ . Нека както преди  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  са средите на отсечките  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ . Според една теорема на Шльомилх, когато  $P$  е ортоцентърът на  $\triangle ABC$ , правите  $M_aP_a$ ,  $M_bP_b$  и  $M_cP_c$  се пресичат в точката на Лемоан за  $\triangle ABC$  (Paskalev & Chobanov, 1985). Оказва се, че тези прави в общия случай имат връзка и с кривата на Ойлер  $\bar{\omega}$ .

**Свойство 1.** Образите на правите  $M_aP_a$ ,  $M_bP_b$  и  $M_cP_c$  при  $\varphi$  са допирателни точки съответно на правите  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  с  $\bar{\omega}$  (фиг. 6).

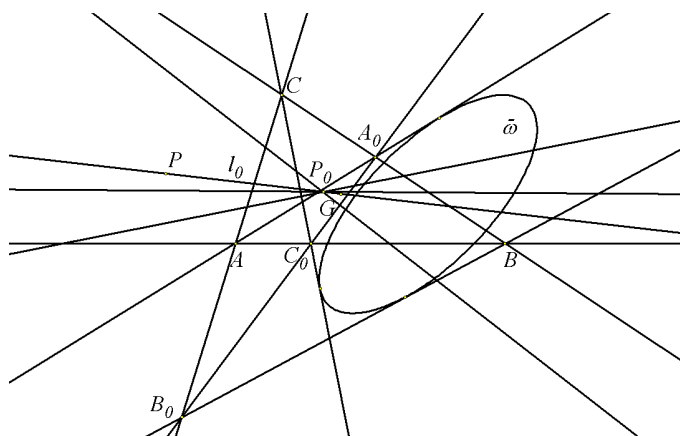
Другите три допирни точки, лежащи на  $\bar{\omega}$ , притежават следното свойство.

**Свойство 2.** Образите на допирните точки на правите  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  с  $\bar{\omega}$  при  $\varphi$  са прави, минаващи през една точка  $P_0$  от правата  $PG$  (фиг. 7).

Следователно точката  $P_0$  лежи върху Ойлеровата права  $l_0$ , определена от  $P$  (фиг. 7).



Фигура 6



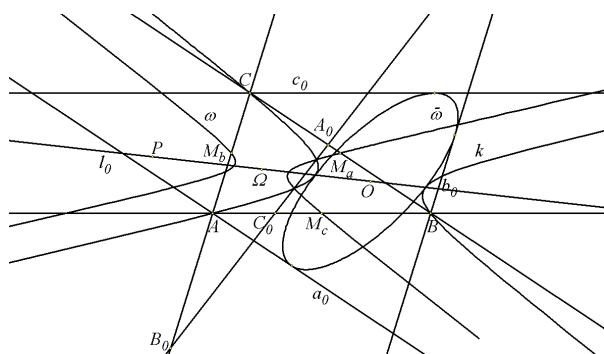
Фигура 7

**5. Няколко общи свойства на Ойлеровите криви.** Нека  $P = \varphi(p)$  и  $\omega$  е Ойлеровата крива на точката  $P$ . Ако  $O$  е центърът на  $\bar{\omega}$ , то точката  $O$  е симетрична на  $P$  спрямо центъра  $\Omega$  на  $\omega$ . Кривата  $k$ , описана за  $\Delta ABC$  и асоциирана с  $\omega$ , има за център същата точка  $O$ . Следователно имаме следното

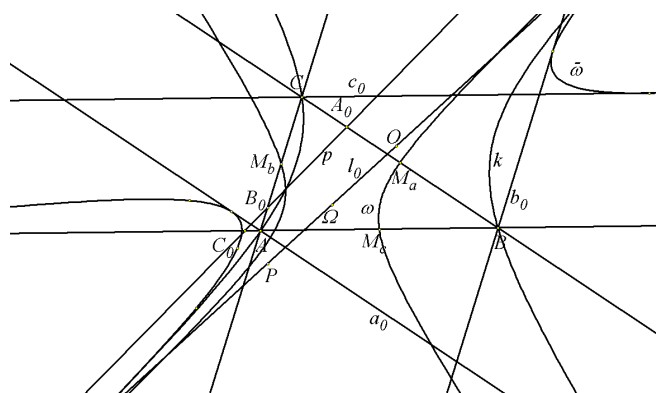
**Свойство 3.** Кривите  $k$  и  $\bar{\omega}$  имат общ център (фиг. 8, 9, 10, 11).

