

МНОЖЕСТВА ОТ ТОЧКИ, ПОРОДЕНИ ОТ ДВОЙКИ РАВНОБЕДРЕНИ ТРИЪГЪЛНИЦИ СЪС СПЕЦИАЛНО РАЗПОЛОЖЕНИЕ НА ОСНОВИТЕ

¹⁾Сава Гроздев, Веселин Ненков

¹⁾Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Статията е посветена на обобщения на задачата: B е точка от отсечката AC , а X и Y са точки, лежащи в една и съща полуравнина относно страната AC на триъгълник ABC , така че триъгълниците ABX и BCY са равнострани. Да се докаже или опровергае равенството $AY = CX$.

Keywords: triangle; co-ordinate system; curve of second degree; polarity

B (Rosillo, 2018) е поставена следната задача: B е точка от отсечката AC , а X и Y са точки, лежащи в една и съща полуравнина относно страната AC на $\triangle ABC$, така че триъгълниците ABX и BCY са равнострани. Да се докаже или опровергае равенството $AY = CX$.

В цитираното съобщение е потвърдено равенството, като с помощта на Derive 6.10 е изведено равенството $AY = CX = \sqrt{(b-a)^2 + ab}$, където $A(0;0)$, $B(a;0)$ и $C(b;0)$ в съответната координатна система. Кореспондентът отбелязва, че твърдението остава в сила, когато B е произволна точка от правата AC . Анализът на различните аспекти в условието на тази задача показва разнообразни възможности за нейното обобщаване в различни посоки. Тук ще разгледаме две идеи за обобщения. Освен това ще потърсим геометричните места на някои точки, които са естествено свързани с разглежданите геометрични конфигурации.

1. Множество от точки върху постоянна права, определящи равно отдалечени върхове от неподвижните върхове на равнобедрени триъгълници. Едно естествено обобщение на горната задача трябва да се очаква, ако заменим равностраничните триъгълници ABX и BCY с равнобедрени. Освен това вместо по AC можем да оставим точката B да се движи по права l , успоредна на AC . Така стигаме до формулировката на следната:

Задача 1. Нека A , B и C са три произволни точки в равнината. Отсечките

AB и BC са основи на равнобедрени триъгълници ABX и BCY с ъгли при основите съответно α и β . Ако точката B се движи по права l , успоредна на AC , да се определи множеството на точките B , при които е изпълнено равенството $AY = CX$.

За да решим тази задача, разглеждаме Декартова координатна система Axy с абсцисна ос по правата AC , спрямо която $A(0,0)$, $B(b,d)$ и $C(c,0)$. Означаваме с k_{AB} , k_{CB} , k_{AX} и k_{CY} ъгловите коефициенти съответно на правите AB , CB , AX и CY . Известно е, че ъгълът φ между две прави с ъглови коефициенти k_1 и k_2 се определя чрез формулата $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1}$. Тъй

като $k_{AB} = \frac{b}{d}$ и $k_{CB} = \frac{b-c}{d}$, от тази формула се получават $k_{AX} = \frac{btg\alpha + d}{b - dtg\alpha}$ и $k_{CY} = \frac{(c-b)tg\beta + b}{b - c + dtg\beta}$. С помощта на ъгловите коефициенти намираме уравненията на правите AX и CY във вида:

$$AX: y = \frac{btg\alpha + d}{b - dtg\alpha} \cdot x, \quad CY: y = \frac{(c-b)tg\beta + d}{b - c + dtg\beta} \cdot x - \frac{(c-b)tg\beta + d}{b - c + dtg\beta} \cdot c.$$

Освен това уравненията на симетралите s_{AB} и s_{CB} съответно на отсечките AB и CB са следните:

$$s_{AB}: 2bx + 2dy - b^2 - d^2 = 0, \quad s_{CB}: 2(b-c)x + 2dy - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

От последните четири уравнения получаваме координатите на X и Y

$$(1) \quad X\left(\frac{b - dtg\alpha}{2}, \frac{btg\alpha + d}{2}\right), \quad Y\left(\frac{b + c + dtg\beta}{2}, \frac{(c-b)tg\beta + d}{2}\right).$$

За пълното изследване на поставената задача е необходимо да разгледаме и точките X' и Y' , които са симетрични съответно на X и Y спрямо AB и CB . От (1) лесно се вижда, че техните координати са следните:

$$(2) \quad X'\left(\frac{b + dtg\alpha}{2}, \frac{d - btg\alpha}{2}\right), \quad Y'\left(\frac{b + c - dtg\beta}{2}, \frac{d - (c-b)tg\beta}{2}\right).$$

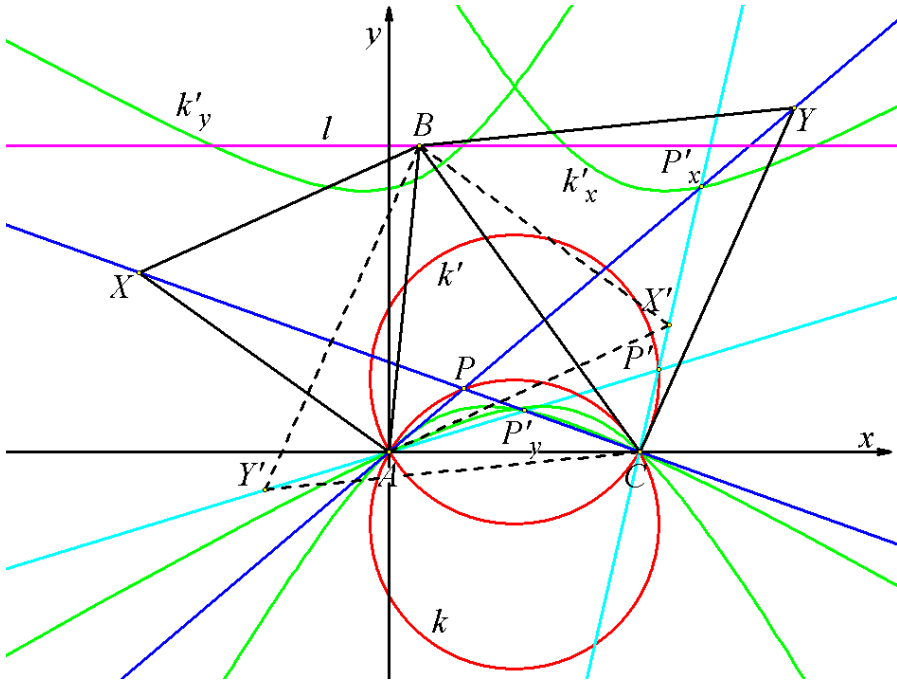
От координатите (1) и (2) на точките X , Y , X' и Y' следват равенствата:

