

НЕКОТОРЫЕ ТРАЕКТОРИИ, КОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНЫ РАВНОБЕДРЕННЫМИ ТРЕУГОЛЬНИКАМИ

¹⁾Ксения Горская, ¹⁾Дарья Коптева, ¹⁾Даниил Микуров,
²⁾Еркен Мудебаев, ²⁾Казбек Мухамбетов, ²⁾Адилбек Темирханов,
³⁾Лили Стефанова, ³⁾Ирина Христова, ³⁾Радина Иванова

¹⁾Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
"Средняя школа № 8" – Архангельск, Россия

²⁾Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей
с углубленным изучением различных предметов – Актау, Казахстан

³⁾Природо-математическая гимназия – Ловеч, Болгария

Аннотация. В статье представлены основные результаты работы международной группы учащихся в рамках исследовательского проекта „Геометрический Scrabble в облаках“. Исследование состояло в постановке и решении задач, представляющих собой обобщения и естественные аналоги стартовой задачи. В ходе исследования использовался аппарат аналитической геометрии, а также программные продукты, такие как GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Maple. В результате получены задачи, приводящие к появлению геометрических мест точек, которыми являются: прямая Эйлера, кривые второго порядка, а также кривые более высоких порядков.

Keywords: locus, Euler line, Euler curve, curve of second degree

В конце сентября 2015 году мы начали участие в международном сетевой исследовательской проекте „Геометрический Scrabble в облаках“, которой продолжался до начала мая 2016 года. В этот период мы работали над развитием идеи задачи, предложенной профессором Шабановой в качестве стартовой: *Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне построены правильные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости. Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T – точка пересечения биссектрисы угла MCN с отрезком MN .*

После получения различных решений стартовой задачи с помощью GeoGebra и Geometer's Sketchpad мы получили ее обобщение и поставили

новые задачи, которые являются вариантом стартовой задачи. Некоторые из полученных результатов мы приведем ниже.

1. Обобщение стартовой задачи и кривые второго порядка. При решении стартовой задачи мы получили, что искомая траектория является часть параболы. Следующий этап состоялся в нахождении обобщения стартовой задачи. Наши исследования опирались на следующие наблюдения:

когда CT является биссектрисой угла $\angle MCN$, то T такая точка на отрезке MN что выполнено соотношение $\frac{MT}{NT} = \frac{CM}{CN}$. Тогда, мы можем взять точку T на прямой MN так что $\frac{MT}{NT} = k \cdot \frac{CM}{CN}$, где $k \neq 0$ произвольное

действительное число. Далее мы можем заменить правильные треугольники равнобедренными треугольниками ACM и CBN , для которых выполняются равенства $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$ и $\angle BCN = \angle CBN = \beta$. Так получается следующее обобщение стартовой задачи:

Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне, построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости и с углами при основаниях AC и BC , соответственно, α и β . Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T , которая находится на прямой MN и выполнено соотношение $\frac{MT}{NT} = k \cdot \frac{CM}{CN}$, где $k \neq 0$ произвольное действительное число.

Компьютерные эксперименты показали, что траектория в одном случае казалась параболой (Рис. 1), а в другом – гиперболой (Рис. 2). Из всех полученных результатов мы пришли к следующему выводу: Точка T описывает часть кривой второго порядка.

Мы получили только гипотезу. Необходимо было ее доказать. Представим доказательство.

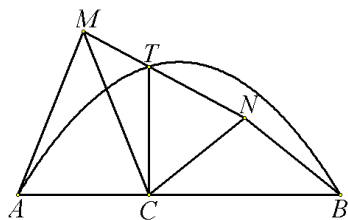


Рис. 1

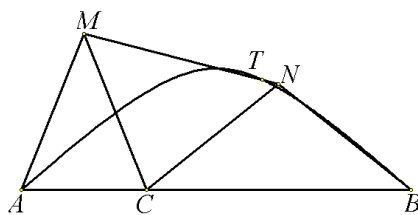


Рис. 2

Рассмотрим систему координат Ax , при которой $A(0,0)$, $B(0,c)$,

$C(c_0,0)$ (рис. 3). Тогда

$$(1) \quad M\left(\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2} \operatorname{tg} \alpha\right), N\left(\frac{c+c_0}{2}, \frac{c-c_0}{2} \operatorname{tg} \beta\right),$$

$$(2) \quad CM = \frac{c_0}{2 \cos \alpha}, CN = \frac{c-c_0}{2 \cos \beta}.$$

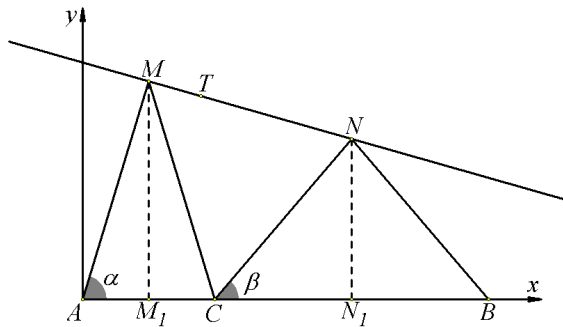


Рис. 3

Если T такая точка прямой MN , для которой $\frac{\overline{MT}}{\overline{NT}} = \lambda$, то выполнено векторное равенство $\overline{AT} = \frac{\overline{AM} - \lambda \overline{AN}}{1 - \lambda}$. Отсюда получается, что координаты точки $T(x, y)$ выражаются по следующим формулам:

$$(3) \quad x = \frac{x_M - \lambda x_N}{1 - \lambda}, y = \frac{y_M - \lambda y_N}{1 - \lambda}.$$

