

НЯКОИ НОВИ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СРЕДНИТЕ АРИТМЕТИЧНО, ГЕОМЕТРИЧНО, ХАРМОНИЧНО И КВАДРАТИЧНО

Тодор Митев
Русенски университет „Ангел Кънчев“

Резюме. Нека A_n, H_n, S_n са съответно аритметичното, хармоничното и квадратичното средни за положителните реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. В тази статия са доказани следните теореми:

Теорема 1. За $n = 3$ е изпълнено

$$A_n \geq (1-\lambda)H_n + \lambda S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } A_n \leq (1-\lambda)H_n + \lambda S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Теорема 2. За $n = 4$ е изпълнено

$$A_n \geq (1-\lambda)H_n + \lambda S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ и } A_n \leq (1-\lambda)H_n + \lambda S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Теорема 3. За } n = 5 \text{ е изпълнено } A_n \leq (1-\lambda)H_n + \lambda S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Предложени са и няколко нерешени задачи.

Keywords: inequality, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, quadratic mean

Въведение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са положителни реални числа и както е прието, означаваме:

$$M_p = \begin{cases} \min\{a_i\} & i = 1, 2, \dots, n \quad p = -\infty \\ \max\{a_i\} & i = 1, 2, \dots, n \quad p = +\infty \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} & p = 0 \\ \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \pm\infty, p \neq 0 \end{cases}$$

Означаваме съответно още:

$$M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G_n, \quad M_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A_n, \quad M_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = H_n,$$

$$M_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = S_n$$

Добре е известно, че M_p е растяща функция на p , т.е. $M_{p_1} \leq M_{p_2}$ за $p_1 < p_2$ (това е доказано например в (Hardy et al., 1952), като равенство се достига само когато $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. При горните означения следва, че $H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n$. В настоящата статия ще приложим метод, чрез който ще докажем следните теореми.

В случая, когато $n = 3$

Теорема 1.1 Неравенството $A_n \geq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 1.2 Неравенството $A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

В случая когато $n = 4$

Теорема 1.3 Неравенството $A_n \geq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2}$.

Теорема 1.4 Неравенството $A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В случая, когато $n = 5$

Теорема 1.5 Неравенството $A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Известни са много неравенства между класическите средни (за повече информация например Hardy et al., 1952; Niculesco, 2000; Sato, 2001; Mitev, 2003; Stolarsky, 1971), но неравенства от горния тип не са разглеждани. Доказателствата на горните теореми показват как могат да се доказват симетрични хомогенни неравенства между 3, 4, 5 произволни положителни числа. Прилагайки същия метод, ще покажем как могат да се доказват неравенства между основните метрични величини на произволен триъгълник.

Същност на метода и примери

Да разгледаме неравенството

$$(2.1) \quad F(a, b, c) \geq (>) 0,$$

където $F(a, b, c)$ е хомогенна симетрична функция на положителните реални променливи a, b, c . Освен това ще искаме F да може да се

представя *явно* като функция на елементарните симетрични полиноми $\sigma_1 = ab + bc + ca = t$, $\sigma_3 = abc = p$. Последното е възможно, например когато F е хомогенен симетричен полином. Метод за доказване на неравенство (2.1), когато F е симетричен хомогенен полином от трета степен, е предложен например от Stolarsky в (Stolarsky, 1971). Други методи за доказване на подобни неравенства на (2.1) са разгледани например в (Hardy et al., 1952), (Niculesco, 2000), (Sato, 2001), (Mitev, 2003), (Stolarsky, 1971), (Aliyev, 2007), (Barbara, 2008).

Тъй като F е хомогенна, можем да считаме, че $\sigma_1 = a + b + c = 1$. Означаваме $\sigma_2 = ab + bc + ca = t$, $\sigma_3 = abc = p$. Тогава $F(a, b, c)$ може да се представи явно като функция на t и p , т.е. $F(a, b, c) = f(t, p)$. Нашият метод се основава на разглеждането на $f(t, p)$, като функция на t при фиксирано p . Следващите лема дават някои оценки за t и p , както и неравенства между тях (ще считаме, че поне две от променливите a, b, c не са равни).

Лема 2.1 Изпълнени са неравенствата

$$(2.2) \quad 0 < p < \frac{1}{27}$$

$$(2.3) \quad 0 < t < \frac{1}{3}.$$

Доказателство: (2.2) следва от $0 < abc < \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. (2.3) следва от $0 < t = ab + bc + ca < \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$.

Лема 2.2 Изпълнени са неравенствата

$$(2.4) \quad t > \sqrt{3p},$$

$$(2.5) \quad t < \frac{1+9p}{4}.$$

Доказателство: в известното неравенство $(x+y+z)^2 > 3(xy+yz+zx)$ (поне две от числата са различни) полагаме $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ и получаваме

$t^2 = (ab+bc+ca)^2 > 3(ab^2c+bc^2a+ca^2b) = 3abc(a+b+c) = 3abc = 3p$, откъдето следва верността на (2.4). (2.5) е неравенството

$ab+bc+ca < \frac{1}{4} + \frac{9}{4}abc$. То следва например от известното неравенство (Schur) $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$, от равенството $a+b+c=1$ и от тъждеството

$$(a+b+c)^3 + 9abc - 4(ab+bc+ca) = a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b).$$

Ще разгледаме няколко примера, при чието доказателство ще демонстрираме нашия метод.

Пример 1. Вярно е неравенството

$$(2.6) \quad 2.A_3 \geq H_3 + S_3.$$

Доказателство: съгласно горните означения получаваме, че

$$A_3 = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \quad H_3 = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+bc+ca} = \frac{3p}{t},$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{3}} = \sqrt{\frac{1-2t}{3}}.$$

Тогава (2.6) е еквивалентно на следното неравенство:

$$(2.7) \quad 2 \cdot \frac{1}{3} \geq \frac{3p}{t} + \sqrt{\frac{1-2t}{3}}$$

Лесно се вижда, че когато трите числа са равни, то в (2.6) се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Сега лесно се проверява, че (2.7) е еквивалентно на

$$(2.8) \quad f(t) \geq 0, \text{ където } f(t) = 6t^3 + t^2 - 36pt + 81p^2.$$

Фиксираме p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ като функция на t за $t \in (\sqrt{3p}; \frac{1+9p}{4})$ (последното следва от Лема 2.2). От $f'(t) = 18t^2 + 2t - 9p$ и от (2.4) последователно получаваме $f'(t) > 18t^2 - 9p > 18.3p - 9p = 45p > 0$, т.е. $f'(t) > 0$ и следователно $f(t)$ е растяща функция $\Rightarrow$ достатъчно е да докажем, че

$$(2.9) \quad f(\sqrt{3p}) \geq 0, \text{ откъдето ще следва (2.8).}$$

Но $f(\sqrt{3p}) = 18p\sqrt{3p} + 3p - 36p\sqrt{3p} + 81p^2 = 3p(3\sqrt{3p} - 1)^2 > 0$, т.е. (2.9) е вярно. Следователно всичко е доказано.

Пример 2. Вярно е неравенството

$$(2.10) \quad 3.A_3 \geq 2.G_3 + 1.S_3$$

Доказателство: когато трите числа са равни, се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Както при доказателството на (2.6) получаваме, че

$$(2.10) \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt[3]{p} + \sqrt{\frac{1-2t}{3}} \quad (a+b+c=1, \quad abc=p, \quad ab+bc+ca=t)$$

$$\Leftrightarrow t \geq 6\sqrt[3]{p} - 6\sqrt[3]{p^2} - 1.$$

За да докажем последното неравенство и оттам и (2.10), е достатъчно да проверим верността на следното $\sqrt{3p} \geq 6\sqrt[3]{p} - 6\sqrt[3]{p^2} - 1$ (използвахме (2.4)).

В това неравенство полагаме $p = q^6$, следователно $q \in (0; \frac{\sqrt{3}}{3})$ съгласно (2.2). Тогава лесно се проверява, че е еквивалентно на следното вярно неравенство $(\frac{\sqrt{3}}{3} - q)((6q + 3\sqrt{3})(\frac{1}{3} - q^2) + q) > 0$. Следователно (2.10) е доказано.

Следващият пример показва, че оценките в Лема 2.1 и Лема 2.2 невинаги са достатъчни при прилагане на метода.

Пример 3. За произволни положителни числа a, b, c е изпълнено неравенството

$$(2.11) \quad (a+b+c)^4 + 6abc(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)^2 \geq (a+b+c)^2(ab+bc+ca)$$

Доказателство: лесно се проверява, че за $a=b=c$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. (2.11) е хомогенно и затова можем да считаме, че $a+b+c=1$. Лесно се проверява, че (2.11) е еквивалентно на (2.12) $f(t) \geq 0$, $f(t) = 4t^2 - 5t + 1 + 6p$, $t = ab+bc+ca$, $p = abc$.