$$CX^2 = \frac{(1 + tg^2\alpha)(b^2 + d^2) + 4c(c - b + dtg\alpha)}{4},$$

$$AY^2 = \frac{(1 + tg^2\beta)(b^2 + d^2) + c[(1 + tg^2\beta)c + 2(1 - tg^2\beta)b + 4dtg\beta]}{4},$$

$$CX'^2 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(b^2 + d^2) - 4c(c - b + d \operatorname{tg} \alpha)}{4},$$

$$AY'^2 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(b^2 + d^2) + c[(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)c - 2(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)b - 4d \operatorname{tg} \beta]}{4}.$$



Фигура 1

От горното следва, че равенствата $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$ са еквивалентни съответно със следващите равенства:

$$(3) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)b^2 - 2(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)cb + (3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)d^2 + 2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)cd = 0,$$

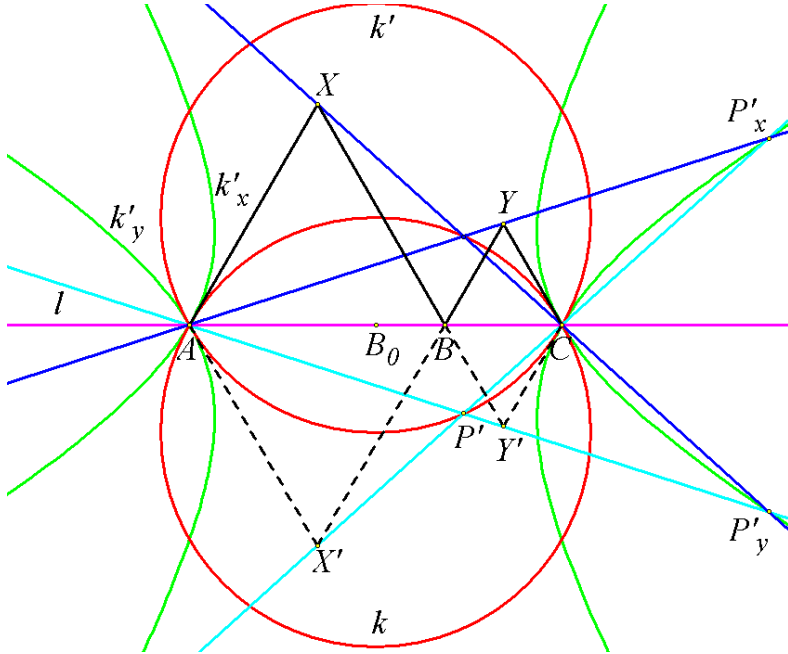
$$(4) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)b^2 - 2(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)cb + (3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)d^2 - 2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)cd = 0,$$

$$(5) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)b^2 - 2(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)cb + (3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)d^2 + 2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)cd = 0,$$

$$(6) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)b^2 - 2(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)cb + (3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)d^2 - 2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)cd = 0.$$

Изследванията върху тези квадратни уравнения относно b водят до следните резултати.

1) Равенствата (3) и (4) се превръщат в тъждества тогава и само тогава, когато $\alpha = \beta = 60^\circ$. Затова равенствата $AY = CX$ и $AY' = CX'$ са изпълнени за всяка точка B от правата l тогава и само тогава, когато триъгълниците ABX , BCY , ABX' и BCY' са равностранни (фиг. 1).



Фигура 2

Равенствата (5) и (6) се превръщат в тъждества тогава и само тогава, когато $\alpha = \beta = 60^\circ$ и $d = 0$. Затова равенствата $AY' = CX$ и $AY = CX'$ са изпълнени за всяка точка B от правата l тогава и само тогава, когато триъгълниците ABX , BCY , ABX' и BCY' са равностранни и $l \equiv AC$ (фиг. 2).

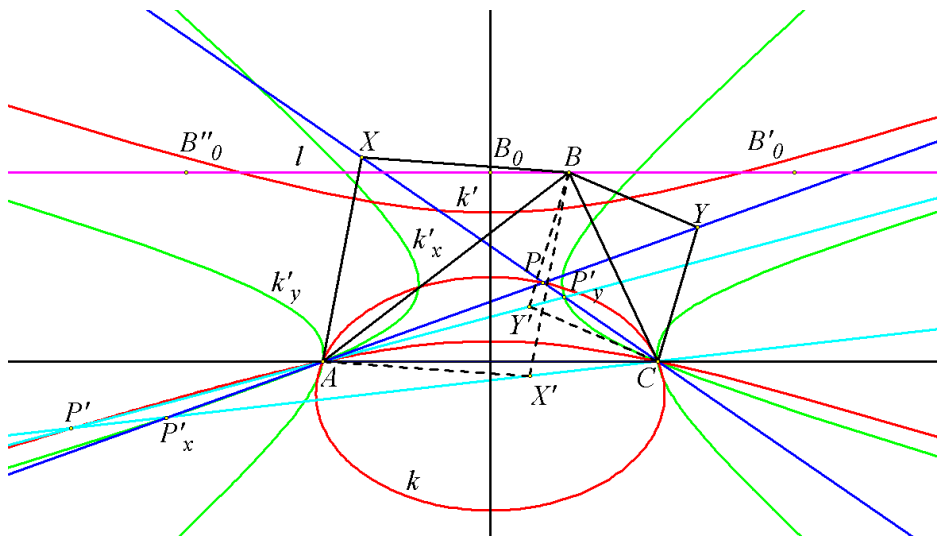
Четириите равенства $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$ са изпълнени едновременно за всяка точка от правата l тогава и само тогава, когато триъгълниците ABX , BCY , ABX' и BCY' са равностранни и $l \equiv AC$ (фиг. 2). Този извод дава отговор на първоначално поставената задача, получаваща се при $l \equiv AC$.