Если k действительное число и $\lambda = k \cdot \frac{CM}{CN}$, тогда из (2) получается $\lambda = \frac{kc_0 \cos \beta}{(c - c_0) \cos \alpha}$. Этот результат вместе с (3) дает координаты точки T в следующем виде

$$(4) \quad x = c_0 \cdot \frac{c(\cos \alpha - k \cos \beta) - c_0(\cos \alpha + k \cos \beta)}{2[c \cos \alpha - c_0(\cos \alpha + k \cos \beta)]},$$

$$y = \frac{c_0(c - c_0)(\sin \alpha - k \sin \beta)}{2[c \cos \alpha - c_0(\cos \alpha + k \cos \beta)]}.$$

Используя почленное деление координат (4) получаем:

$$\frac{x}{y} = \frac{c(\cos \alpha - k \cos \beta) - c_0(\cos \alpha + k \cos \beta)}{(c - c_0)(\sin \alpha - k \sin \beta)}.$$

Отсюда получается

$$(5) \quad \begin{aligned} c_0 &= c \cdot \frac{(\sin \alpha - k \sin \beta)x - (\cos \alpha - k \cos \beta)y}{(\sin \alpha - k \sin \beta)x - (\cos \alpha + k \cos \beta)y}, \\ c - c_0 &= \frac{-2ck \cos \beta y}{(\sin \alpha - k \sin \beta)x - (\cos \alpha + k \cos \beta)y}. \end{aligned}$$

Из (5) и второго равенства (4) следует, что геометрическое место, которое описано условием задачи, это кривая K_1 .

$$(6) \ K_1: \begin{aligned} &(\sin \alpha - k \sin \beta)^2 x^2 - (\cos \alpha + k \cos \beta)^2 y^2 - \\ &- c(\sin \alpha - k \sin \beta)^2 x + c(\sin \alpha - k \sin \beta)(\cos \alpha - k \cos \beta) y = 0. \end{aligned}$$

Так наша гипотеза подтвердилась, т.е. мы получили, что желанное геометрическое место – кривая второго порядка. Что бы определить вид кривой K_1 в зависимости от константы k и углов α и β необходимо пользоваться инвариантами K_1 . После совершения необходимых вычислений получаем следующие выводы:

- 1) если $k \neq \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ и $k \neq -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$, то K_1 гипербола (рис. 2);
- 2) если $k = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, то K_1 двойная прямая (рис. 4);
- 3) если $k = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$, то K_1 парабола (рис. 1).

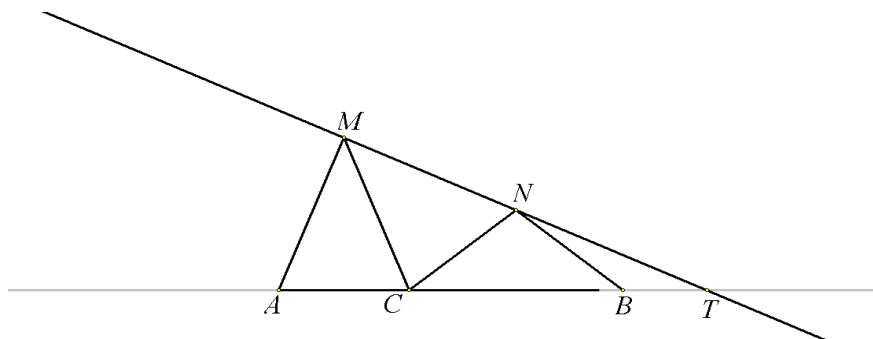


Рис. 4

К случаю 3) относятся и подобные треугольники, т.е. когда $\beta = \alpha$. В этом случае $k = -1$ и CT снова является биссектрисой угла MCN . Уравнение параболы (6) запишется в следующем виде

$$(9) \quad y = -\frac{1}{c} \cdot tg\alpha \cdot x^2 + tg\alpha \cdot x.$$

Из уравнения (9) мы получаем, что в точках $A(0,0)$, $B(c,0)$ и $T\left(c_0, \frac{c_0(c-c_0)tg\alpha}{c}\right)$ соответственные касательные t_A , t_B и параболы имеют следующие уравнения: $t_A: y = tg\alpha \cdot x$, $t_B: y = -tg\alpha \cdot x + c \cdot tg\alpha$, $t_T: (c - 2c_0)tg\alpha \cdot x - c \cdot y + c_0^2 tg\alpha = 0$ соответственно. Эти уравнения совпадают с уравнениями прямых AM , BN и MN . Так мы доказали, что прямые AM , BN и MN – касательные параболы, когда равнобедренные треугольники ACM и BCN подобные.

2. Прямая, как геометрическое место точек, делящие отрезки в постоянном отношении. В стартовой задаче естественно заменит биссектрису CT медианой. Так получается следующая задача: *Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне, построены правильные треугольники AMC и BNC , лежащие в одной полуплоскости. Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет T – точка пересечения медианы CT треугольника MNC с отрезком MN .*

Эту задачу обобщаем следующим образом: *Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне, построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости и имеющие углы при основании AC и BC соответственно α и β . Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB*

опишет точка T , которая находится на прямой MN и выполнено соотношение $\frac{MT}{NT} = k$, где $k \neq 0,1$ произвольное действительное число.

Компьютерные эксперименты показали, что искомое геометрическое место – отрезок (рис. 5, 6).