Отново фиксираме p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ като функция на t за $t \in (\sqrt{3p}; \frac{1+9p}{4})$. Но $f'(t) = 8t - 5 < 0$ съгласно (2.3). Следователно

$f(t)$ е намаляваща функция и затова е достатъчно (но не е необходимо!) да докажем, че $(\frac{1+9p}{4}) \geq 0$. Но последното неравенство не е вярно, защото

$$f(\frac{1+9p}{4}) = \frac{3p(27p-1)}{4} \text{ и } p \in (0; \frac{1}{27}).$$

Последното следва от факта, че множеството от стойности на t не съвпада с интервала $(\sqrt{3p}; \frac{1+9p}{4})$. Ще се върнем към доказателството на (2.11) по-късно.

Следващата теорема се отнася за множеството от стойности на t .

Теорема 1. Нека p е фиксирано число от интервала $(0; \frac{1}{27})$. Тогава е изпълнено:

(i) Уравненията $2x^3 - x^2 + p = 0$ и $x^3 - 2x^2 + x - 4p = 0$ имат точно по два корена в интервала $(0; 1)$, съответно x_1, x_2 и x_3, x_4 , като при това са изпълнени неравенствата

$$(2.13) \quad 0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < x_4 < 1 \text{ и}$$

$$(2.14) \quad x_2 < \frac{1}{2}$$

(ii) Нека a, b, c са положителни числа, поне две от които са различни, $a + b + c = 1$, $abc = p$. Тогава множеството от стойности на $t = ab + bc + ca$ съвпада с интервала $[m; M]$, където

$$(2.15) \quad m = \min\{g(x_1), h(x_4)\}$$

$$(2.16) \quad M = \max\{g(x_2), h(x_3)\}$$

$g(x) = 2x - 3x^2$, $h(x) = \frac{1}{4}(1 + 2x - 3x^2)$, x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (i).

(iii) Изпълнени са неравенствата

$$(2.17) \quad m > \sqrt{3p} \text{ и}$$

$$(2.18) \quad M < \frac{1+9p}{4}.$$

Освен това, когато

(2.19) $t = m = 2x_1 - 3x_1^2$, то $p = x_1^2 - 2x_1^3$. Ако $t = M = 2x_2 - 3x_2^2$, то $p = x_2^2 - 2x_2^3$

(2.20) $t = m = \frac{1}{4}(1 + 2x_4 - 3x_4^2)$, то $p = \frac{1}{4}(x_4^3 - 2x_4^2 + x_4)$. Ако $t = M = \frac{1}{4}(1 + 2x_3 - 3x_3^2)$, то $p = \frac{1}{4}(x_3^3 - 2x_3^2 + x_3)$, x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (i), m, M са определени в (ii).

(iv)

(2.21) Когато са изпълнени (2.19) или (2.20), точно две от числата a, b, c са равни помежду си.

(Доказателството на теоремата е в края на статията.)

Продължение на доказателството на (2.11).

Разглеждаме $f(t)$ за $t \in [m; M]$ (m, M са определени в теорема 1). Тогава е достатъчно да докажем, че $f(M) \geq 0$. Съгласно (2.13), (2.14), (2.19), (2.20) разглеждаме два случая:

$$(i) \quad t = M = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \quad x = x_2.$$

Тогава

$$(2.22) \quad \Leftrightarrow 4(2x - 3x^2)^2 - 5(2x - 3x^2) + 1 + 6(x^2 - 2x^3) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 1)^2(2x - 1)^2 \geq 0$$

Последното неравенство е строго, защото $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

$$(ii) \quad t = M = \frac{1}{4}(1 + 2x - 3x^2) \\ p = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 + x), \quad x \in \left(0; \frac{1}{3}\right), \quad x = x_3. \quad \text{Тогава} \quad (2.22)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1+3x-3x^2}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1+2x-3x^2}{4}\right) + 1 + 6\left(\frac{x^3-2x^2+x}{4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 - 6x^3 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(3x-1)^2 \geq 0.$$

Последното неравенство е строго, защото $x \in (0; \frac{1}{3})$. Следователно (2.11) е доказано.

Заб. (2.11) е еквивалентно на (част от problem 2839 от (Cruix Mathematicorum With Mathematical Mayhem, 2004)) $(a^3 + b^3 + c^3)^2 + 3(abc)^2 \geq 4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$, защото съответната функция е $f(t) = (1-t)(4t^2 - 5t + 1 + 6p)$.

Заб. От доказателствата на *примери 1-3* се вижда, че равенство се достига само при $a = b = c$.

3. Основни резултати

Припомняме, че сме въвели следните означения:

$$M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G_n, \quad M_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A_n, \quad M_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = H_n,$$

$$M_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = S_n.$$

Теорема 1.1. Неравенството

$$(3.1) \quad A_3 \geq (1-\lambda)H_3 + \lambda S_3 \text{ е вярно } \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Доказателство: Нека $\frac{a+b+c}{3} \geq (1-\lambda) \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \lambda \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ е из-

пълнено за произволни положителни числа a, b, c където λ е фиксирано. Полагаме $a = 1 - 2\varepsilon$, $b = c = \varepsilon$ в последното неравенство. При $\varepsilon \rightarrow +0$ получаваме, че $\lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следователно е достатъчно да докажем следното

неравенство

$$(3.2) \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right) \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Можем да считаме, че $a+b+c=1$. Тогава при означенията $ab+bc+ca=t$, $abc=p$ получаваме

$$(3.2) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3p}{t} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1-2t}{3}} \Leftrightarrow t-3(3-\sqrt{3})p \geq t\sqrt{1-2t}$$

$\Leftrightarrow$

$$(3.3) (t-3(3-\sqrt{3})p)^2 \geq (t\sqrt{1-2t})^2 \text{ (от (2.2) и (2.4) следва } t-3(3-\sqrt{3})p > 0 \text{).}$$

Лесно се проверява, че (3.3) е еквивалентно на следното

$$(3.4) \quad f(t) \geq 0, \text{ където } f(t) = 2t^3 - 6(3-\sqrt{3})pt + 54(2-\sqrt{3})p^2.$$

Фиксираме p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ за $t \in [m; M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От $f'(t) = 6t^2 - 6(3-\sqrt{3})p$ и (2.4) следва

$$f'(t) > f'(\sqrt{3p}) = 6\sqrt{3}p > 0 \Rightarrow f(t) \text{ е растяща функция, следова-}$$

телно (3.4) ще е вярно, ако докажем следното

$$(3.5) \quad f(m) \geq 0.$$

Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

$$(i) \quad t = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in (0; \frac{1}{3}), \quad x = x_1$$

$$\text{Тогава (3.5)} \Leftrightarrow 2(2x-3x^2)^3 - 6(3-\sqrt{3})(x^2-2x^3)(2x-3x^2) + 54(2-\sqrt{3})(x^2-2x^3)^2 \geq 0.$$

След опростяване получаваме, че последното неравенство е еквивалентно на следното вярно неравенство $6x^3(3x-1)^2[(21-12\sqrt{3})x+6\sqrt{3}-10] \geq 0$.

Последното неравенство е строго, защото $x \in (0; \frac{1}{3})$.

$$(ii) \quad t = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2), \quad p = \frac{1}{4}(x^3-2x^2+x), \quad x \in (\frac{1}{3}; 1), \quad x = x_4$$

Тогава

$$(3.5) \Leftrightarrow 2 \frac{(1+2x-3x^2)^3}{64} - 6(3-\sqrt{3}) \frac{(1+2x-3x^2)(x^3-2x^2+x)}{16} + 54(2-\sqrt{3}) \frac{(x^3-2x^2+x)^2}{16} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^3(1-3x)^2[(12\sqrt{3}-21)x+1] \geq 0.$$

Последното неравенство е вярно (защото от $x \in (0; \frac{1}{3})$ следва

$$(12\sqrt{3}-21)x+1 > (12\sqrt{3}-21)\frac{1}{3}+1 = 4\sqrt{3}-6 > 0)$$

и е строго. Следователно (3.5) е доказано и в двата случая, с което приключва доказателството на теоремата.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато трите числа са равни.

Теорема 1.2. Неравенството

$$(3.6) \quad \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ е вярно} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Доказателство: нека $\frac{a+b+c}{3} \leq (1-\lambda) \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \lambda \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ е из-

пълнено за произволни положителни числа a, b, c , където λ е фиксирано.

Полагаме $a = 2\varepsilon$, $b = c = \frac{1}{2} - \varepsilon$ в последното неравенство.

При $\varepsilon \rightarrow +0$ получаваме, че $\lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Следователно е достатъчно да докажем следното неравенство

$$(3.7) \quad \frac{a+b+c}{3} \leq (1-\frac{\sqrt{6}}{3}) \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

При $a=b=c$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Можем да считаме, че $a+b+c=1$. Тогава при означенията $ab+bc+ca=t$, $abc=p$ получаваме, че (3.7) $\Leftrightarrow$

$$(3.8) \quad F(t) \geq 0, \quad \text{където } F(t) = \sqrt{2-4t} + 3(3-\sqrt{6})\frac{p}{t} - 1.$$

Фиксираме p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ и разглеждаме $F(t)$ за $t \in [m; M]$, където

m, M са определени в Теорема 1. От $F'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t}} - \frac{(3-\sqrt{6})p}{t^2} < 0$ следва, че $F(t)$ е намаляваща функция. Следователно (3.8) ще е вярно, ако докажем, че

$$(3.9) \quad F(M) \geq 0.$$

След преобразуване на (3.8) получаваме следното еквивалентно неравенство

$$(3.10) \quad f(t) \geq 0,$$

където $f(t) = -4t^3 + t^2 + 6(3-\sqrt{6})pt - 27(5-2\sqrt{6})p^2$. Тогава (3.9) ще следва от $f(M) \geq 0$, което ще докажем. Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

$$(i) \quad t = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}), \quad x = x_2.$$

Заместваме в (3.10) и получаваме следното вярно неравенство

$$f(M) = x^2(3x-1)^2(1-2x)[1-(3\sqrt{6}-6)x] \geq 0$$

(от $x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ следва $1 - (3\sqrt{6} - 6)x > 1 - (3\sqrt{6} - 6)\frac{1}{2} = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2} > 0$).

Последното неравенство е строго.

(ii) $t = \frac{1}{4}(1 + 2x - 3x^2)$, $p = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 + x)$, $x \in (0; \frac{1}{3})$, $x = x_3$.

Заместваме в (3.10) и получаваме следното вярно неравенство

$$f(M) = x(3x - 1)^2(1 - x)^2[8 - 3\sqrt{6} + (3\sqrt{6} - 6)x] \geq 0$$

(от $x \in (0; \frac{1}{3}) \Rightarrow 8 - 3\sqrt{6} + (3\sqrt{6} - 6)x > 8 - 3\sqrt{6} > 0$).

Последното неравенство е строго. Следователно (3.9) е доказано и в двата случая, с което приключва доказателството на теоремата.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато трите числа са равни.

Теорема 1.1.1. Неравенството $A_3 \geq (1 - \lambda).G_3 + \lambda.S_3$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Неравенството $A_3 \geq (1 - \lambda).G_3 + \lambda.S_3$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Доказателството е подобно на доказателствата на Теорема 1.1 и Теорема 1.2, но е свързано с дълги (елементарни) пресмятания и преобразувания.

Теорема 1.3. Неравенството $A_4 \geq (1 - \lambda).H_4 + \lambda.S_4$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2}$

Доказателство: Нека

$$(3.11) \quad \frac{a+b+c+d}{4} \leq (1-\lambda) \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} + \lambda \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$$

е изпълнено за произволни положителни числа a, b, c, d , където λ е фиксирано. Можем да считаме, че

$$(3.12) \quad a + b + c + d = 1$$

Полагаме $a = b = c = \varepsilon$, $d = 1 - 3\varepsilon$ в последното неравенство. При $\varepsilon \rightarrow +$ получаваме, че $\lambda \leq \frac{1}{2}$. Достатъчно е да докажем, че (3.11) е вярно за $\lambda = \frac{1}{2}$. Явно, когато и четирите числа са равни, се достига равенство. Нека поне две от тях са различни. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че

$$(3.13) \quad a \leq b \leq c \leq d.$$

Фиксираме d и полагаме

$$(3.14) \quad a = a_1\theta, \quad b = b_1\theta, \quad c = c_1\theta, \quad 1-d = \theta.$$

Тогава от (3.12), (3.13) следва, че $d \in (\frac{1}{4}; 1)$ откъдето

$$(3.15) \quad \theta \in (0; \frac{3}{4}).$$

От (3.12) и (3.14) получаваме $a_1 + b_1 + c_1 = \frac{a+b+c}{\theta} = \frac{a+b+c}{1-d} = \frac{1-d}{1-d} = 1$, т.е.

$$(3.16) \quad a_1 + b_1 + c_1 = 1.$$

Последното равенство позволява да приложим метода, който използвахме при доказателствата на Теорема 1.1 и Теорема 1.2.

Заместваме в (3.11) $\lambda = \frac{1}{2}$ и от (3.12), (3.14) получаваме, че е достатъчно

да докажем следното:

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1} \right) + \frac{1}{1-\theta}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\theta^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + (1-\theta)^2}{4}} \Leftrightarrow$$

$$(3.17) \quad F_\theta(t) \leq 1,$$

$$\text{където } F_\theta(t) = \frac{8\theta(1-\theta)p}{(1-\theta)t + \theta p} + \sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2},$$

$t = a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1$, $p = a_1b_1c_1$, също така използвахме (3.16). Първо ще разгледаме случая, когато $a_1 = b_1 = c_1$. Тогава $t = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{27}$ и от (3.17) следва, че е достатъчно да докажем следното

$$(3.18) \quad g(\theta) \leq 1, \quad g(\theta) = \frac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}, \quad \theta \in (0; \frac{3}{4})$$

(съгласно (3.15)).

$$(3.18) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}.$$

$$\Leftrightarrow -(4\theta-3)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{9-8\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}-2\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9-8\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(3.19) \quad \theta(3-2\theta) \geq 0.$$

От верността на (3.19) следва (3.18). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни.

Разглеждаме функцията $F_\theta(t)$, определена в (3.17) при фиксирано p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ за $t \in [m; M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От

$$F'_\theta(t) = -\frac{8\theta(1-\theta)^2 p}{[(1-\theta)t + \theta p]^2} - \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2}} < 0 \text{ следва, че } F_\theta(t) \text{ е на-}$$

маляваща функция, следователно, за да довършим доказателството на теоремата, е необходимо да докажем:

$$(3.20) \quad F_\theta(m) \leq 1.$$

Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

$$(i) \quad t = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in (0; \frac{1}{3}), \quad x = x_1.$$

След заместване на t, p в (3.17) и преобразуване, получаваме

$$(3.21) \quad F_\theta(m) = F(x, \theta) = \frac{8\theta(1-\theta)(x-2x^2)}{2-3x-2\theta(x-1)^2} + \sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2}.$$

Да отбележим, че x и θ не зависят едно от друго. Тогава от (3.21) получаваме:

$$(3.22) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, \theta) = 2\theta(3x-1)F_1(x, \theta), \text{ където}$$

$$F_1(x, \theta) = \frac{8(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2} + \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2}}.$$

Означаваме:

$$f_1(x, \theta) = \frac{8(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2}, \quad f_2(x, \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2}}.$$

Ще докажем, че

$$(3.23) \quad F_1(x, \theta) = f_1(x, \theta) + f_2(x, \theta) < 0.$$

$$\text{От } \frac{\partial f_1(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{8x(x-1)(2x-1)(1-\theta)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^3} > 0 \text{ следва, че } f_1(x, \theta) \text{ е растяща}$$

функция по отношение на θ . Следователно

$$(3.24) \quad f_1(x, \frac{3}{4}) < f_1(x, \frac{3}{4}) = f_{11}(x) = \frac{2(1)}{(3^2-1)^2}.$$

От $f_{11}'(x) = \frac{2(1-3x^2)(9x^2-12x+1)}{(3x^2-1)^4}$ лесно следва, че

$$f_{11}(x) < f_{11}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{16}(5+3\sqrt{3}).$$

От последното и от (3.24) получаваме

$$(3.25) \quad f_1(x, \theta) < f_{11}(x) < -\frac{3}{16}(5+3\sqrt{3}).$$

$$\text{От } \frac{\partial f_2(x, \theta)}{\partial x} = \frac{2\theta^3(1-3x)}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2]^3}} > 0$$

($x \in (0; \frac{1}{3})$, $\theta \in (0; \frac{3}{4})$) следва, че

$f_2(x, \theta)$ е растяща функция по отношение на x . Следователно

$$(3.26) \quad f_2(x, \theta) < f_2\left(\frac{1}{3}, \theta\right) = f_{22}(\theta) = \frac{\sqrt{3}\theta}{\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}}.$$

От $f_{22}'(\theta) = \frac{3\sqrt{3}\cdot(1-\theta)}{\sqrt{(4\theta^2-6\theta+3)^3}} > 0$ следва, че $f_{22}(\theta) < f_{22}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$. От по-

следното и от (3.26) следва

$$(3.27) \quad f_2(x, \theta) < \frac{3}{2}$$

От (3.25) и (3.27) получаваме

$$F_1(x, \theta) = f_1(x, \theta) + f_2(x, \theta) < -\frac{3}{16}(5+3\sqrt{3}) + \frac{3}{2} = \frac{9}{16}(1-\sqrt{3}) < 0, \quad \text{т.е.}$$

(3.23) е доказано.