2) Нека $\beta = \alpha \neq 60^\circ$. Равенствата (3) и (4) определят едно линейно уравнение спрямо b с единствен корен $b_0 = \frac{c}{2}$. Това означава, че когато B е пре-

сечната точка B_0 на правата l и симетралата на отсечката AC , са изпълнени равенствата $AY = CX$ и $AY' = CX'$ (фиг. 3).

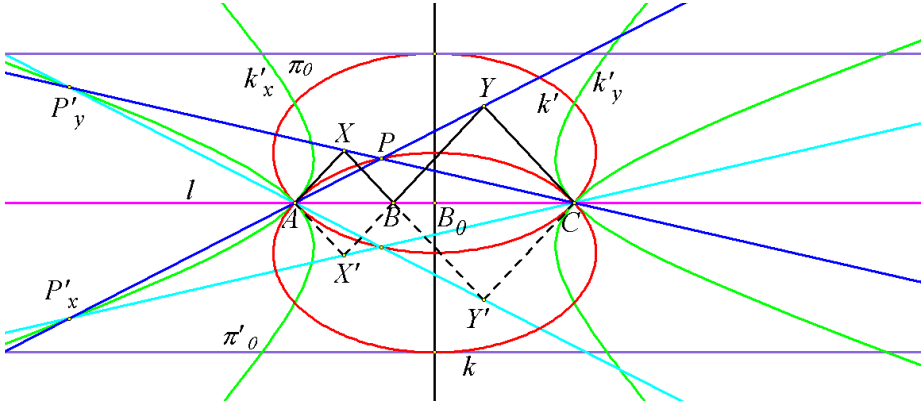
Равенствата (5) и (6) определят линейни уравнения спрямо b , корените на които са съответно $b'_0 = \frac{(3 - tg^2 \alpha)c + 8dtg \alpha}{2(3 - tg^2 \alpha)}$ и $b''_0 = \frac{(3 - tg^2 \alpha)c - 8dtg \alpha}{2(3 - tg^2 \alpha)}$.

Тези корени съответстват на положенията B'_0 и B''_0 на точката B , при които са изпълнени съответно равенствата $AY' = CX$ и $AY = CX'$ (фиг. 3). Точките B'_0 и B''_0 съвпадат точно когато $d = 0$, т.е. когато $l \equiv AC$ (фиг. 4).



Фигура 3

От извършените наблюдения стигаме до извода, че когато $l \equiv AC$ и B е средата B_0 на отсечката AC , равенствата $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$ са изпълнени едновременно. В този случай имаме $B'_0 \equiv B''_0 \equiv B_0$ (фиг. 4).



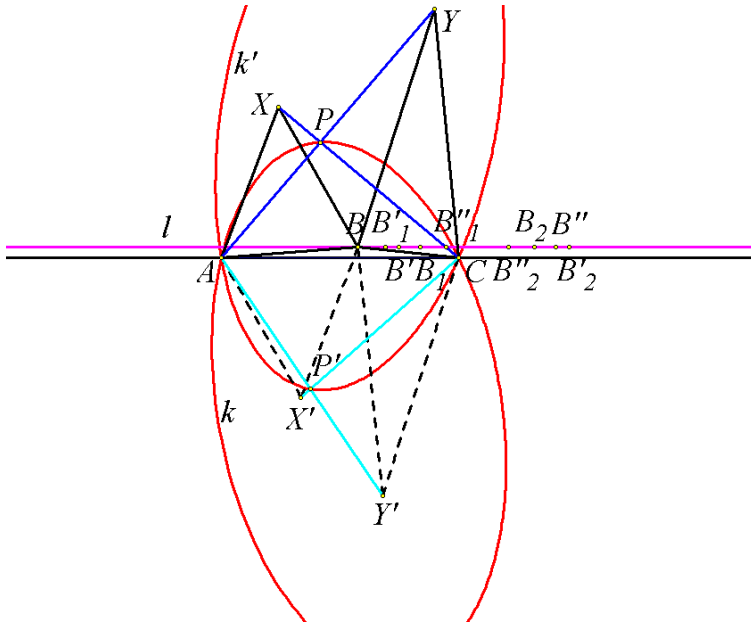
Фигура 4

3) Нека $\alpha \neq \beta$. В този случай квадратните относно b уравнения (3), (4), (5) и (6) имат съответно следващите двойки корени

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c + \sqrt{D_1}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad b_2 = \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c - \sqrt{D_1}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \\ b' &= \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c + \sqrt{D_2}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad b'' = \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c - \sqrt{D_2}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \\ b'_y &= \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c + \sqrt{D_3}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad b''_y = \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c - \sqrt{D_3}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \\ b'_x &= \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c + \sqrt{D_4}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad b''_x = \frac{(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c - \sqrt{D_4}}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} D_1 &= (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 - 4(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 cd - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)^2 d^2, \\ D_2 &= (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + 4(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 cd - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)^2 d^2, \\ D_3 &= (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 - 4(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) cd - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)^2 d^2, \\ D_4 &= (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)c^2 + 4(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) cd - (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)^2 d^2. \end{aligned}$$