Для доказательства рассмотрим систему координат Axy , как при решении предыдущей задачи (рис. 3). Если $T(x, y)$ такая точка прямой MN , для которой $\frac{MT}{NT}$, то из (2) и (3) получаются равенства:

$$(10) \quad x = \frac{(1-k)c_0 - kc}{2(1-k)}, \quad y = \frac{(tg\alpha + k \cdot tg\beta)c_0 - kc \cdot tg\beta}{2(1-k)}.$$

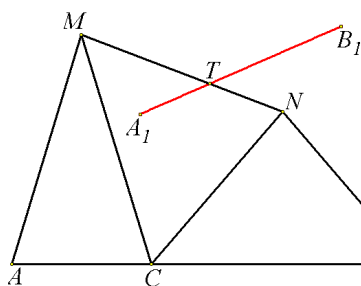


Рис. 5

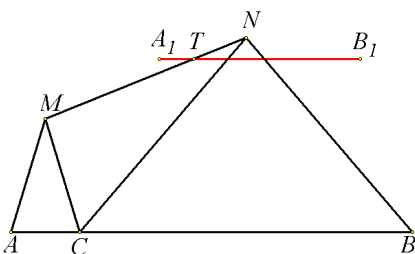


Рис. 6

Из первого равенства (10) следует $c_0 = \frac{2(1-k)x + kc}{1-k}$. Подставим c_0 во второе равенство (10) и после переработки получим уравнение прямой K_2 следующего вида:

$$(11) \quad K_2 : 2(1-k)(tg\alpha + k.tg\beta)x - 2(1-k)^2 y + kc[tg\alpha + (2k-1)tg\beta] = 0.$$

Следовательно, геометрическое место точек T отрезка прямой K_2 , концы которого точки $A_1\left(\frac{kc}{2(k-1)}, \frac{kc.tg\beta}{2(k-1)}\right)$ и $B_1\left(\frac{(2k-1)c}{2(k-1)}, \frac{c.tg\alpha}{2(1-k)}\right)$. Точки A_1 и B_1 получаются из (10) при $c_0 = 0$ и $c_0 = c$ соответственно. Они соответствуют следующими совпадениями $C \equiv A$ и $C \equiv B$.

Прямая K_2 может быть параллельной прямой AB только тогда, когда $k = -\frac{tg\alpha}{tg\beta}$ (рис. 6). В этом случае уравнение (11) преобразуется в следующее

$$(12) \quad y = \frac{2k^2 c.tg\alpha}{2(1-k)^2} x.$$

Когда равнобедренные треугольники ACM и BCN подобны, т.е. $k = -1$, точка T середина отрезка MN . Из (12) получается уравнение

$$(13) \quad y = \frac{c}{4} .tg\alpha .x,$$

содержащее частный случай правильных треугольников.

3. Касательные и кривые второго порядка. Новая идея преобразовала стартовую задачу в новую задачу. Ее содержание следующая: *Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне построены правильные треугольники ACM и BCN , лежащие в одной полуплоскости. Найдите, какую траекторию при перемещении*

точки C по отрезку AB опишет точка T – точка пересечения касательной к описанным окружностям около треугольников ACM и BCN с прямой MN .

Эту задачу обобщаем следующим образом: Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости и с углами при основании AC и BC соответственно α и β . Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T , в которой касательная к описанным окружностям около треугольников ACM и BCN пересекается с прямой MN .

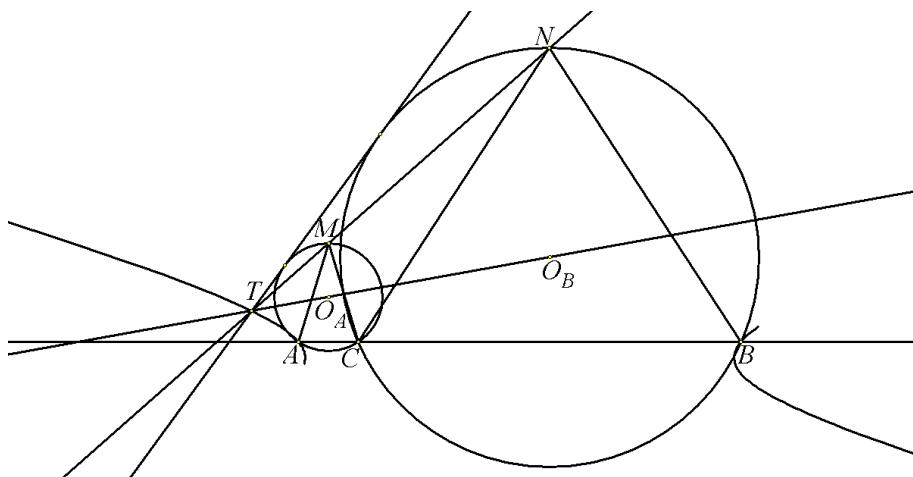


Рис. 7

Общая касательная к окружностям проходит через их центр гомотетий. Центр гомотетий находится на линии центров окружностей. Точки M и N гомотетичные, поэтому прямая MN проходит через центр гомотетий окружностей. Следовательно, достаточно найти траекторию, которую опишет точка T пересечения прямой MN с линией центров окружностей.

Компьютерные эксперименты показали, что искомая траектория – кривая второго порядка (рис. 7).