От (3.22), (3.23) и от $x \in (0; \frac{1}{3})$ следва, че $F_x'(x, \theta) = 2\theta(3x-1)F_1(x, \theta) > 0$, откъдето следва, че $F(x, \theta)$ е растяща функция по отношение на x . Тогава (3.20) ще следва от $F(x, \theta) < F\left(\frac{1}{3}, \theta\right) = g(\theta) = \frac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\theta^2-6\theta+3} \leq 1$, което е точно доказаното по-горе (3.18). Следователно (3.20) е доказано в този случай.

$$(ii) \quad t = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2), \quad p = \frac{1}{4}(x^3-2x^2+x), \quad x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right), \quad x = x_4.$$

След заместване на t, p в (3.17) получаваме

$$(3.28) \quad F_\theta(m) = H(x, \theta) = \frac{8\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(x+1)^2} + \sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}.$$

Тогава (3.20) $\Leftrightarrow$

$$(3.29) \quad H(x, \theta) \leq 1 \text{ за } x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \text{ и } \theta \in \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

След пресмятане и преобразуване получаваме, че

$$(3.30) \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, \theta) = \theta(1-3x)[h_1(x, \theta) + h_2(x, \theta)],$$

$$\text{Където } h_1(x, \theta) = \frac{8(1-\theta)^2(x+1)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^2} \text{ и } h_2(x, \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}}.$$

По-долу ще докажем, че

$$(3.31) \quad h_1(x, \theta) + h_2(x, \theta) > 0.$$

От (3.31), $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ и (3.30) следва, че $H'_x(x, \theta) < 0$. Тогава $H(x, \theta)$ е намаляваща по отношение на x и съгласно (3.29) е достатъчно да докажем, че $H\left(\frac{1}{3}, \theta\right) \leq 1$, но това е еквивалентно на $H\left(\frac{1}{3}, \theta\right) = g(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{9-8\theta} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} \leq 1$, $\theta \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$, което е точно доказаното по-горе (3.18). Остава само да докажем (3.31).

Доказателство: от (3.30) получаваме

$$\frac{\partial h_1(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{16x(x-1)(x+1)(1-\theta)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^3} < 0 \quad \left(x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)\right). \text{ Следователно } h_1(x, \theta)$$

е намаляваща функция по отношение на θ , $\Rightarrow$

$$(3.32) \quad h_1(x, \theta) > h_1\left(x, \frac{3}{4}\right) = h_{11}(x) = \frac{8(x+1)}{(3x^2-6x-1)^2}.$$

От $h'_{11}(x) = \frac{8(3x^2-6x-1)(-9x^2-6x+11)}{(3x^2-6x-1)^4}$ лесно се проверява, че за $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ от последното и от (3.32) следва, че

$$(3.33) \quad h_1(x, \theta) > \frac{3(5+3\sqrt{3})}{32}.$$

$$\text{От } \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2]^3}} > 0 \text{ следва, че } h_2(x, \theta)$$

е растяща функция по отношение на x . Тогава

$$(3.34) \quad h_2(x, \theta) > h_2\left(\frac{1}{3}, \theta\right) = h_{22}(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\theta}{\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{От } h_{22}'(\theta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1-\theta}{\sqrt{(4\theta^2-6\theta+3)^3}} < 0 \text{ следва, че } h_{22}(\theta) \text{ е намаляваща} \\ \Rightarrow h_{22}(\theta) &> h_{22}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}. \text{ От последното и от (3.34) следва} \\ (3.35) \quad h_2(x, \theta) &> -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

От (3.33) и от (3.35) получаваме, че

$$h_1(x, \theta) + h_2(x, \theta) > \frac{3(5+3\sqrt{3})}{32} - \frac{3}{4} = \frac{9(\sqrt{3}-1)}{32} > 0, \text{ т.е (3.31) е доказано.}$$

Следователно (3.29) е доказано, с което завършваме доказателството на Теорема 1.3.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Теорема 1.4. Неравенството $A_4 \leq (1-\lambda).H_4 + \lambda.S_4$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Доказателство: нека

$$(3.36) \quad \frac{a+b+c+d}{4} \leq (1-\lambda) \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} + \lambda \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$

е изпълнено за произволни положителни числа a, b, c, d , където λ е фиксирано. Можем да считаме, че $a+b+c+d=1$. Полагаме $a=b=c=\varepsilon$, $d=1-3\varepsilon$ в последното неравенство.

При $\varepsilon \rightarrow +0$ получаваме, че $\lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Достатъчно е да докажем, че (3.36)

е вярно за $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По аналогичен начин, както в доказателството на Теорема 1.3, получаваме, че трябва да докажем следното:

$$(3.37) \quad F_\theta(t) \geq 1, \text{ където}$$

$$F_\theta(t) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)p}{(1-\theta)t+pt} + \sqrt{3}\sqrt{\theta^2(1-2t)+(1-\theta)^2}.$$

Първо ще разгледаме случая, когато $a_1=b_1=c_1$. Тогава $t=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{27}$ и от (3.37) следва, че е достатъчно да докажем следното

$$(3.38) \quad g(\theta) \geq 1, \quad g(\theta) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)}{9-8\theta} + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}, \quad \theta \in (0; \frac{3}{4}).$$

$$(3.38) \Leftrightarrow \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)}{9-8\theta} \geq 1 - \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}, \quad \theta \in (0; \frac{3}{4})$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(2-\sqrt{3})(4\theta-3)^2}{9-8\theta} \geq \frac{-(4\theta-3)^2}{\sqrt{3} + 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{9-8\theta} \leq \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}}$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})(9-8\theta) - \sqrt{3} \geq 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} \Leftrightarrow$$

$$(3.39) \quad 9 + 4\sqrt{3} \geq 4(2+\sqrt{3})\theta + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}.$$

Разглеждаме функцията $r(\theta) = \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}$ за $\theta \in (0; \frac{3}{4})$. От $r'(\theta) = \frac{4\theta-3}{\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}} < 0$ следва, че (3.40) $r(\theta) < r(0) = \sqrt{3}$.

От (3.39), (3.40) и от $\theta \in (0; \frac{3}{4})$ получаваме, че

$$(3.41) \quad 4(2+\sqrt{3})\theta + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} < 4(2+\sqrt{3})\frac{3}{4} + \sqrt{3} < 9 + 4\sqrt{3}.$$

Тогава от (3.39), (3.41) следва верността на (3.38). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни. Разглеждаме функцията $F_\theta(t)$, определена при фиксирано p , $p \in (0; \frac{1}{27})$

за $t \in [m; M]$ където m, M са определени в Теорема 1. От

$$(3.42) \quad F'_\theta(t) = -\frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)^2 p}{[(1-\theta)t + \theta p]^2} - \frac{\sqrt{3}\theta^2}{\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2}} < 0$$

следва, че

$$(3.43) \quad F_\theta(t) \text{ е намаляваща функция.}$$

Следователно, за да довършим доказателството на теоремата, е необходимо да докажем (3.44) $F_\theta(M) \geq 1$.

По-долу ще считаме, че θ е фиксирано ($\theta \in (0; \frac{3}{4})$). Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

$$(i) \quad t = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}), \quad x = x_2.$$

След заместване на t, p и преобразуване, получаваме

$$(3.45) \quad F_{\theta}(M) = F(x) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)(x-2x^2)}{2-3x-2\theta(x-1)^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2}.$$

Тогава от (3.45) следва

$$(3.46) \quad F'(x) = 2\theta(3x-1)F_1(x), \text{ където}$$

$$(3.47) \quad F_1(x) = \frac{2(16-8\sqrt{3})(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2} + \frac{\sqrt{3}\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2}}.$$

От (3.47) след пресмятане и преобразуване получаваме:

$$(3.48) \quad F_1'(x) = \frac{2(16-8\sqrt{3})(1-\theta)^2[3x-4+6\theta(x-1)^2]}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^3} - \frac{2\sqrt{3}\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2]^3}}.$$

От $\theta \in (0; \frac{3}{4})$ и $x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ следва, че

$$3x-4+6\theta(x-1)^2 < 3x-4+6 \cdot \frac{3}{4}(x-1)^2 = \frac{1}{2}(9x^2-12x+1) < 0.$$

От последното и от (3.48) следва, че $F_1'(x) < 0$, следователно

(3.49) $F_1(x)$ е намаляваща функция.

От (3.49), (3.46) и от $3x-1 > 0$ следва, че са възможни следните три случая:

$$(i1) \quad F_1(x) \geq 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}).$$

Тогава от (3.46) следва, че $F(x)$ е растяща и тогава е достатъчно да докажем, че $(-)\geq 1 \Leftrightarrow (3.40)$, което е доказано по-горе.

$$(i2) \quad F_1(x) > 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{3}; x_0), \quad F_1(x) < 0 \text{ за } x \in (x_0; \frac{1}{2}).$$

Тогава в т. x_0 , $F(x)$ има локален тах. Следователно е достатъчно да проверим верността на следните две неравенства: $F(\frac{1}{3}) \geq 1$, което е доказано и

$$(3.50) \quad F(\frac{1}{2}) \geq 1.$$

Но от (3.45) следва

$$(3.50) \quad \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{\theta^2}{2} + (1-\theta)^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{2}(3\theta^2 - 4\theta + 2) \geq 1 \Leftrightarrow (3\theta - 2)^2 \geq 0,$$

т.е (3.50) е доказано.

$$(i3) \quad F(x) \leq 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}).$$

Тогава $F(x)$ е намаляваща и е достатъчно да докажем (3.50), което е направено.

$$(ii) \quad t = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2), \quad p = \frac{1}{4}(x^3-2x^2+x), \quad x \in (0; \frac{1}{3}), \quad x = x_3.$$

След заместване на t, p в (3.39) получаваме

$$(3.51) \quad F_{\theta}(M) = H(x, \theta) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(x+1)^2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}.$$

Тогава (3.44) $\Leftrightarrow H(x, \theta) \geq 1$. Считаме, че θ е фиксирано и ще пишем $H(x)$ вместо $H(x, \theta)$. От (3.51) получаваме, че

$$(3.52) \quad H'(x) = \theta(1-3x)H_1(x), \quad \text{където}$$

$$(3.53) \quad H_1(x) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)^2(x+1)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^2} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}}.$$

От (3.53) получаваме

$$(3.54) \quad H_1'(x) = \frac{(16-8\sqrt{3}).27.\theta(1-\theta)^2[3\theta(x+1)^2-5-3x]}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^3} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\theta^3(1-3x)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2]^3}}$$

От $x \in (0; \frac{1}{3})$ и $\theta \in (0; \frac{3}{4})$ последователно получаваме

$$3\theta(x+1)^2-3x-5 < 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot (x+1)^2-3x-5 = \frac{1}{4}(9x^2+6x-11) < 0.$$

От последното, $x \in (0; \frac{1}{3})$ и от (3.54) следва, че $H_1'(x) < 0 \Rightarrow H_1(x)$ е намаляваща функция.

От последното, (3.52) и от $x \in (0; \frac{1}{3})$ следва, че са възможни следните три случая:

$$(ii1) \quad H_1(x) \geq 0 \quad \text{за } x \in (0; \frac{1}{3}).$$

Тогава $H'(x) \geq 0$ за $x \in (0; \frac{1}{3})$, следователно $H(x)$ е растяща и тогава е достатъчно да докажем, че

$$(3.55) \quad (0) \geq 1.$$

Последователно получаваме:

$$(3.55) \quad \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{3\theta^2-4\theta+2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}(3\theta^2-4\theta+2) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (3\theta-2)^2 \geq 0,$$

т.е. (3.55) е доказано.

$$(ii2) \quad H_1(x) > 0 \quad \text{за } x \in (0; x_0), \quad H_1(x) < 0 \quad \text{за } x \in (x_0; \frac{1}{3}).$$

Тогава $H(x)$ има локален $\max$ в т. x_0 и следователно е достатъчно да докажем:

$$(3.55) \quad \left(\text{което е доказано} \right) \text{ и } H\left(\frac{1}{3}\right) \geq 1. \text{ Но последното неравенство е}$$

точно доказаното по-горе.

$$(ii3) \quad H_1(x) < 0 \quad \text{за } x \in \left(0; \frac{1}{3}\right).$$

Следователно $H(x)$ е намаляваща и тогава е достатъчно да докажем, че $H\left(\frac{1}{3}\right) \geq 1$. И в трите случая $H(x) \geq 1$, следователно всичко е доказано.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Теорема 1.5 Неравенството $A_5 \leq (1-\lambda).H_5 + \lambda.S_5$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Доказателство: нека

$$(3.56) \quad \frac{a+b+c+d+e}{5} \leq (1-\lambda) \frac{5}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}} + \lambda \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}}$$

е изпълнено за произволни положителни числа a, b, c, d, e , където λ е фиксирано. Можем да считаме, че

$$(3.57) \quad a+b+c+d+e=1$$

Полагаме $a=b=c=d=\frac{1}{4}-\varepsilon$, $e=4\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ получаваме, че

$\lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Достатъчно е да докажем, че (3.56) е вярно за $\lambda = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Можем да считаме, че

$$(3.58) \quad a \leq b \leq c \leq d \leq e.$$

Полагаме: $a=a_1\theta$, $b=b_1\theta$, $c=c_1\theta$, $1-d-e=\theta$, $de=\delta$,
 $t=a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1$, $p=a_1b_1c_1$.

Явно $a_1+b_1+c_1=1$. От (3.57) и (3.58) следват:

$$(3.59) \quad \theta \in \left(0; \frac{4}{5}\right) \text{ и}$$

$$(3.60) \quad \delta \in \left(0; \frac{(1-\theta)^2}{4}\right].$$

Лесно се проверява, че е достатъчно да докажем:

$$(3.61) \quad F(t, p, \theta, \delta) \geq 1,$$

където $F(t, p, \theta, \delta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})p\theta\delta}{\delta + \theta(1-\theta)p} + 2\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2 - 2\delta}$. Нека

първо $a = b_1 = c_1$. Тогава $t = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{27}$. Имаме (3.61) $\Leftrightarrow$

$$(3.62) \quad f(\delta, \theta) \geq 1,$$

Където $f(\delta, \theta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta\delta}{9\delta + \theta(1-\theta)} + 2\sqrt{\frac{\theta^2}{3} + (1-\theta)^2 - 2\delta}$. Фиксираме θ , $\theta \in (0; \frac{4}{5})$ и разглеждаме $f(\delta, \theta)$ като функция на δ , $\delta \in (0; \frac{(1-\theta)^2}{4}]$ (ще пишем $\tilde{f}(\delta)$ вместо $f(\delta, \theta)$).

Последователно получаваме:

$$\begin{aligned} f'(\delta) &= \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)}{[9\delta + \theta(1-\theta)]^2} - \frac{2}{\sqrt{\frac{\theta^2}{3} + (1-\theta)^2 - 2\delta}}, \\ (3.63) \quad f''(\delta) &= -\frac{90(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)}{[9\delta + \theta(1-\theta)]^3} - \frac{2}{\sqrt{[\frac{\theta^2}{3} + (1-\theta)^2 - 2\delta]^3}} < 0. \end{aligned}$$

Съгласно (3.63), (3.62) ще следва от верността на следните неравенства:

$$(3.64) \quad f(0) \geq 1 \text{ и}$$

$$(3.65) \quad f\left(\frac{(1-\theta)^2}{4}\right) \geq 1.$$

Доказателство на (3.64) и (3.65):

$$\begin{aligned} (3.64) \quad &\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{\theta^2}{3} + (1-\theta)^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(4\theta^2 - 6\theta + 3) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 16\theta^2 - 24\theta + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (4\theta - 3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.65) \quad &\Leftrightarrow \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)}{9-5\theta} + \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{5\theta^2 - 6\theta + 3} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 3(\sqrt{5}-2)[-(5\theta-3)^2] \cdot \frac{1}{9-5\theta} \geq \frac{\sqrt{6}[-(5\theta-3)^2]}{\sqrt{6} + \sqrt{5}\sqrt{5\theta^2 - 6\theta + 3}} \\ &\Leftrightarrow 3(\sqrt{5}-2) \cdot \frac{1}{9-5\theta} \leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{25\theta^2 - 30\theta + 15}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(3.66) \quad f_1(\theta) \geq f_2(\theta),$$

Където $f_1(\theta) = \frac{2+\sqrt{5}}{3}(9\sqrt{6}-5\sqrt{6}\theta)$ и $f_2(t) = \sqrt{25\theta^2 - 30\theta + 15}$. От $\theta \in (0; \frac{4}{5})$ лесно се получава, че

$$(3.67) \quad f_1(\theta) \geq f_1(\frac{4}{5}) = \frac{\sqrt{6}(5\sqrt{5}+7)}{3},$$

$$(3.68) \quad f_2(\theta) < f_2(0) = \sqrt{15}.$$

Тогава от $\frac{\sqrt{6}(5\sqrt{5}+7)}{3} > \sqrt{15}$, (3.67) и (3.68) следва верността на (3.66) и оттам следва (3.65). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни. Разглеждаме $F(t, p, \theta, \delta)$ (определена в (3.61)) като функция на t при фиксирано p (при условията на Теорема 1) и като функция на δ при фиксирано θ , $\theta \in (0; \frac{4}{5})$.

$$\text{От } \frac{\partial F}{\partial t}(t, \delta) = -\frac{(5-2\sqrt{5})\theta \cdot p}{[\delta t + \theta(1-\theta)p]^2} - \frac{2}{\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2 - 2\delta}} < 0$$

следва, че е достатъчно да докажем:

$$(3.69) \quad F(M) \geq 1$$

(M е определено в Теорема 1). Съгласно Теорема 1 разглеждаме два случая:

$$(i) \quad t = 2x - 3x^2, \quad p = x^2 - 2x^3, \quad x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}), \quad x = x_2.$$

След заместване на t, p в (3.61) и преобразуване получаваме

$$(3.69) \Leftrightarrow$$

$$(3.70) \quad G(x, \delta) \geq 1,$$

$$\text{Където } G(x, \delta) = \frac{(5-2\sqrt{5})\theta(x-2x^2)}{\delta(2-3x) + \theta(1-\theta)(x-2x^2)} + 2\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2 - 2\delta}$$

$$\text{От } \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} = -\frac{20(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)(x-2x^2)(2-3x)}{[\delta(2-3x) + \theta(1-\theta)(x-2x^2)]^3} - \frac{2}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1) + (1-\theta)^2 - 2\delta]^3}} \right)$$

следва, че за да е вярно (3.70), трябва да докажем следните:

$$(3.71) \quad G(x, 0) \geq 1$$

И

$$(3.72) \quad G(x, \frac{(1-\theta)^2}{4}) \geq 1.$$

$$(3.71) \Leftrightarrow g_1(x, \theta) \geq 1, \text{ където } g_1(x, \theta) = 2\sqrt{\theta(6x^2 - 4x + 1) + (1-\theta)^2}.$$

Да отбележим, че x и θ не зависят едно от друго.

$$\text{От (3.71)} \Rightarrow \frac{\partial g_1(x, \theta)}{\partial x} =$$

$$\frac{12x-4}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}} > 0 \quad (x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})). \text{ Следователно } g_1(x, \theta) \text{ е}$$

растяща по отношение на x . Тогава (3.71) следва от:

$$g_1(x, \theta) > g_1(\frac{1}{3}, \theta) = 2\sqrt{\frac{\theta^2}{3} + (1-\theta)^2} \geq 1, \text{ което точно е доказаното по-горе (3.64).}$$

$$(3.72) \Leftrightarrow$$

$$(3.73) \quad g_2(x, \theta) \geq 1,$$

$$\text{Където } g_2(x, \theta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)x(1-2x)}{2-3x-\theta(8x^2-7x+2)} + 2\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + \frac{(1-\theta)^2}{2}}.$$

От (3.73) получаваме:

$$\frac{\partial g_2(x, \theta)}{\partial x} = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)[9x^2-8x+2+\theta(1-x)(3x-1)]}{[2-3x-\theta(8x^2-7x+2)]^2} + \frac{4\theta^2(3x-1)}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1) + \frac{(1-\theta)^2}{2}}} > 0$$

(защото $x \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ и $\theta \in (0; \frac{4}{5})$). Тогава $g_2(x, \theta)$ е растяща по отношение на x и е достатъчно да докажем:

$$(3.74) \quad g_2(\frac{1}{3}, \theta) \geq 1.$$

Но (3.74) е еквивалентно на $\frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)}{9-5\theta} + \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{5\theta^2-6\theta+3} \geq 1$, т.е. на (3.65), което е доказано по-горе.

$$(ii) \quad t = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2), \quad p = \frac{1}{4}(x^3-2x^2+x), \quad x \in (0; \frac{1}{3}), \quad x = x_3.$$

След заместване на t, p в (3.61) получаваме (3.69) $\Leftrightarrow$

$$(3.75) \quad H(x, \delta) \geq 1,$$

$$\text{където } H(x, \delta) = \frac{5(5-2\sqrt{5}\delta\theta(x-x^2))}{\delta(1+3x)+\theta(1-\theta)(x-x^2)} + 2\sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta^2)-2\delta}.$$

$$\text{От } \frac{\partial^2 H}{\partial \delta^2} < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \delta^2} = -\frac{10(5-2\sqrt{5})(1-\theta)\theta^2(x-x^2)^2(1+3x)}{[\delta(1+3x)+\theta(1-\theta)(x-x^2)]^3} - \frac{2}{\sqrt{\left[\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2-2\delta\right]^3}} \right)$$

получаваме, че (3.75) ще следва от верността на следните две неравенства:

$$(3.76) \quad H(x, 0) \geq 1$$

и

$$(3.77) \quad H\left(x, \frac{(1-\theta)^2}{4}\right) \geq 1.$$

Припомняме, че $x \in (0; \frac{1}{3})$, $\delta \in (0; \frac{(1-\theta)^2}{4}]$ и $\theta \in (0; \frac{4}{5})$.

Доказателство на (3.76):

$$(3.76) \Leftrightarrow$$

$$(3.78) \quad h(x, \theta) \geq 1,$$

$$\text{където } h_1(x, \theta) = 2\sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}.$$

$$\text{От } \frac{\partial h_1(x, \theta)}{\partial x} = \frac{\theta^2(3x-1)}{\sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}} < 0 \text{ следва, че } h_1(x, \theta) \text{ е на-}$$

маляваща по отношение на x . Тогава, за да е вярно (3.78), е достатъчно да докажем: $h_1(\frac{1}{3}, \theta) \geq 1$, което е еквивалентно на доказаното по-горе

$$(3.64) \quad 2\sqrt{\frac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2} \geq 1.$$

Доказателство на (3.77):

$$(3.77) \quad h_2(x, \theta) \geq 1, \text{ където}$$

$$h_2(x, \theta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(4x^2-x+1)} + \sqrt{2}\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}.$$

Последователно получаваме:

$$(3.79) \quad \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} = \theta(1-3x)r(x, \theta),$$

$$\text{Където } r(x, \theta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})(1-\theta)^2(x+1)}{[3x+1-\theta(4x^2-x+1)]^2} - \frac{\sqrt{2}\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+2)-2\theta+1}}.$$

След пресмятане и опростяване получаваме:

$$(3.80) \quad \frac{\partial r(x, \theta)}{\partial x} =$$

$$\frac{5(5-2\sqrt{5})(1-\theta)^2[-3x-5+3\theta(4x^2+5x-1)]}{[3x+1-\theta(4x^2-x+1)]^3} + \frac{\sqrt{2}\cdot\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+2)-2\theta+1]^3}}.$$

От $x \in (0; \frac{1}{3})$ и $\theta \in (0; \frac{4}{5})$ следва

$$(3.81) \quad -3x-5+3\theta(4x^2+5x-1) < 0.$$

Сега от (3.81) и (3.80) следва, че $r(x, \theta)$ е намаляваща по отношение на x .
От последното и от (3.79) получаваме, че са възможни следните три случая:

$$(ii1) \quad \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} > 0 \text{ за } x \in (0; \frac{1}{3}),$$

$$(ii2) \quad \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} > 0 \text{ за } x \in (0; x_0) \text{ и } \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} < 0 \text{ за } x \in (x_0; \frac{1}{3}),$$

$$(ii3) \quad \frac{\partial h_2(x, \theta)}{\partial x} < 0 \text{ за } x \in (0; \frac{1}{3}).$$

От (ii1) – (ii3) следва, че за да докажем (3.77), е достатъчно да докажем:
 $h_2(0, \theta) \geq 1$ и $h_2(\frac{1}{3}, \theta) \geq 1$. Но последните две неравенства са еквивалентни съответно на вярното неравенство $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\theta^2 + (1-\theta)^2} \geq 1 \quad (\Leftrightarrow (2\theta-1)^2 \geq 0)$ и на доказаното по-горе (3.65). С това приключва доказателството на Теорема 1.5.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Заб. В доказателството на Теорема 1.5 в случаите, когато $\delta = \frac{(1-\theta)^2}{4}$, от наредбата на числата a, b, c, d, e следва, че $\theta \in (0; \frac{3}{5})$. Но последното не влияе на доказателството, защото считаме, че θ принадлежи на по-широк интервал, а именно $(0; \frac{4}{5})$.