Фигура 5

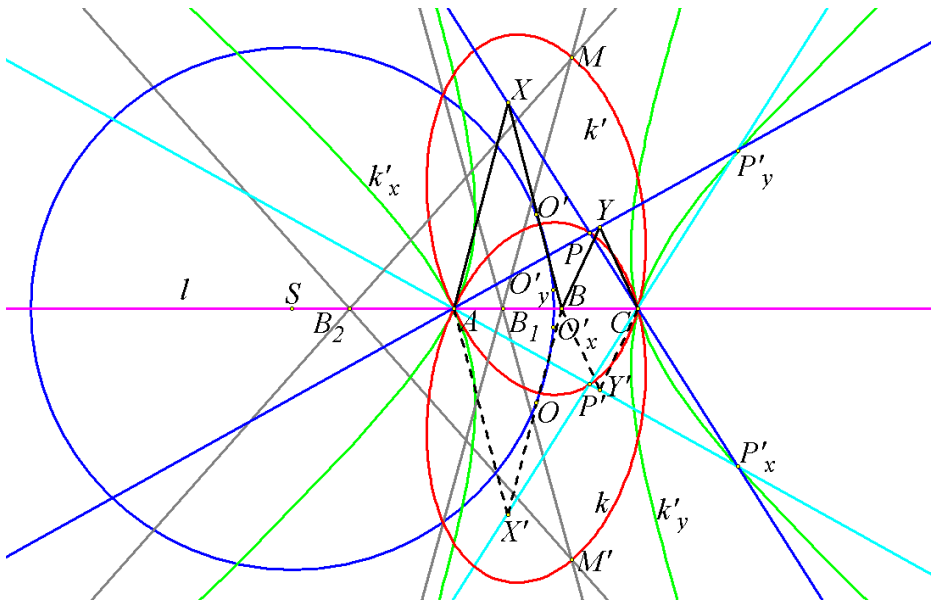
Тези двойки корени съответстват на двойките положения (B_1, B_2) , (B', B'') , (B'_1, B'_2) и (B''_1, B''_2) на точката B , при които са изпълнени съответно равенствата $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$ (фиг. 5). В зависимост от стойностите на ъглите α , β и разстоянието d между правите l и AC някои от двойките точки може да не съществуват. Разбира се, някои от точките, принадлежащи на някоя от горните двойки точки, може да съвпадат. По-нататък да предположим, че $\alpha > 60^\circ$ и $\beta < 60^\circ$. Тогава при $d > 0$ са изпълнени неравенствата $D_1 < 0$ и $D_3 < 0$, а при $d < 0$ – неравенствата $D_2 < 0$ и $D_4 < 0$. Следователно при $\alpha > 60^\circ$ и $\beta < 60^\circ$ (или $\alpha < 60^\circ$ и $\beta > 60^\circ$) съществуват най-много две от споменатите двойки точки.

В специалния случай, когато $d = 0$, т.е. $l \equiv AC$, уравненията (3), (4), (5) и (6) съвпадат с $(tg^2 \alpha - tg^2 \beta) \cdot b^2 - 2(3 - tg^2 \beta) \cdot c \cdot b + (3 - tg^2 \beta) \cdot c^2 = 0$. Затова двойките точки (B', B'') , (B'_1, B'_2) и (B''_1, B''_2) съвпадат с двойката (B_1, B_2) (фиг. 6). Корените на последното уравнение се изразяват с равенствата

$$(7) \quad b_1 = \frac{3 - tg^2 \beta + \sqrt{(3 - tg^2 \alpha)(3 - tg^2 \beta)}}{tg^2 \alpha - tg^2 \beta} \cdot c, \quad b_2 = \frac{3 - tg^2 \beta - \sqrt{(3 - tg^2 \alpha)(3 - tg^2 \beta)}}{tg^2 \alpha - tg^2 \beta} \cdot c.$$

Тези корени са реални тогава и само тогава, когато $(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta) \geq 0$. Равенство се достига, когато $\alpha = 60^\circ$ и $\beta \neq 60^\circ$ или $\beta = 60^\circ$ и $\alpha \neq 60^\circ$. В тези случаи $b_1 = b_2$ и точката B съвпада съответно с C или A .

Строгото неравенство $(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta) > 0$ е изпълнено при $\alpha, \beta \in (0^\circ, 60^\circ)$ или при $\alpha, \beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ (фиг. 6). В тези случаи има две различни точки B_1 и B_2 със свойството да са изпълнени едновременно равенствата $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$. Когато единият от ъглите принадлежи на интервала $(0^\circ, 60^\circ)$, а другият – на $(60^\circ, 90^\circ)$, не съществуват точки B , за които е изпълнено което и да е от равенствата $AY = CX$, $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$.



Фигура 6

От извършените изследвания относно решенията на задача 1 стигаме до следните изводи.

- (i) Ако $\alpha = \beta = 60^\circ$, всяка точка B от правата l е решение на задача 1 (фиг. 1, 2);
- (ii) Ако $\beta = \alpha \neq 60^\circ$, съществуват най-много три положения на точката B върху правата l , които са решения на задача 1 (фиг. 3);
- (iii) Ако $\beta = \alpha \neq 60^\circ$ и $l \equiv AC$, съществува само едно положение на точката B върху правата l , което е решение на задача 1 (фиг. 4);

(iv) Ако $\alpha \neq \beta$, съществуват най-много осем положения на точката B върху правата l , които са решения на задача 1 (фиг. 5);

(v) Ако $\alpha \neq \beta$ и $l \equiv AC$, съществуват точно две положения на точката B върху правата l , които са решения на задача 1 (фиг. 6).

2. Четири криви от втора степен. Освен разстоянията, определени от точките върху правите AY , BX , AY' и CX' , е интересно да се намерят геометричните места на техните пресечни точки, когато B описва правата l . Затова въвеждаме означенията $P = AY \cap CX$, $P' = AY' \cap CX'$, $P'_y = AY' \cap CX$, $P'_x = AY \cap CX'$. Сега си поставяме задачата за определяне на геометричните места, които описват точките P , P' , P'_y и P'_x , когато B описва l .

Първоначално определяме уравненията на правите AY , CX , AY' и CX' във вида

$$\begin{aligned} AY &: [(c-b).tg\beta + d]x - (c+b+d.tg\beta)y = 0, \\ CX &: (b.tg\alpha + d)x + (2c-b+d.tg\alpha)y - (b.tg\alpha + d)c = 0, \\ AY' &: [(b-c).tg\beta + d]x - (c+b-d.tg\beta)y = 0, \\ CX' &: (b.tg\alpha - d)x - (2c-b-d.tg\alpha)y - (b.tg\alpha - d)c = 0. \end{aligned}$$

Оттук намираме координатите на пресечните им точки P , P' , P'_y и P'_x :

$$\begin{aligned} P &\left(\frac{c(b.tg\alpha + d)(b+c+d.tg\beta)}{p}, \frac{c(b.tg\alpha + d)[(c-b)tg\beta + d]}{p} \right), \\ P' &\left(\frac{c(b.tg\alpha - d)(b+c-d.tg\beta)}{p'}, \frac{c(b.tg\alpha - d)[(b-c)tg\beta + d]}{p'} \right), \\ P'_y &\left(\frac{c(b.tg\alpha + d)(b+c-d.tg\beta)}{p'_y}, \frac{c(b.tg\alpha + d)[(b-c)tg\beta + d]}{p'_y} \right), \\ P'_x &\left(\frac{c(b.tg\alpha - d)(b+c+d.tg\beta)}{p'_x}, \frac{c(b.tg\alpha - d)[(b-c)tg\beta - d]}{p'_x} \right), \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} p &= (tg\alpha + tg\beta)(b^2 + d^2) + 2c^2tg\beta + cb(tg\alpha - 3tg\beta) + cd(tgatg\beta + 3), \\ p' &= (tg\alpha + tg\beta)(b^2 + d^2) + 2c^2tg\beta + cb(tg\alpha - 3tg\beta) - cd(tgatg\beta + 3), \\ p'_y &= (tg\alpha - tg\beta)(b^2 + d^2) - 2c^2tg\beta + cb(tg\alpha + 3tg\beta) - cd(tgatg\beta - 3), \\ p'_x &= (tg\alpha - tg\beta)(b^2 + d^2) - 2c^2tg\beta + cb(tg\alpha + 3tg\beta) + cd(tgatg\beta - 3). \end{aligned}$$

От уравненията на правите AY и CX следват съответно равенствата $b = \frac{(c.tg\beta + d)x - (c + d.tg\beta)}{tg\beta.x + y}$ и $b = \frac{d.x + (2c + d.tg\alpha)y - cd}{-tg\alpha.x + y + c.tg\alpha}$. След приравняване на двете стойности на b и извършване на известни преобразувания получаваме, че координатите (x, y) на P удовлетворяват уравнението

$$k: [c.tg\alpha tg\beta + d(tg\alpha + tg\beta)]x^2 - c(tg\alpha - tg\beta)xy + [3c + d(tg\alpha + tg\beta)]y^2 - c[c.tg\alpha tg\beta + d(tg\alpha + tg\beta)]x + c[c.tg\alpha + d(tg\alpha tg\beta - 1)]y = 0,$$

По аналогичен начин се получава, че координатите на точките P' , P'_y и P'_x удовлетворяват съответно уравненията:

$$k': [c.tg\alpha tg\beta - d(tg\alpha + tg\beta)]x^2 + c(tg\alpha - tg\beta)xy + [3c - d(tg\alpha + tg\beta)]y^2 + c[c.tg\alpha tg\beta - d(tg\alpha + tg\beta)]x - c[c.tg\alpha - d(tg\alpha tg\beta - 1)]y = 0,$$

$$k'_y: [c.tg\alpha tg\beta - d(tg\alpha - tg\beta)]x^2 + c(tg\alpha + tg\beta)xy - [3c - d(tg\alpha - tg\beta)]y^2 - c[c.tg\alpha tg\beta - d(tg\alpha - tg\beta)]x - c[c.tg\alpha - d(tg\alpha tg\beta + 1)]y = 0,$$

$$k'_x: [c.tg\alpha tg\beta + d(tg\alpha - tg\beta)]x^2 - c(tg\alpha + tg\beta)xy - [3c - d(tg\alpha - tg\beta)]y^2 - c[c.tg\alpha tg\beta + d(tg\alpha - tg\beta)]x + c[c.tg\alpha + d(tg\alpha tg\beta + 1)]y = 0.$$

Лесно се забелязва, че намерените уравнения се удовлетворяват от точките $A(0,0)$ и $C(c,0)$. Следователно точките P , P' , P'_y и P'_x описват криви от втора степен, минаващи през точките A и C .

Любопитно е да се разбере кога тези криви са окръжности. Една крива от втора степен е окръжност тогава и само тогава, когато в общото ѝ уравнение коефициентът пред xy е нула, а коефициентите пред x^2 и y^2 са равни. За кривите k и k' тези условия са изпълнени, когато са в сила равенствата $tg\alpha = tg\beta$ и $tg\alpha tg\beta = 3$. Следователно k и k' са окръжности тогава и само тогава, когато $\alpha = \beta = 60^\circ$, т.е. когато триъгълниците ABX и CBY са равностранни. В уравненията на k'_y и k'_x коефициентът $tg\alpha + tg\beta$ пред xy не се анулира. Затова тези криви не могат да са окръжности. В случай че $\beta = \alpha$, кривите k'_y и k'_x са хиперболи. Тези криви са хиперболи и при $\alpha \neq \beta$ и $l \equiv AC$ (фиг. 4, 6).