Для доказательства опять рассмотрим систему координат Ax_1y_1 как в предыдущих решениях (рис. 3). Пусть A_0 и B_0 середины соответственно отрезков AM и BN . Тогда, при помощи (1) и (3) (в этом случае $\lambda = -1$), их координат выражаются следующим образом

$$(14) \quad A_0 \left(\frac{c_0}{4}, \frac{c_0}{4} \operatorname{tg} \alpha \right), B_0 \left(\frac{3c + c_0}{4}, \frac{c - c_0}{4} \operatorname{tg} \beta \right) .$$

Из (14) находим уравнения симметрии s_{AM} и s_{BN} отрезков AM и BN в следующем виде:

$$(15) \quad s_{AM} : 4x + 4\operatorname{tg} \alpha y - c_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 ,$$

$$(16) \quad s_{BN} : 4x - 4\operatorname{tg} \beta y + (c - c_0) \operatorname{tg}^2 \beta - 3c - c_0 = 0 .$$

С другой стороны уравнения симметрии s_{AC} и s_{BC} отрезков AC и BC следующие:

$$(17) \quad s_{AC} : x = \frac{c_0}{2} ,$$

$$(18) \quad s_{BC} : x = \frac{c + c_0}{2} .$$

Из (15) и (16) находим координаты центра O_A описанной около $\triangle ACM$ окружности, а из (17) и (18) находим координаты центра O_B описанной около $\triangle BCN$ окружности. Результаты следующие

$$(19) \quad O_A \left(\frac{c_0}{2}, \frac{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}{4 \operatorname{tg} \alpha} \right), O_B \left(\frac{c + c_0}{2}, \frac{(c - c_0) (\operatorname{tg}^2 \beta - 1)}{4 \operatorname{tg} \beta} \right) .$$

Координаты точек M и N описаны в (1). Найдём по ним уравнение прямой MN . Оно имеет вид:

$$(20) \quad MN : 2[c_0 \operatorname{tg} \alpha - (c - c_0) \operatorname{tg} \beta]x + 2cy - c_0[(c + c_0) \operatorname{tg} \alpha - (c - c_0) \operatorname{tg} \beta] = 0 .$$

Уравнение (20) можно записать и так:

$$(21) \quad (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) c_0^2 + [c(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - 2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)x] c_0 - 2c(y - \operatorname{tg} \beta \cdot x) = 0 .$$

Из координат (19) находим уравнение централы $O_A O_B$ в виде

$$(22) \quad O_A O_B : 2[(c - c_0) \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \beta - 1) - c_0 \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)]x - 4c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cdot y - c_0[(c - c_0) \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \beta - 1) - (c + c_0) \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)] = 0 .$$

Уравнение (22) можно записать в следующем виде:

$$(23) \quad (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1) c_0^2 + [c(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1) - 2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1)x] c_0 + 2c \operatorname{tg} \alpha [(\operatorname{tg}^2 \beta - 1)x - 2 \operatorname{tg} \beta \cdot y] = 0 .$$

Сейчас мы умножим равенство (21) на $-(tg\alpha tg\beta - 1)$ и суммируем с (23). Для c_0 получается равенство

$$(24) \quad c_0 = \frac{(tg\alpha - tg\beta)x + (tg\alpha tg\beta + 1)y}{tg\alpha - tg\beta}.$$

Потом подставим (24) в (21) и получаем уравнение кривой K_3 второго порядка

$$(25) \quad K_3: (tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha - tg\beta)^2 x^2 - (tg\alpha - tg\beta)(tg\alpha tg\beta + 1)^2 y^2 - \\ - c(tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha - tg\beta)^2 x - c(tg\alpha - tg\beta)^2 (tg\alpha tg\beta - 1)y = 0.$$

Эта кривая желанная траектория точки T . На основании инвариантов K_3 получаются следующие результаты:

- 1) если $\alpha \neq \beta$, то K_3 – гипербола (рис. 7);
- 2) если $\beta = \alpha$, то K_3 – двойная прямая (рис. 8).

Последний результат получается самым элегантным образом, пользуясь только соображения гомотетии.

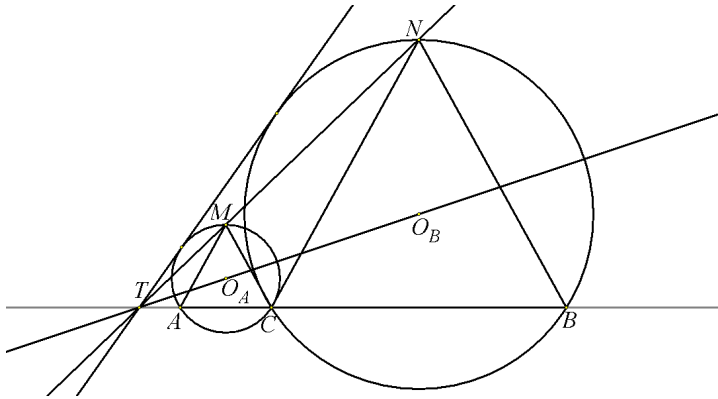


Рис. 8

5. Общая хорда окружности и кривые четвертого порядка. Еще один вариант, который содержит описанные окружности, получается в следующей задаче: Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне построены правильные треугольники ACM и BCN , лежащие в одной полуплоскости. CP – хорда, которой пересекаются описанные около треугольников ACM и BCN окружности. Найдите, какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T – точка пересечения прямой CP с отрезком MN .

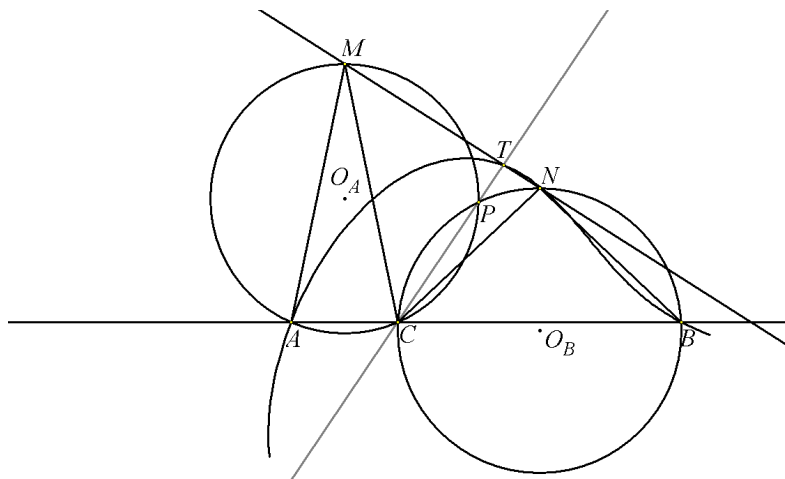


Рис. 9

Последнюю задачу обобщаем следующим образом: Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости и с углами при основании AC и BC соответственно α и β . Если P вторая точка пересечений окружностей, описанных около треугольников ACM и BCN , найдите какую траекторию при перемещении точки C по отрезку AB опишет точка T , которая получается при пересечении прямых CP и MN .

Компьютерные эксперименты показали, что искомая траектория – кривая, которая показана на рис. 9. Мы не смогли сделать осмысленное предположение о виде этой траектории. Поэтому начали искать теоретическое решение задачи и определить вид кривой.

Рассмотрим система координат Axy (рис. 3). Из (19) уравнения окружностей k_A и k_B , описанных соответственно около треугольников ACM и BCN , имеют вид

$$(26) \quad k_A : 2tg\alpha \cdot x^2 + 2tg\alpha \cdot y^2 - 2c_0tg\alpha \cdot x - c_0(tg^2\alpha - 1)y = 0,$$

$$(27) \quad k_B : 2tg\beta \cdot x^2 + 2tg\beta \cdot y^2 - 2tg\beta(c + c_0)x - (c - c_0)(tg^2\beta - 1)y + 2cc_0tg\beta = 0.$$

Из (26) и (27) получим координаты второй точки $P(x_P, y_P)$ пересечений k_A и k_B вида:

$$(28) \quad x_P = \frac{cc_0tg\beta \{ c \cdot tg\alpha [(tg\alpha + tg\beta)^2 - (tg\alpha tg\beta - 1)^2] + c_0(tg^2\alpha - 1)(tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha tg\beta - 1) \}}{[c \cdot tg\alpha(tg^2\beta - 1) - c_0(tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha tg\beta - 1)]^2 + 4c^2tg^2\alpha tg^2\beta},$$

$$(29) \quad \frac{2cc_0(c-c_0)tgatg\beta(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)}{\left[c.tg\alpha(tg^2\beta-1)-c_0(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)\right]^2+4c^2tg^2\alpha tg^2\beta}.$$

Из (28) и (29) получается уравнение прямой CP в виде:

$$(30) \quad CP: 2c(c-c_0)tgatg\beta.x+\left\{c^2tg\alpha(tg^2\beta-1)+c_0^2(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)-\right. \\ \left.-cc_0\left[(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)+tg\alpha(tg^2\beta-1)\right]\right\}y-2cc_0(c-c_0)tgatg\beta=0.$$

Уравнение (30) можно записать и так:

$$(31) \quad CP: \left[(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)y+2c.tgatg\beta\right]c_0^2- \\ -\left\{2c.tgatg\beta.x+c\left[(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)+tg\alpha(tg^2\beta-1)\right]y+2c^2tgatg\beta\right\}.c_0+ \\ +2c^2tgatg\beta.x+c^2tg\alpha(tg^2\beta-1)y=0.$$

Из равенства (21) и (31) получаем c_0^2 и получаем равенство

$$(32) \quad \left[2(tg\alpha+tg\beta)^2(tgatg\beta-1)xy+2c.tgatg\beta(tg\alpha+tg\beta)x- \right. \\ \left.-c.tg\alpha(tg\alpha+tg\beta)(tg^2\beta+2tgatg\beta-3)y-4c^2tg^2\alpha tg\beta\right]c_0= \\ =c.\left[-2(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)y^2+2tg\beta(tg\alpha+tg\beta)(tgatg\beta-1)- \right. \\ \left.-2c.tgatg\beta(tg\alpha-tg\beta)x-c.tg\alpha(tg^3\beta+tgatg^2\beta+4tg^2\beta-tg\alpha-tg\beta)y\right].$$

Потом подставим c_0 в (32) в (21) и получаем кривую K_4 четвертого порядка

$$(33) \quad K_4: A_{04}.y^4+A_{31}.x^3y+A_{13}.xy^3+A_{22}.x^2y^2+A_{30}.x^3+A_{03}.y^3+ \\ +A_{21}.x^2y+A_{12}.xy^2+A_{20}.x^2+A_{02}.y^2+A_{11}.xy+A_{10}.x+A_{01}.y=0,$$