Друго свойство, което свързва  $k$  и  $\bar{\omega}$ , е следното:

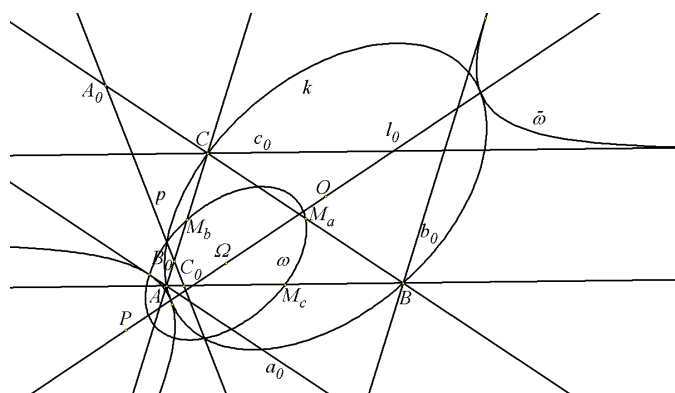
**Свойство 4.** Кривите  $k$  и  $\bar{\omega}$  са допирателни и допирните им точки лежат върху Ойлеровата права  $l_0$ , определена от точката  $P$  (фиг. 8,9,10,11).



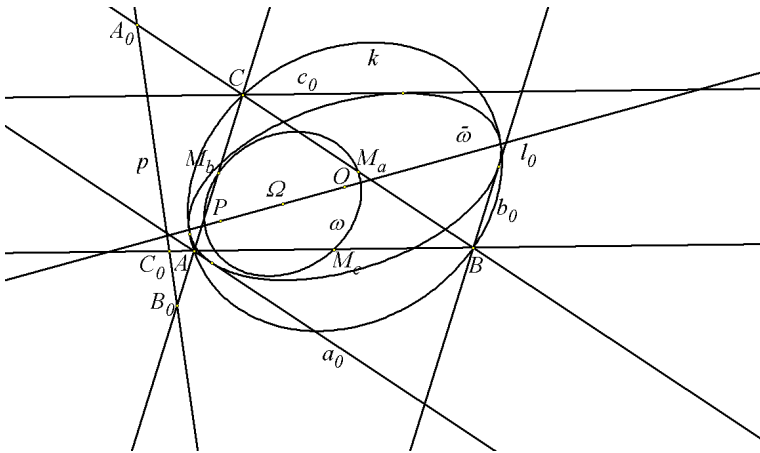
Фигура 8



Фигура 9



Фигура 10

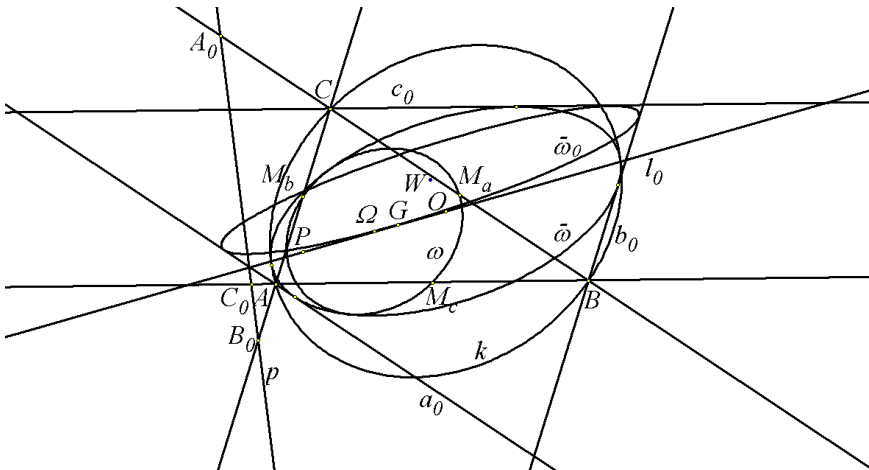


Фигура 11

На представените фигури се вижда, че Ойлеровите криви  $\omega$  и  $\bar{\omega}$  могат да са от различен или еднакъв вид. Затова, ако кривите  $\omega$  и  $\bar{\omega}$  са централни, можем да предположим, че няма специална зависимост между  $\omega$  и  $\bar{\omega}$ , която е свързана с техния вид.

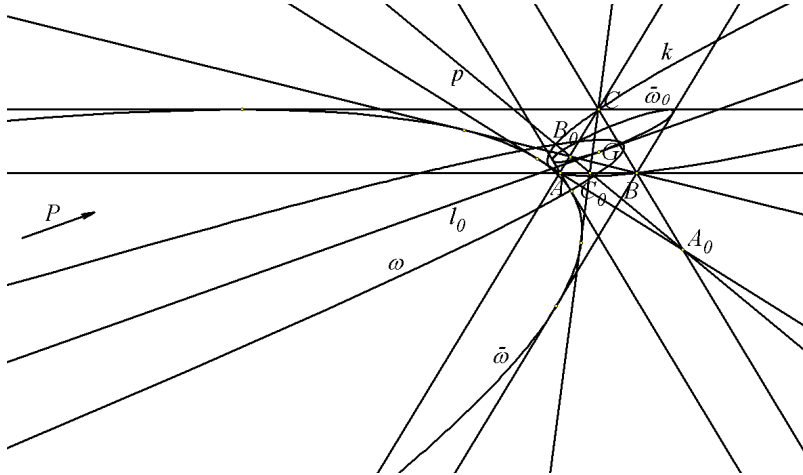
Още едно свойство, свързано с Ойлеровата права, е следното:

**Свойство 5.** Ойлеровата крива  $\bar{\omega}_0$  на Ойлеровата права  $l_0$ , определена от точката  $P$ , е допирателна за  $l_0$  в медицентъра  $G$  на  $\triangle ABC$  (фиг. 12).



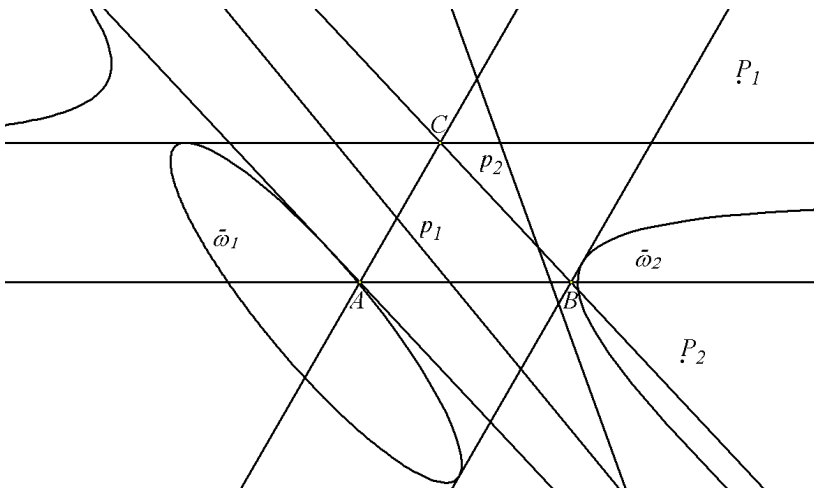
Фигура 12

Ако правата  $p$  е такава, че точката  $P$  е безкрайна, кривата  $\bar{\omega}$  е парабола (фиг. 13). Всъщност в този случай всички криви  $k$ ,  $\omega$  и  $\bar{\omega}$  са параболи. Описаните свойства остават валидни.



Фигура 13

Този случай показва, че видът на  $\bar{\omega}$  зависи от положението на точката  $P$  в равнината на  $\triangle ABC$ . По-точно видът на  $\bar{\omega}$  зависи от положението на точката  $P$  спрямо триъгълника, определен от правите  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  (фиг. 14).



Фигура 14

Накрая трябва да се отбележи, че при някои от конструкциите принципът за дуалността е приложен само частично. Освен това всички формулирани твърдения се нуждаят от доказателства. Това ще бъде осъществено в следваща публикация.

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Two applications of the duality principle. *Informatization of Education – 2014* (Proc. Int. Sci. Conf. with Appl., Volgograd, April 23 – 26, 2014, 268 – 271), Volgograd: “Peremena”, ISBN 978-5-9935-0324-0. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Два приложения принципа дуальности. *Информатизация образования – 2014* (Материалы международной научно-практической конференции, Волгоград, 23 – 26 апреля 2014 г., 268 – 271), Волгоград: ВГСПУ “Перемена”, ISBN 978-5-9935-0324-0.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry. *Theoretical and applied aspects of Mathematics, Informatics and Education* (Proc. Int. Sci. Conf.). Arhangel'sk: SAFU, 35 – 54, ISBN 978-5-261-00990-0. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования* (Сборник материалов международной научной конференции). Архангельск: САФУ, 35 – 54, ISBN 978-5-261-00990-0.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Two symmetric polars and two harmonically conjugated poles. *Mathematics and Informatics*, 4, 415 – 425, ISSN 1310-2230. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2015). Две симметрични поляри и два хармонично спрегнати полюса, *Математика и информатика*, 4, 415 – 425, ISSN 1310-2230.]
- Martinov, N. (1989). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University Press. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Изд. Московского университета.]
- Pasclev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

- Stanilov, G. (1979). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, **11**, (1), 79 – 91.
- Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.

## SOME CONSTRUCTIONS, GENERATED BY THE DUALITY PRINCIPLE

**Abstract.** The paper announces some geometric constructions, generated by the duality principle and obtained by means of a computer. The proofs will be presented in a further publication.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship  
1, Gusla Str.  
1618 Sofia, Bulgaria  
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College, Lovech  
31, Sajko Saev Str.  
5500 Lovech, Bulgaria  
E-mail: vnenkov@mail.bg