4. Някои забележки и геометрични неравенства

Заб. От монотонността на M_p и от доказаните теореми в горния параграф например следват:

В случая, когато $n = 3$

Теорема 4.1 За $p \in (-\infty; 0)$ неравенството $A_n \geq (1-\lambda) \cdot M_p + \lambda \cdot S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 4.2 За $p \in (-\infty; 0)$ неравенството $A_n \leq \frac{(1-\lambda).M_p + \lambda.S_n}{p \in (-\infty; -1)}$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

В случая, когато $n = 4$

Теорема 4.3 За $p \in (-\infty; -1)$ неравенството $A_n \geq (1-\lambda).M_p + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2}$.

Теорема 4.4 За $p \in (-\infty; -1)$ неравенството $A_n \leq (1-\lambda).M_p + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прилагайки метода, използван при доказателствата на теоремите от горния параграф, могат да се доказват и хомогенни симетрични геометрични неравенства. Това става по следния начин. Нека означим с x, y, z, s, r, R, S съответно дължините на страните, полупериметъра, радиуса на вписаната окръжност, радиуса на описаната окръжност и лицето на произволен триъгълник. Полагаме $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$. Тъй като неравенствата са хомогенни относно x, y, z , то те са хомогенни и относно a, b, c . Затова можем да считаме, че $a + b + c = 1$. Тогава при приетите означения получаваме

$$(4.1) \quad s = \frac{x+y+z}{2} = \frac{2(a+b+c)}{2} = 1,$$

$$S = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \sqrt{(a+b+c)abc} = \sqrt{p}, \quad r = \frac{S}{s} = \sqrt{p},$$

$$R = \frac{xyz}{4S} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4\sqrt{p}} = \frac{(1-c)(1-a)(1-b)}{4\sqrt{p}} = \frac{1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc}{4\sqrt{p}} = \frac{t-p}{4\sqrt{p}}$$

Пример (вж. следствие 4.2 от Niculesco, 2000). За произволен триъгълник е изпълнено неравенството

$$(4.2) \quad (s^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 \leq 4R(R - 2r)^3$$

Доказателство: за краткост ще пропуснем пресмятанията. За равностраниен триъгълник се достига равенство. За неравностраниен триъгълник от (4.1) получаваме, че

$$(4.2) \Leftrightarrow$$

(4.3) $f(t) \geq 0$, където $f(t) = -4t^3 + t^2 + 18pt - 4p - 27p^2$. Разглеждаме функцията $f(t)$, определена в (4.3) при фиксирано p , $p \in (0; \frac{1}{27})$ за $t \in [m; M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От (4.3) следва $f'(t) = -12t^2 + 2t + 18p$. Явно уравнението $f'(t) = 0$ има корени $t_1 < 0 < t_2$.

Ще покажем, че

$$(4.4) \quad f'(m) > 0 .$$

Разглеждайки съответните два случая, получаваме, че последното неравенство е еквивалентно съответно на следните две верни неравенства:

$$(3x_1 - 1)^2 + 6x_1^2(2 - 3x_1) > 0 \quad (x_1 \in (0; \frac{1}{3})) \text{ и } (1 - x_4)(3x_4 - 1)^3 > 0 \quad (x_4 \in (\frac{1}{3}; 1)) .$$

От (4.4) следва, че е достатъчно да проверим верността на следните неравенства: $f(m) \geq 0$ и $f(M) \geq 0$. Разглеждайки съответните четири случая, получаваме, че последните неравенства са всъщност тъждествата $f(m) \equiv 0$ и $f(M) \equiv 0$! (Т.е. неравенството (4.2) за положителните числа R, r е НДУ да съществува триъгълник с радиус на описаната окръжност, равен на R , и радиус на вписаната окръжност, равен на r). От последното, (2.19) и (2.20) следва, че равенство се достига за произволен равнобедрен триъгълник (което е добре известно).

Заб. Други доказателства на (4.2) могат да се намерят например в (Niculesco, 2000) и (Blundon, 1965).

Заб. От (4.2) следват неравенството на *Ойлер* и неравенствата на *Blundon*. Предлагаме следните проблеми.

Да се намерят оптималните константи, при които са верни неравенствата

$$M_{p_2} \leq (1 - \lambda) \cdot M_{p_1} + \lambda \cdot M_{p_3} ,$$

$$M_{p_2} \geq (1 - \lambda) \cdot M_{p_1} + \lambda \cdot M_{p_3} \text{ за } p_1 < p_2 < p_3 .$$

$$1.3a \quad n = 3 \quad , \quad p_1 = -1, p_2 = 1, p_3 = 3, 4, 5 \dots$$

$$2.3a \quad n = 3 \quad , \quad p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 3, 4, 5 \dots$$

$$3.3a \quad n = 3 \quad , \quad p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3 .$$

$$\text{За } n = 3 \quad , \quad p_1, p_3, p_3 \text{ са произволни.}$$

Аналогични неравенства за $n = 4$.

Следвайки доказателството на Теорема 1.3.1, да се докаже, че

$$A_5 \geq (1 - \lambda) \cdot H_5 + \lambda \cdot S_5 \text{ е изпълнено } \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

Предположение:

$$\text{за } n \geq 3 \quad , \quad p > 1$$

$$A_n \leq (1 - \lambda_1) \cdot G_n + \lambda_1 \cdot M_p \text{ и } A_n \geq (1 - \lambda_2) \cdot G_n + \lambda_2 \cdot M_p \text{ са изпълнени } \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \geq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\frac{p-1}{p}} \text{ и } \lambda_2 \leq n^{\frac{1-p}{p}} \text{ съответно.}$$

5. Доказателство на Теорема 1

Първо ще докажем следната:

Лема 1. Нека $f(x), g(x)$ са непрекъснати и растящи (или намаляващи) функции в интервала $(\alpha; \beta)$ и са изпълнени следните:

$$(5.1) \quad |f(x) - g(x)| > 0 \text{ за } \forall x \in (\alpha; \beta)$$

$$(5.2) \quad \exists a, b, c, d \in (\alpha; \beta), \text{ за които } f(a) = g(b), \quad f(c) = g(d).$$

Тогава е изпълнено неравенството

$$(5.3) \quad (a - b)(c - d) > 0.$$

Доказателство: ще разгледаме случая, когато $f(x)$, $g(x)$ са растящи. Допускаме противното, т.е. $a > b$, $c < d$. Тогава от (5.2) получаваме $g(a) > d(b) = f(a)$, откъдето (5.3) $g(a) > f(a)$. Аналогично $f(c) = g(d) > d(c)$, откъдето (5.4) $f(c) > g(c)$.

Разглеждаме функцията $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (\alpha; \beta)$. От (5.3) и (5.4) следва, че $F(a) < 0$ и $F(c) > 0$. Тогава от теоремата на Вайерщрас следва, че $\exists x_0 \in (\alpha; \beta)$, за което $F(x_0) = 0$. Последното противоречи на (5.1), следователно (5.3) е доказано. Случаят, когато функциите са намаляващи, се разглежда аналогично.

Теорема 1. Нека p е фиксирано число от интервала $(0; \frac{1}{27})$. Тогава:

$$(i) \quad \text{Уравненията } 2x^3 - x^2 + p = 0 \text{ и } x^3 - 2x^2 + x - 4p = 0 \text{ имат}$$

точно по два корена в интервала $(0; 1)$ съответно x_1, x_2 и x_3, x_4 , при което са изпълнени неравенствата

$$(2.13) \quad 0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < x_4 < 1$$

и

$$(2.14) \quad x_2 < \frac{1}{2}.$$

(ii) Нека a, b, c са положителни числа, поне две от които са различни, $a + b + c = 1$, $abc = p$. Тогава множеството от стойности на $t = ab + bc + ca$ съвпада с интервала $[m; M]$, където

$$(2.15) \quad m = \min \{g(x_1), h(x_4)\},$$

$$(2.16) \quad M = \max \{g(x_2), h(x_3)\}$$

$$g(x) = 2x - 3x^2, \quad h(x) = \frac{1}{4}(1 + 2x - 3x^2), \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ са определени}$$

в (i).

$$(iii) \quad \text{Изпълнени са неравенствата}$$

$$(2.17) \quad m > \sqrt{3p}$$

и

$$(2.18) \quad M < \frac{1 + 9p}{4}.$$

Освен това, когато:

$$(2.19) \quad t = m = 2x_1 - 3x_1^2, \text{ то } p = x_1^2 - 2x_1^3, \quad t = M = 2x_2 - 3x_2^2, \text{ то } p = x_2^2 - 2x_2^3$$

$$(2.20) \quad t = m = \frac{1}{4}(1 + 2x_4 - 3x_4^2), \text{ то } p = \frac{1}{4}(x_4^3 - 2x_4^2 + x_4) \\ t = M = \frac{1}{4}(1 + 2x_3 - 3x_3^2), \text{ то } p = \frac{1}{4}(x_3^3 - 2x_3^2 + x_3),$$

x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (), m, M са определени в (ii).

(iv)

(2.21) Когато са изпълнени (2.19) или (2.20), точно две от числата a, b, c са равни помежду си.

Доказателство: разглеждаме функцията $f_1(x) = 2x^3 - x^2 + p$. От $f_1'(x) = 6x^2 - 2x$ получаваме

(5.5) $f_1(x)$ е растяща за $x \in (-\infty; 0), (\frac{1}{3}; 1)$ и е намаляваща за $x \in (0; \frac{1}{3})$.

От (5.5) и от неравенствата:

$$f_1(0) = p > 0, \quad f_1(\frac{1}{3}) = p - \frac{1}{27} < 0, \quad f_1(1) = p + 1 > 0, \quad f_1(\frac{1}{2}) = p > 0, \text{ следва, че}$$

$$(5.6) \quad \exists x_1, x_2: \quad f_1(x_1) = f_1(x_2) = 0, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < \frac{1}{2} < 1.$$

Аналогично доказваме, че

$$(5.7) \quad \exists x_3, x_4: \quad f_2(x_3) = f_2(x_4) = 0, \quad 0 < x_3 < \frac{1}{3} < x_4 < 1,$$

където $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4p$. Разглеждаме функциите

$$F(x) = \frac{x(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}f_2(x) + p \quad \text{и} \quad G(x) = x^2(1-2x) = -f_1(x) + p \quad \text{за}$$

$x \in (0; \frac{1}{3})$. Лесно се проверява, че те са растящи в разглеждания интервал.

Ако $a, b \in (0; \frac{1}{3})$: $F(a) = G(b) = \frac{1}{32}$, то лесно се проверява, че $a < \frac{1}{4} < b$.

Уравнението $F(x) = G(x)$ няма решение в посочения интервал, защото е еквивалентно на $x(1-3x)^2 = 0$. От последните разглеждания и от (5.6), (5.7) следва, че можем да приложим Лема 1 за функциите $F(x), G(x)$, числата

a, b, x_1, x_3 и интервала $(0; \frac{1}{3})$.

Оттук получаваме, че

$$(5.8) \quad 0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3}.$$

Разглеждаме $F(x)$ и $G(x)$, дефинирани по-горе за $x \in (\frac{1}{3}; 1)$.

Лесно се проверява, че тези функции са намаляващи в разглеждания интервал. От $\lim_{x \rightarrow 1-0} F(x) = p = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} G(x)$ и от равномерната непрекъснатост на

непрекъснатите функции $F(x)$ и $G(x)$ в интервала $[\frac{1}{3}; 1]$ следва, че

$$\exists c, d: c < d, \quad c = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad d = 1 - \delta, \quad G(c) = F(d),$$

където ε и δ са достатъчно малки. Прилагаме Лема 1 за функциите $F(x)$, $G(x)$, числата c, d, x_2, x_4 и интервала $(\frac{1}{3}; 1)$, откъдето получаваме:

$$(5.9) \quad x_4 > x_2.$$

От (5.8) и (5.9) следва верността на (2.13) и (2.14).

От $a + b + c = 1$, $abc = p$ последователно получаваме

$$a(1-a)^2 = a(b+c)^2 \geq a \cdot 4bc = 4p \Rightarrow a - 2a^2 + a^3 - 4p \geq 0 \text{ т.е.}$$

$f_2(a) \geq 0$ и от по-горе следва, че

$$(5.10) \quad a \in [x_3; x_4].$$

От $a + b + c = 1$, $abc = p$ също следва

$$t = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(1-a) + \frac{p}{a} = \frac{a^2 - a^3 + p}{a} = H(a),$$

$$H(x) = \frac{x^2 - x^3 + p}{x}.$$

Тогава съгласно (5.10) разглеждаме $H(x)$ за $x \in [x_3; x_4]$.

$$H'(x) = \frac{x^2 - 2x^3 - p}{x^2} = -\frac{f_1(x)}{x^2}. \text{ От (5.5) и (5.6) следва, че}$$

$$(5.11) \quad H'(x) > 0 \text{ за } x \in (x_1; x_2) \text{ и } H'(x) < 0 \text{ за } x \in (x_3; x_1) \cup (x_2; x_4).$$

От (5.11) следва, че $t \in [m; M]$, където $m = \min\{H(x_1), H(x_4)\}$, но

$$H(x_1) = \frac{x_1^2 - x_1^3 + p}{x_1} = \frac{x_1^2 - x_1^3 + x_1^2 - 2x_1^3}{x_1} = 2x_1 - 3x_1^2 = g(x_1) \text{ (използвахме } f_1(x_1) = 0),$$

където $g(x)$ е определена в (ii),

$$H(x_4) = \frac{x_4^2 - x_4^3 + p}{x_4} = \frac{x_4^2 - x_4^3 + \frac{x_4^3 - 2x_4^2 + x_4}{4}}{x_4} = \frac{1}{4}(1 + 2x_4 - 3x_4^2) = h(x_4)$$

(използвахме $f_2(x_4) = 0$), където $h(x)$ е определена в (ii). Аналогично по-

лучаваме, че $M = \max\{H(x_2), H(x_3)\}$, $H(x_2) = g(x_2)$ и $H(x_3) = h(x_3)$. С това приключва доказателството на (2.15) и (2.16). (2.19) и (2.20) следват от дефинирането на x_1, x_2, x_3, x_4, m и M . Ще докажем (2.21) сам в един от възможните четири случая. Нека $t = ab + bc + ca = m = 2x_1 - 3x_1^2$ и $p = abc = x_1^2 - 2x_1^3$ (съгласно (2.19)). Тогава a, b, c са корените на уравнението (припомняме, че $a + b + c = 1$) $Z^3 - Z^2 + (2x_1 - 3x_1^2)Z + 2x_1^3 - x_1^2 = 0$.

Лесно се проверява, че корените на това уравнение са $Z_1 = Z_2 = x_1$, $Z_3 = 1 - 2x_1$. Последното доказва верността на (2.21).

Останалите три случая се разглеждат аналогично. Остава да докажем (2.17) и (2.18). За да докажем (2.17), съгласно (2.19) е достатъчно да проверим верността на неравенствата $g(x_1) > \sqrt{3p}$ и $h(x_4) > \sqrt{3p}$. Лесно се проверява, че те са еквивалентни на следните две верни неравенства: $x_1^2(3x_1 - 1) > 0$ и $(x_4 - 1)^2(3x_4 - 1)^2 > 0$ ($x_1 \in (0; \frac{1}{3})$, $x_4 \in (\frac{1}{3}; 1)$ съгласно (2.13)). Аналогично (2.18) следва от проверката на неравенствата $g(x_2) < \frac{1+9p}{4}$ и $h(x_3) < \frac{1+9p}{4}$. Лесно се проверява, че те са еквивалентни на следните две верни неравенства:

$(3x_2 - 1)^2(1 - 2x_2) > 0$ и $x_3(3x_3 - 1)^2 > 0$ ($x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $x_3 \in (0; \frac{1}{3})$ съгласно (2.13) и (2.14)).

С това приключва доказателството на теоремата.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Hardy, G., J. E. Littlewood & G. Polya (1952). *Inequalities*. Cambridge: Mathematical Library (2-nd ed.).
- Niculesco, C. P. (2000). A new look at Newton's inequalities, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 1 (2), Article 17.
- Sato, N. (2001). Symmetric polynomial inequalities, *Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem*, 27, 529 – 533.
- Mitev, T. (2003). New inequalities between elementary symmetric polynomials, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 4 (2), Article 48.
- Stolarsky K. B. (1971). *Cubic triangle inequalities*, Amer. Math. Monthly, 78, 879 – 881.
- Aliyev, Y. N. (2007). The best constant for an algebraic inequality, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 8 (3), Article 79.

- Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem (2004). 30 (8).
 Blundon, W. J. (1965). Inequalities associated with the triangle, *Canad. Math. Bull.* 8, 615 – 626.
 Barbara, R. (2008). A Useful Inequality, *Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem*, 34 (1), 38 – 43.

SOME NEW INEQUALITIES AMONG THE ARITHMETIC, GEOMETRIC, HARMONIC AND QUADRATIC MEANS

Abstract. Let A_n, H_n, S_n be the arithmetic, harmonic and quadratic means respectively for the positive real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$. In this article we prove the following theorems:

Theorem 1. For $n = 3$ we have

$$A_n \geq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ and}$$

$$A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Theorem 2. For $n = 4$ we have

$$A_n \geq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ and}$$

$$A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Theorem 3. For $n = 5$ we have $A_n \leq (1 - \lambda) \cdot H_n + \lambda \cdot S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Some open problems are proposed too.

✉ **Dr. Todor Mitev**
 Mathematics Department
 Faculty of Natural Sciences
 University of Ruse
 8, Studentska St.
 Ruse, Bulgaria
 E-mail: tpmitev@abv.bg