где $A_{04}=2(tg\alpha+tg\beta)^3(tgatg\beta-1)^2$, $A_{31}=4tg^2\alpha tg\beta(tg\alpha+tg\beta)^3(tgatg\beta-1)$,

$$A_{13}=2(tg\alpha+tg\beta)^3(tgatg\beta-1)(tg^2\alpha tg\beta-2tg\alpha+tg\beta),$$

$$A_{22}=2tg\alpha(tg\alpha+tg\beta)^3(tgatg\beta-1)(4tg^2\beta-tg\alpha-tg\beta), \quad A_{30}=4c.tg^3\alpha tg^2\beta(tg\alpha+tg\beta)^2,$$

$$A_{03}=-c.tg\alpha(tg\alpha+tg\beta)^2(2tg^3\alpha tg^2\beta+3tg^2\alpha tg^3\beta-8tgatg^3\beta+ \\ +tg^3\beta-5tg^2\alpha tg\beta-6tgatg^2\beta+8tg^2\beta+4tg\alpha+tg\beta),$$

$$A_{21}=-2c.tg^2\alpha tg\beta(tg\alpha+tg\beta)^2(3tg^2\alpha tg\beta+5tgatg^2\beta-4tg^2\beta-3tg\alpha-3tg\beta),$$

$$A_{12} = -c \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 (\operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + 12 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + 8 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^4 \beta - 20 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} \beta + \\ + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^3 \beta - 4 \operatorname{tg}^3 \beta - 16 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

$$A_{20} = -8c^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2,$$

$$A_{02} = c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (\operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^4 \beta + 2 \operatorname{tg}^5 \beta + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^4 \beta + 9 \operatorname{tg}^4 \beta - \\ - 15 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} \beta - 13 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + 2 \operatorname{tg}^3 \beta - 10 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

$$A_{11} = 2c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \times \\ \times (\operatorname{tg}^3 \alpha + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta + 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg}^2 \beta - 6 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 3 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} \beta),$$

$$A_{10} = 4c^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2$$

$$A_{01} = 2c^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} \beta (-\operatorname{tg}^4 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 4 \operatorname{tg}^3 \beta + 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 8 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

Следовательно, желанная траектория является кривая четвертого порядка.

6. Прямая Эйлера и параболическая оболочка. Мы исследовали случаи, когда отрезок CT был медианной и высотой треугольника MNC . Эти отрезки связаны с особыми точками ΔMNC медианцентра и ортоцентра. Эти точки находятся на прямой, называемой прямой Эйлера ΔMNC . В результате мы поставили следующую задачу: Отрезок AB разделен произвольной точкой C на две части. На каждой из этих частей, как на стороне, построены равнобедренные треугольники AMC и CNB , лежащие в одной полуплоскости, с углами при основании AC и BC соответственно α и β . Найдите, какие траектории при перемещении точки C по отрезку AB опишут ортоцентр H , медианцентр G и центр O описанной окружности треугольника MNC . Существует ли некоторая связь между траекториями?

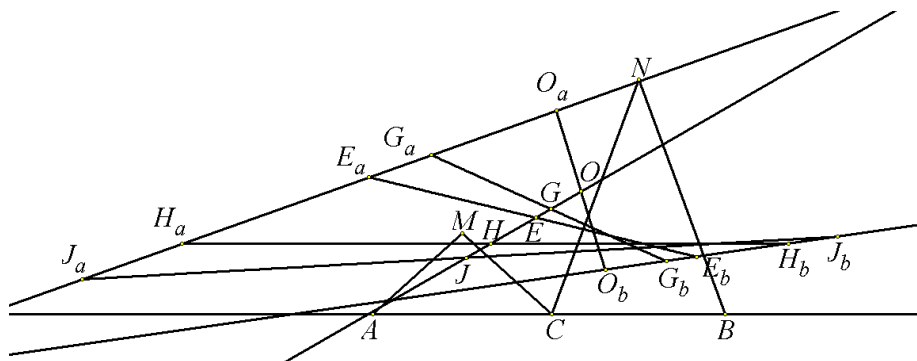


Рис. 10

Результаты, которые мы получили экспериментальным путем, были следующими:

- 1) эти точки описывают отрезки;
- 2) точка H описывает отрезок, параллельный прямой AB ;
- 3) концы отрезка находятся на двух прямых l_a и l_b (рис. 10).

Точки H , G и O находятся на прямой Эйлера. Центр E окружности Эйлера тоже находится на прямой Эйлера. Эксперименты показали, что траектория E тоже отрезок, концы которого оказались на найденных двух прямых l_a и l_b . Тогда мы решили экспериментировать с произвольной точкой прямой Эйлера, которая обладает общим свойством с этой прямой. Как сделать это? Точка J , которая находится на прямой Эйлера и делит отрезок OH в одном и тоже отношении λ , имеет такое свойство. Когда число λ изменяется на множестве действительных чисел, точка J будет описывать прямую Эйлера. Мы построили точку J при произвольном отношении λ и установили, что в каждом случае траектория точки J – это отрезок, концы которого лежат на l_a и l_b . Потом мы увидели, что все отрезки, которые получаются, занимают некоторое положение на прямой Эйлера для $\triangle MNC$. Отсюда возникло предположение, что прямая Эйлера сама описывает некоторое множество, которое содержит все отрезки, описываемые точкой J при разных значениях λ . Наблюдение привело нас к гипотезе:

Прямые Эйлера описывают множество всех огибающих одной специальной параболы.

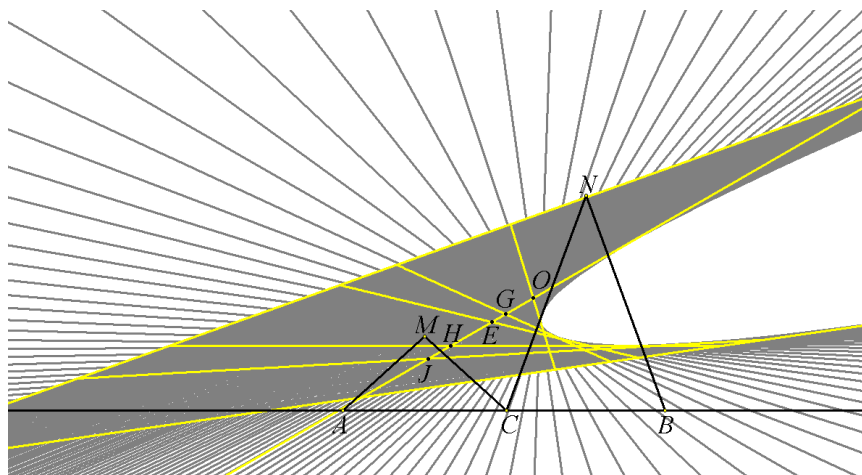


Рис. 11

После совершения необходимых вычислений относительно системы координат Ax мы получили следующие результаты:

1) Ортоцентр H описывает отрезок прямой
 $h: 2(tg\alpha + tg\beta)y - c(tg\alpha tg\beta - 1) = 0$, концы которого

$$H_a \left(-\frac{c \cdot tg\beta(tg\alpha tg\beta - 1)}{2(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg\alpha tg\beta - 1)}{2(tg\alpha + tg\beta)} \right),$$

$$H_b \left(\frac{c(tg^2\alpha tg\beta + tg\alpha + 2tg\beta)}{2(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg\alpha tg\beta - 1)}{2(tg\alpha + tg\beta)} \right).$$

Этот отрезок параллелен AB .

2) Медиантер G описывает отрезок прямой
 $g: 6(tg\alpha - tg\beta)x - 24y - c(tg\alpha - 5tg\beta) = 0$, концы которого

$$G_a \left(\frac{c}{6}, \frac{c \cdot tg\beta}{6} \right), G_b \left(\frac{5c}{6}, \frac{c \cdot tg\alpha}{6} \right).$$

3) Центр описанной окружности описывает отрезок прямой
 $o: 4(tg^2\alpha - tg^2\beta)x + 4(tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha tg\beta - 3)y - c(tg^2\beta + 1)(tg^2\alpha - 3) = 0$,
 концы которого

$$O_a \left(\frac{c \cdot tg\alpha(tg^2\beta + 1)}{4(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\beta + 1)}{4(tg\alpha + tg\beta)} \right), O_b \left(\frac{c(-tg^2\alpha tg\beta + 4tg\alpha + 3tg\beta)}{4(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\alpha + 1)}{4(tg\alpha + tg\beta)} \right).$$

4) Центр окружности Эйлера описывает отрезок прямой

$$e: 8(tg^2\alpha - tg^2\beta)x - 8(tg\alpha + tg\beta)(tg\alpha tg\beta + 5)y +$$

$$+ c[(tg\alpha + 5tg\beta)(tg^2\beta + 2tg\alpha tg\beta - 1) + (tg\alpha - tg\beta)(tg\alpha tg^2\beta - tg\alpha - 2tg\beta)] = 0,$$

концы которого

$$E_a \left(\frac{c(-tg\alpha tg^2\beta + tg\alpha + 2tg\beta)}{8(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\beta + 2tg\alpha tg\beta - 1)}{8(tg\alpha + tg\beta)} \right),$$

$$E_b \left(\frac{c(tg^2\alpha tg\beta + 6tg\alpha + 7tg\beta)}{8(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\alpha + 2tg\alpha tg\beta - 1)}{8(tg\alpha + tg\beta)} \right).$$

5) Точка J , для которой выполнено $\frac{\overline{OJ}}{\overline{HJ}}$, описывает отрезок прямой

$$j: 4(1 - \lambda)(tg^2\alpha - tg^2\beta)x + 4(1 - \lambda)(tg\alpha + tg\beta)[(2\lambda + 1)tg\alpha tg\beta + 2\lambda - 3]y -$$

$$- c[(1 - 4\lambda^2)(tg^2\alpha tg^2\beta) + 8\lambda tg\alpha tg\beta + tg^2\alpha + (4\lambda - 3)tg^2\beta + (2\lambda + 1)(2\lambda - 3)] = 0,$$

концы которого

$$J_a \left(\frac{c[(2\lambda+1)tg\alpha tg^2\beta + tg\alpha - 2\lambda tg\beta]}{4(1-\lambda)(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\beta - 2\lambda tg\alpha tg\beta + 2\lambda + 1)}{4(1-\lambda)(tg\alpha + tg\beta)} \right),$$

$$J_b \left(-\frac{c[(2\lambda+1)tg^2\alpha tg\beta + 2(\lambda-2)tg\alpha + (4\lambda-3)tg\beta]}{4(1-\lambda)(tg\alpha + tg\beta)}, \frac{c(tg^2\alpha - 2\lambda tg\alpha tg\beta + 2\lambda + 1)}{4(1-\lambda)(tg\alpha + tg\beta)} \right).$$

Прямая j при $\lambda = \infty, -\frac{1}{2}, 0, -1$ переходит, соответственно, в прямых h, g, o, e .

6) Точки H_a, G_a, O_a, E_a и J_a лежат на прямой

$$l_a: 2(tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta + 3)x - 2(3tg\alpha tg^2\beta + tg\alpha - 2tg\beta)y + c(tg^2\beta + 1)(tg\alpha tg\beta - 1) = 0,$$

а точки H_b, G_b, O_b, E_b и J_b лежат на прямой

$$l_b: \begin{aligned} &2(tg^2\alpha - 2tg\alpha tg\beta + 3)x + 2(3tg^2\alpha tg\beta - 2tg\alpha + tg\beta)y - \\ &- c(tg^3\alpha tg\beta + tg^2\alpha - 3tg\alpha tg\beta + 5) = 0. \end{aligned}$$

7) Все прямые h, g, o, e, j, l_a и l_b являются специальными положениями прямой Эйлера ΔMNC при движении C по AB . Прямые h, g, o, e, j, l_a и l_b касаются кривой второго порядка

$$K_5: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (tg^2\alpha - tg^2\beta)^2, a_{12} = (tg^2\alpha - tg^2\beta)(tg\alpha + tg\beta)(3tg\alpha tg\beta - 1), \\ a_{22} &= (tg\alpha + tg\beta)^2(3tg\alpha tg\beta - 1)^2, a_{13} = -c(tg^2\alpha - tg^2\beta)(2tg^2\alpha tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta - tg^2\beta - 1), \\ a_{23} &= -c(tg\alpha + tg\beta)(3tg^3\alpha tg^3\beta - 3tg^2\alpha tg^2\beta + tg^3\alpha tg\beta - \\ &- 2tg\alpha tg^3\beta + tg^2\alpha + 2tg^2\beta + 4tg\alpha tg\beta - 2), \\ a_{33} &= c^2(tg^4\alpha tg^4\beta + tg^4\alpha tg^2\alpha - 3tg^2\alpha tg^4\beta + 4tg\alpha tg^3\beta + tg^4\beta - tg^2\alpha + tg^2\beta - 4tg\alpha tg\beta + 4). \end{aligned}$$

Вид кривой K_5 определяется следующим образом:

7.1) Если углы α и β не удовлетворяют ни одному из следующих равенств:

а) $\alpha = \beta$; б) $\alpha - \beta = 60^\circ$; в) $\alpha - \beta = 120^\circ$, то кривая K_5 – парабола;

7.2) Если углы α и β удовлетворяют хотя бы одному из следующих равенств:

а) $\alpha = \beta$, б) $\alpha - \beta = 60^\circ$, в) $\alpha - \beta = 120^\circ$, то кривая k – двойная прямая.

В специальном случае, когда $\alpha = \beta = 60^\circ$ получается, что все прямые h , g , o , e , j , l_a и l_b совпадают (рис. 12).

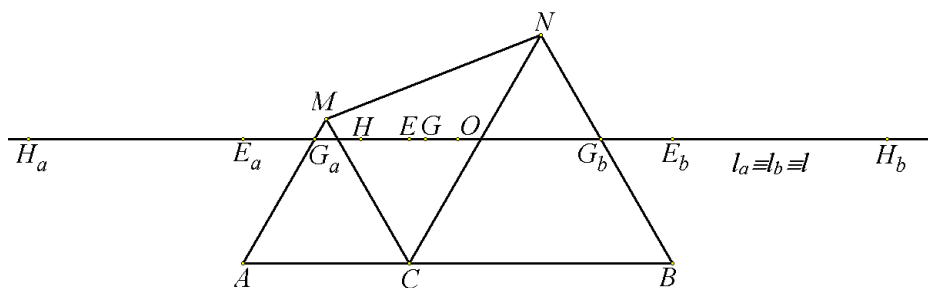


Рис. 12

В конце скажем, что мы рассмотрели и случаи, в которых равнобедренные треугольники заменили равнобедренными трапециями. Так получились еще кривые второго порядка и кривые седьмого порядка.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Arhimedes 2000 [Гроздев, С. В. Ненков (2012). *Около ортоцентра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000].
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Three notable points on the triangle medians*. Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000].
- Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Московский университет].
- Sergeeva T., Shabanova M. & Grozdev S. (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., Шабанова, М. & Гроздев, С. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. House "Iztok-Zapad". (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева, М. Гроздев, С. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.) София: Издателство „Изток – Запад“].

SOME TRAJECTORIES DETERMINED BY ISOSCELES TRIANGLES

Abstract. The paper presents the main results of the work of an international group of students in the frames of the research project “Geometry Scrabble in Cloud”. The study consisted in creating and solving problems that were generalizations and natural analogues of a starting problem. It applied analytical geometry methods and was software supported by GeoGebra, Geometer’s Sketchpad and Maple. As a result various problems were created leading to loci like Euler line, curves of second degree and also curves of higher order.

✉ ¹**Ms. Gorskaya Kseniya**, ²**Ms. Kopteva Daria**, ³**Mr. Mikurov Daniil**
Municipal High School № 8
163060 Arkhangelsk, Russia
E-mail: ¹gorksuvas@mail.ru; ²kopteva-8@yandex.ru; ³hygermik@gmail.com

¹**Mr. Yerkin Amirzhanovich Mudebaev**, ²**Mr. Adilbek Timurovich Temirkhanov**, ³**Mr. Kazbek Batyrbekovich Mukhambetov**
Regional Specialized Boarding School for Gifted Children
with In-depth Study of Various Subjects – Aktau, Kazakhstan
^{1, 2}130000 Aktau, Mangystau, ³130200 Zhanaozen, Mangystau
Kazakhstan
E-mail: ¹goodgamerwar@gmail; ²little.brave.toaster95@gmail.com; ³kazi92@bk.ru

¹**Ms. Irina Hristova**, ²**Ms. Radina Ivanova**, ³**Ms. Lilly Stefanova**
Mathematics High School – Lovech
I, Acad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: ¹ihristova11@abv.bg; ²radito_mish@abv.bg; ³lilly.ts.stefanova@gmail.com