3. Полярно свойство. Беше отбелязано, че двойките точки (B', B'') , (B'_1, B'_2) и (B''_1, B''_2) съвпадат с (B_1, B_2) тогава и само тогава, когато $l \equiv AC$. Оказва се, че в този случай точките B_1 и B_2 притежават още забележителни

свойства, които са свързани с кривите k , k' , k'_y и k'_x . Тези свойства са определени от полярността спрямо всяка от кривите k , k' , k'_y и k'_x . Полярата на произволна точка $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ спрямо кривата

$$(8) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

се изразява с уравнението:

$$(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13})x + (a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23})y + (a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}) = 0.$$

Нека $l \equiv AC$, правите π_1 , π' , π'_y , π'_x са полярите на B_1 , а правите π_2 , π'' , π''_y , π''_x са полярите на B_2 съответно спрямо k , k' , k'_y и k'_x . От последното уравнение и (7) намираме уравненията на полярите π_1 , π_2 , π' , π'' , π'_y , π''_y , π'_x , π''_x :

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 - 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x - \\ \pi_1 : & -(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\ & -c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \\ & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 + 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x - \\ \pi_2 : & -(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\ & -c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0. \\ & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 - 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x + \\ \pi' : & +(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\ & -c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \\ & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 + 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x + \\ \pi'' : & +(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\ & -c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 - 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x + \\
 & + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\
 \pi'_y & :-c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \\
 & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 + 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x + \\
 & + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\
 \pi''_y & :-c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \\
 & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 - 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x - \\
 & - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\
 \pi'_x & :-c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 - \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0, \\
 & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 6 + 2\sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] x - \\
 & - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \left[\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] y - \\
 \pi''_x & :-c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{tg}^2 \beta - 3 + \sqrt{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(3 - \operatorname{tg}^2 \beta)} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

След заместване на координатите на B_1 в уравнението на π_2 и на координатите на B_2 в уравнението на π_1 се установява, че $B_1 \in \pi_2$ и $B_2 \in \pi_1$. Следователно $\bar{B}_1$ и B_2 са спрегнати спрямо k . Аналогично се показва, че $\bar{B}_1$ и B_2 са спрегнати спрямо всяка от кривите k' , k'_y и k'_x (фиг. 6).

В случая, когато $B_1 \equiv B_2 \equiv B_0$, имаме $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_0$ и $\pi' \equiv \pi'' \equiv \pi'_0$. Тогава π_0 е допирателна за k' , а π'_0 – за k (фиг. 4).

Нека сега $M = \pi_1 \cap \pi_2$, $M' = \pi' \cap \pi''$, $M'_y = \pi'_y \cap \pi''_y$, $M'_x = \pi'_x \cap \pi''_x$. От уравненията на правите π_1 , π_2 , π' , π'' , π'_y , π''_y , π'_x , π''_x намираме координатите на точките M , M' , M'_y и M'_x :

$$\begin{aligned}
 & M \left(\frac{c.\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \frac{c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right), \quad M' \left(\frac{c.\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, -\frac{c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right), \\
 & M'_y \left(\frac{c.\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, -\frac{c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \right), \quad M'_x \left(\frac{c.\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, \frac{c.\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \right).
 \end{aligned}$$

След заместване на координатите на M в уравнението на k' се вижда, че $M \in k'$ (фиг. 6). Аналогично се забелязва, че $M' \in k$, $M'_y \in k'_x$ и $M'_x \in k'_y$.

4. Едно свойство на центровете. Оказва се, че когато кривите k , k' , k'_y и k'_x са централни и $l \equiv AC$, центровете им също притежават интересно свойство. Нека центровете на k , k' , k'_y и k'_x са съответно O , O' , O'_y и O'_x . Ако една крива от втора степен има уравнение (8), координатите на центъра ѝ

удовлетворяват системата уравнения:
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$
. От тази система и уравненията на кривите за координатите на центровете им получаваме:

$$\begin{aligned} O & \left(\frac{tg\alpha(tg\alpha - 7tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta} c, \frac{tg\alpha tg\beta(tg\alpha + tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta} c \right), \\ O' & \left(\frac{tg\alpha(tg\alpha - 7tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta} c, -\frac{tg\alpha tg\beta(tg\alpha + tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta} c \right), \\ O'_y & \left(\frac{tg\alpha(tg\alpha + 7tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta} c, -\frac{tg\alpha tg\beta(tg\alpha - tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta} c \right), \\ O'_x & \left(\frac{tg\alpha(tg\alpha + 7tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta} c, \frac{tg\alpha tg\beta(tg\alpha - tg\beta)}{tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta} c \right). \end{aligned}$$

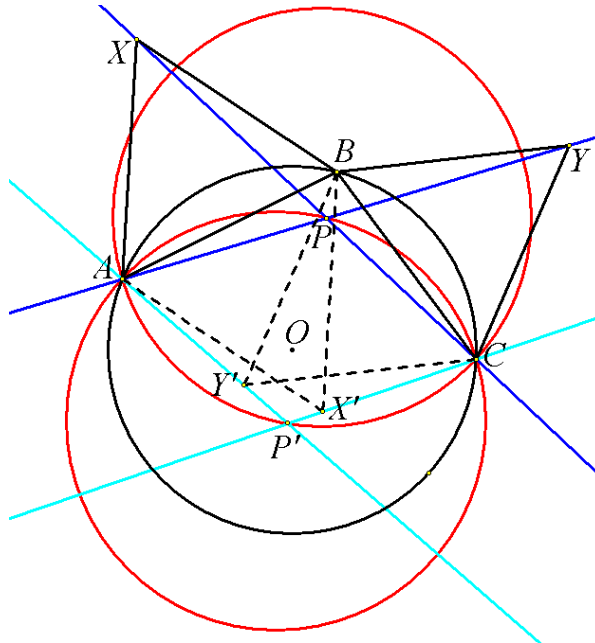
От тези координати се вижда, че само кривите k и k' може да са параболи. Освен това, ако едната е парабола, то и другата е такава. Свойството и двете да са елипси или хиперболи, не е изпълнено. Това лесно се забелязва на фиг. 3. Ако кривите k и k' не са параболи, лесно се установява, че точките O , O' , O'_y и O'_x лежат на окръжност (фиг. 6), центърът и радиусът на която са определени по следния начин:

$$\begin{aligned} S & \left(\frac{c \cdot tg\alpha(15tg^6\beta + 15tg^4\alpha tg^2\beta + 226tg^2\alpha tg^4\beta + 7tg^4\alpha + 679tg^4\beta - 686tg^2\alpha tg^2\beta)}{7(tg^2\alpha - tg^2\beta)(tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta)(tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta)}, 0 \right), \\ R^2 & = \frac{c \cdot tg\alpha tg\beta}{7(tg^2\alpha - tg^2\beta)(tg^2\alpha + tg^2\beta - 14tg\alpha tg\beta)(tg^2\alpha + tg^2\beta + 14tg\alpha tg\beta)} \times \\ & \times (tg^6\alpha + 225tg^2\alpha tg^4\beta + 30tg^4\alpha tg^2\beta + 49tg^4\alpha + 49tg^4\beta - 98tg^2\alpha tg^2\beta) \times \\ & \times (tg^6\beta + 225tg^4\alpha tg^2\beta + 30tg^2\alpha tg^4\beta + 49tg^4\alpha + 49tg^4\beta - 98tg^2\alpha tg^2\beta). \end{aligned}$$

5. Множество от точки върху постоянна окръжност, определящи равно отдалечени върхове от неподвижните върхове на равнобедрени триъгълници. Друг вариант на първоначалната задача е следният.

Задача 2. Нека A , B и C са три произволни точки от една окръжност k_0 . Отсечките AB и BC са основи на равнобедрени триъгълници ABX и BCY с ъгли при основите съответно α и β . Ако точката B се движи по окръжността k_0 , да се определи множеството на точките B , при които е изпълнено равенството $AY = CX$.

При случая, в който $\alpha = \beta = 60^\circ$, имаме $\triangle ABY \cong \triangle BXC$. Затова равенството $AY = CX$ е изпълнено за всяка точка B от k_0 (триъгълниците ABX и BCY са еднаквоориентирани) (фиг. 7). Така получаваме същия резултат, както при права.



Фигура 7

За да изследваме общия случай, ще разглеждаме дадените обекти в комплексната равнина спрямо Гаусова координатна система, центърът на която е центърът O на k_0 . Разглеждаме окръжността k_0 като единична, а афиксите на точките ще означаваме със съответните им малки букви. Следо-

вателно $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$. Лесно се вижда, че са изпълнени равенствата

$$AX = \frac{AB}{2 \cos \alpha}, \quad BY = \frac{BC}{2 \cos \beta}. \quad \text{Единичният вектор } \frac{\overrightarrow{AX}}{AX} \text{ се получава, като}$$

единичният вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ се завърти в положителна посока на ъгъл α . Затова

$$\frac{2 \cos \alpha (x - a)}{AB} = \frac{b - a}{AB} \cdot e^{i\alpha}, \quad \text{откъдето}$$

$$x = \frac{(b - a)e^{i\alpha} + 2a \cos \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{(b - a)e^{i\alpha} + a(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}} = \frac{be^{i\alpha} + ae^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}.$$

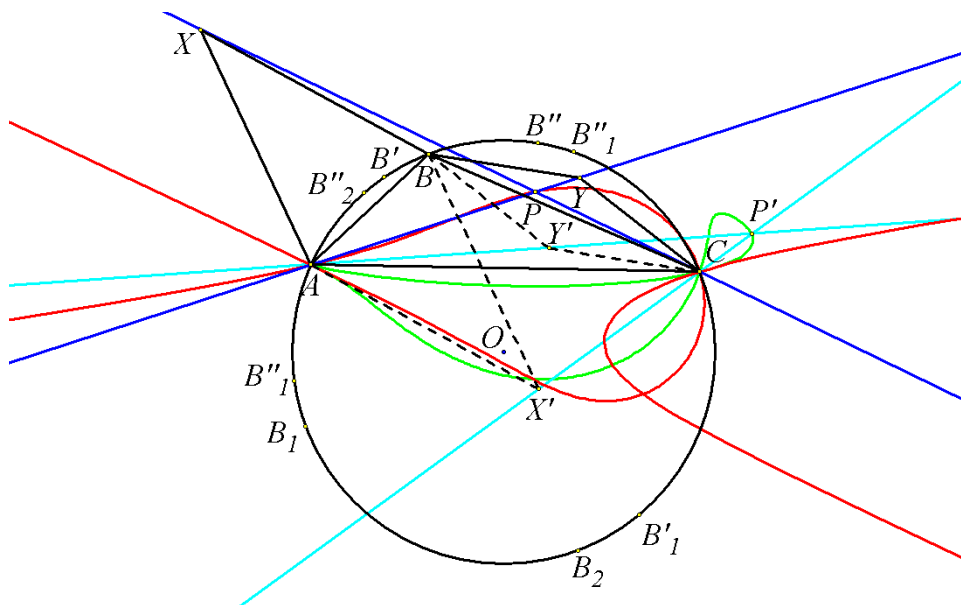
Аналогично се получава

$$y = \frac{(c - b)e^{i\beta} + 2b \cos \beta}{2 \cos \beta} = \frac{ce^{i\beta} + be^{-i\beta}}{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}.$$

От тези резултати се получава, че равенството $AY = CX$ е изпълнено, когато b е корен на квадратното уравнение

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos \alpha \left[\cos \alpha (1 - 4 \cos^2 \beta) - 2i \cos \beta \sin(\alpha - \beta) \right] a - \right. \\ & - \cos \beta \left[\cos \beta (1 - 4 \cos^2 \alpha) - 2i \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \right] c \left. \right\} b^2 + \\ & + 2i \sin(\alpha - \beta) \left[\cos \alpha \cos \beta \cdot a^2 - i \sin(\alpha + \beta) \cdot ac - \cos \alpha \cos \beta \cdot c^2 \right] b - \\ & - ac \left\{ \cos \beta \left[\cos \beta (1 - 4 \cos^2 \alpha) + 2i \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \right] a - \right. \\ & - \cos \alpha \left[\cos \alpha (1 - 4 \cos^2 \beta) + 2i \cos \beta \sin(\alpha - \beta) \right] c \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

Това уравнение се превръща в тждество при $\alpha = \beta = 60^\circ$, което съвпада с казаното по-рано (фиг. 7). Ако $\alpha = \beta \neq 60^\circ$, уравнението се свежда до $b^2 = ac$. Това означава, че двете точки B_1 и B_2 , удовлетворяващи последното равенство, са диаметрално противоположни за k_0 .



Фигура 8

За пълното изследване на задача 2, както в задача 1, трябва да разгледаме и точките X' и Y' , които са симетрични съответно на X и Y спрямо AB и BC . Така стигаме до изследването и на равенствата $AY' = CX'$, $AY' = CX$ и $AY = CX'$. Всеки от тези случаи води до квадратно уравнение. Следователно тези равенства се удовлетворяват от двойки точки (B', B'') , (B'_1, B'_2) и (B''_1, B''_2) (фиг. 8).

При $\alpha = \beta$ случаят $AY' = CX'$ не се различава от този, при който $AY = CX$. Нещо повече, двойката точки (B', B'') съвпада с (B_1, B_2) . Ако $\alpha = \beta = 60^\circ$, случаите $AY' = CX$ и $AY = CX'$ са възможни само при $B \equiv A$ и $B \equiv C$. При $\alpha = \beta \neq 60^\circ$ на тези случаи съответстват две двойки точки (B'_1, B'_2) и (B''_1, B''_2) от k_0 .

Така получените резултати можем да обобщим по следния начин.

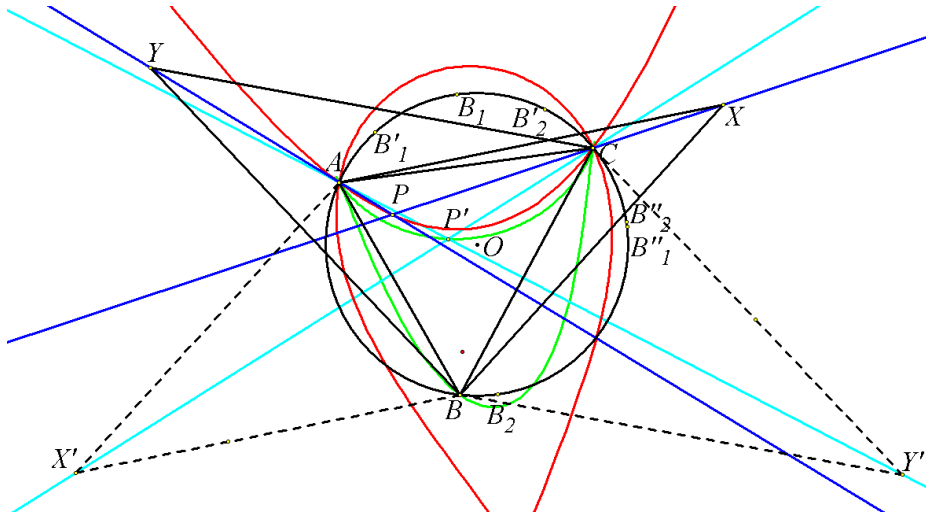
(*) Ако $\alpha = \beta = 60^\circ$ и триъгълниците ABX и BCY са еднакво ориентирани, всяка точка B от k_0 е решение (фиг. 7).

(**) Ако $\alpha = \beta = 60^\circ$ и триъгълниците ABX и BCY са различно ориентирани, точката B е решение само когато $B \equiv A$ и $B \equiv C$.

(***) Ако $\alpha = \beta \neq 60^\circ$ и триъгълниците ABX и BCY са еднакво ориентирани, има две положения на точката B върху k_0 , които са решения (фиг. 9).

(****) Ако $\alpha = \beta \neq 60^\circ$, има шест положения на точката B върху k_0 , които са решения (фиг. 9).

(*****) Ако $\alpha \neq \beta$, има осем положения на точката B върху k_0 , които са решения (фиг. 8).



Фигура 9

6. Криви от четвърта степен. Както в задача 1, е интересно да се определи какви са геометричните места на точките $P = AY \cap CX$, $P' = AY' \cap CX'$, $P'_y = AY' \cap CX$, $P'_x = AY \cap CX'$. Оказва се, че координатите на тези точки удовлетворяват уравнения от четвърта степен. Следователно тези точки описват съответно криви от четвърта степен K , K' , K'_y и K'_x (фиг. 7, 8, 9).

Ако $\alpha = \beta = 60^\circ$, кривата K , която описва P , има следното уравнение

$$[ac(3 - i\sqrt{3})z\bar{z} - (2a + c - i.c\sqrt{3})z - ac(2a + c - i.c\sqrt{3})\bar{z} + 2a^2 + c^2 - i.c^2\sqrt{3}]^2 = 0.$$

Следователно K е окръжност (фиг. 7), която се описва два пъти от точката P .

При $\alpha = \beta = 60^\circ$ кривата K' , както трябва да се очаква, също е окръжност (фиг. 7). Кривите K'_y и K'_x не притежават това специално свойство.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Rosillo, N. (2018). *Personal communication*.
- Modenov, P. (1969). *Analytical Geometry*. Moscow: MGU. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: МГУ.]
- Stanilov, G. (1979). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Станюлов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Matinov, N. (1989). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, ISBN978-954-92139-1-1.
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *About the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Curves of second degree, generated by secants and isogonality, *Mathematics Plus*, 1, 42 – 46. [Гроздев, С. & В. Ненков (2018). Криви от втора степен и триъгълници, породени от секущи и изогоналност, *Математика плюс*, 1, 42 – 64.]

SETS OF POINTS, GENERATED BY A PAIR OF ISOSCELES TRIANGLES WITH A SPECIAL LOCATION OF THEIR BASES

Abstract. The paper is dedicated to some generalizations of the problem: B is a point on the segment AC , while X and Y are points in one and the same half-plane with respect to the side AC of the triangle ABC . When the triangles ABX and BCY are equilateral, prove or disprove the equality $AY = CX$.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

45, Stoyan Balgarencheto Str.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg