

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

¹⁾Сава Гроздев, ²⁾Росен Николаев, ³⁾Веселин Ненков

¹⁾Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾Икономически университет – Варна

³⁾Технически колеж – Ловеч

Резюме. От 18 до 22 май 2017 г. в курорта „Пампорово“ се проведе традиционната Национална студентска олимпиада по математика с международно участие. Домакин на събитието беше Пловдивският университет „П. Хилендарски“. В олимпиадата участваха повече от 100 студенти от 14 университета от България и 2 университета от чужбина. Състезанието протече в 3 групи в зависимост от учебното съдържание по математика, изучавано в различните университети. В статията се обсъждат задачите от третата група. В тази група се състезаваха студенти от икономически висши училища, в които обучението по математика е с малък брой часове. Предложени са методически решения.

Keywords: problem; solution; Olympiad; University; student

Задача 1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$, където x и y са реални числа.

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A \cdot B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x, y)$, за които уравнението $3Dx^2 + Dx + 3 = 0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2 + y^2 \neq 0$ и $A^{2018} \cdot B = B^{2018} \cdot A$, да се докаже, че $A^{2017} = B^{2017}$.

Задача 2. Дадена е параболата $\pi: y^2 = 8x$. Правата l минава през точката $M(-2, a)$ ($a \in \mathbb{R}$) и е успоредна на оста на π . Параболата π пресича l в точка C и точката A е симетрична на точката $F(2, 0)$ спрямо C .

а) Да се намерят координатите на C .

б) Да се намерят координатите на A .

в) Да се намери броят на общите точки на описаната около $\triangle AMC$ окръжност и параболата π в зависимост от стойностите на a .

Задача 3. Графиките на функциите $f(x) = x^{2017}$ и $g(x) = a \cdot \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) имат обща допирателна t в точка T .

а) Да се намерят a и координатите на T .

б) Да се намери уравнението на t .

в) Ако t пресича координатните оси в точките A и B , а O е началото на координатната система, да се намери лицето на $\triangle OAB$.

Решение на задача 1. а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det A = 3$ и $\det B = x^2 + 2y^2$. Следователно $D = 3 \cdot (x^2 + 2y^2)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3Du^2 + Du + 3 = 0$ е $D_0 = D^2 - 36 \cdot D = 9(x^2 + 2y^2)(x^2 + 2y^2 - 12)$. Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. След заместване с резултата от а) получаваме, че е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното записваме във вида

$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} < 1$. Следователно точките $M(x, y)$ лежат вътре в елипсата $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дъл-

жини $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{6}$. Следователно дължините на осите са $2a = 4\sqrt{3}$ и $2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018} \cdot B \cdot B^{2018} \cdot A$ записваме във вида $A^{2017} \cdot (A \cdot B) = B^{2017} \cdot (B \cdot A)$. Тъй като

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} x+2y & 2(x-y) \\ -(x-y) & x+2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D \neq 0, \text{ то } A^{2017} = B^{2017}.$$

Решение на задача 2. Тъй като параболата π има канонично уравнение $y^2 = 8 \cdot x$ спрямо координатната система Oxy , то оста на π съвпада с абсцисната ос Ox . Следователно уравнението на l е $y = a$. Системата, обра-

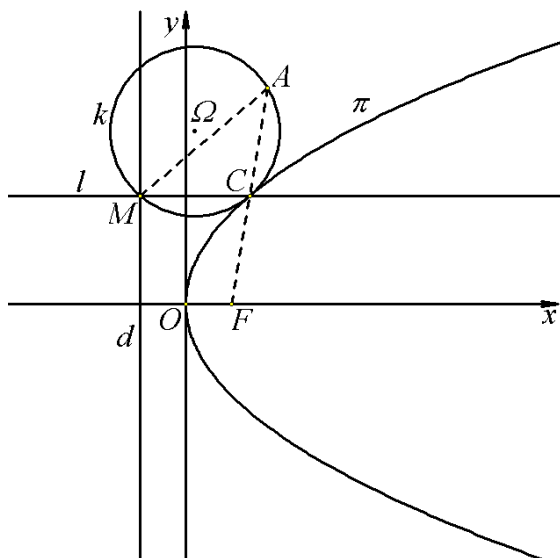
зувана от уравненията на l и π , има единствено решение $x = \frac{a^2}{8}$ и $y = a$.

Затова $l \cap \pi = C\left(\frac{a^2}{8}, a\right)$. С това подточка а) е решена. За координатите на

A са изпълнени равенствата $x_A = 2x_C - x_F$ и $y_A = 2y_C - y_F$. Оттук и от резултата, получен в а), следва, че $A\left(\frac{a^2-8}{4}, 2a\right)$. С това е решена подточка б).

Симетралите s_{CM} и s_{AM} на отсечките CM и AM имат съответно следните уравнения $s_{CM}: x = \frac{a^2-16}{16}$ и $s_{AM}: 8ax + 32y - a(a^2 + 32) = 0$. Системата, образувана от тези уравнения, има следното решение $x_0 = \frac{a^2-16}{16}$,

$y_0 = \frac{a(a^2 + 80)}{64}$. По този начин намерихме координатите (x_0, y_0) на центъра Ω на окръжността k , описана за $\triangle ACM$.



Разстоянието $M\Omega$ е равно на радиуса R на k . От координатите на Ω получаваме равенството $R^2 = \left(\frac{a^2 + 16}{16}\right)^3$. Оттук намираме уравнението на окръжността $k: 32x^2 + 32y^2 - 4(a^2 - 16)x - a(a^2 + 80)y + a^2(a^2 + 40) = 0$. От уравненията на k и π получаваме, че ординатите на общите за k и π точки удовлетворяват уравнението $(y - a)^2(y^2 + 2ay + 2a^2 + 80) = 0$. Завториямножител в това уравнение имаме $y^2 + 2ay + 2a^2 + 80 = (y + a)^2 + a^2 + 80 > 0$. Затова той няма реални корени. Следователно уравнението има един двоен корен $y = a$. Оттук и а) следва, че $C\left(\frac{a^2}{8}, a\right)$ е единствената обща точка на k и π при произволно реално число a . Следователно k и π са допирателни за всички реални стойности на a . С това е решена и подточка в).

Решение на задача 3. Нека абсцисата на точката T е x_0 . Тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ се допират в T , то $f(x_0) = g(x_0)$ и $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Затова са изпълнени равенствата $x_0^{2017} = a \ln x_0$ и $2017x_0^{2016} = \frac{a}{x_0}$. Оттук $2017.a \ln x_0 = a$, т.е. $\ln x_0 = \frac{1}{2017}$. Следователно $x_0 = {}^{2017}\sqrt{e}$ и $a = 2017e$. Оттук $T({}^{2017}\sqrt{e}, e)$. Допирателната t има уравнение $y - e = g'({}^{2017}\sqrt{e})(x - {}^{2017}\sqrt{e})$. Оттук следва, че $y = \frac{2017e}{{}^{2017}\sqrt{e}}x - 2016.e$. Нека $t \cap Ox = A$ и $t \cap Oy = B$. От уравнението на t имаме $A\left(\frac{2016{}^{2017}\sqrt{e}}{2017}, 0\right)$ и $B(0, -2016e)$. Следователно $S_{OAB} = \frac{2016^2.e.{}^{2017}\sqrt{e}}{4034}$.

NATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD FOR UNIVERSITY STUDENTS

Abstract. The traditional National mathematical Olympiad for University students took place in Pamporovo resort from 18 to 21 May 2017. The event was hosted by the Plovdiv University "P. Hilendarski". More than 100 students participated in the Olympiad representing 14 Universities from Bulgaria and 2 Universities from abroad. The competition was organized in 3 groups depending on the mathematical curriculum in different Universities. The paper discusses the problems of the third group, in which students from Economics Universities study Mathematics with small number of classes. Methodological solutions are proposed.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.**

University of Economics
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg