

МЕТОДЪТ НА СПОМАГАТЕЛНИТЕ УСПОРЕДНИ РАВНИНИ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ ВИДА НА СЕЧЕНИЯТА НА ТОР С РАВНИНА

Ирена Първанова¹⁾, Венцислав Радулов²⁾

¹⁾ Факултет по приложна математика и информатика
Технически университет – София (България)

²⁾ Минно-електромеханичен факултет,
Минно-геоложки университет – София (България)

Резюме. Статията разглежда изследване и определяне вида на кривите, които се получават при пресичане на тор с равнина с помощта на методите и средствата, използвани в дескриптивната геометрия. Методът, който се използва, е универсален метод в дескриптивната геометрия – метод на спомагателните успоредни равнини.

Ключови думи: дескриптивна геометрия; ортогонално проектиране; равнинно сечение; кръгов тор

1. Въведение

Задачата за намиране на сечението на ротационна повърхнина с равнина е много важна в инженерните науки. В тази публикация авторите показват систематизирано изследване на вида на кривите, които се получават при пресичане на кръгов тор с равнина, като използват основно методите и средствата на дескриптивната геометрия. Разработени са 8 примера за илюстриране на различните възможности. Всички показани случаи и примери към тях са решени в монжова проекция.

2. Изложение

Методът на спомагателните успоредни равнини е универсален метод, използван при построяване на равнинни сечения на ротационни повърхнини, както и при изобразяване на линии на взаимно пресичане на ротационни повърхнини с успоредни оси. За първи път този метод е документирано използван от великия немски математик, художник и архитект Албрехт Дюрер при представянето на елипсата, хиперболата и параболата като равнинни сечения на ротационен конус.

Същността на метода е следната – да се използват сеченията на ротационната повърхнина с равнини, перпендикулярни на оста на повърхнината. Тези сечения са окръжности – паралели на повърхнината. Ако оста

на тялото, което се пресича, се постави перпендикулярна на проекционна равнина и проектирането е ортогонално, то тогава оста се проектира в точка, а паралелите се изобразят в концентрични окръжности с център тази точка, като радиусите им се запазват.

Във всички разгледани примери оста на тора е поставена перпендикулярна на първа проекционна равнина μ . Тогава първата проекция на оста е точка, съпадаща с първата проекция на центъра на тора, а торът се вижда като венец, ограничен от две окръжности. Тези две окръжности са образите на паралелите, получени при пресичане на тора с равнината, минаваща през центъра му и перпендикулярна на оста. Малката окръжност се нарича *гърло*, а голямата – *екватор*. Във втора проекция торът се изобразява чрез главния си меридиан – сечението на повърхнината с равнина, минаваща през оста и успоредна на втора проекционна равнина – две окръжности, които се свързват с общите им външни допирателни.

При построенията във всеки от показаните примери е използвана смяна на проекционния апарат с цел улесняване на намирането на специалните точки от търсеното сечение. Въведена е трета помощна проекционна равнина π , която е поставена перпендикулярна на μ и на секущата равнина α , което означава, че дирята на новата проекционна равнина е построена перпендикулярна на първата дия на равнината α . По този начин в трета проекция търсеното сечение се вижда като отсечка – част от третата дия на секущата равнина – α_3 . За да се построи сечението в истинския му вид, е използвано склопяване (завъртане) на равнината на сечението до първа проекционна равнина около нейната първа дия.

Решението на един от показаните случаи е описано подробно, а за останалите случаи са отбелязани най-важните особености.

Пример 1. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 4)$, ос g , перпендикулярна на първа проекционна равнина μ , и меридиан – окръжност с център $T(3; 5; 4)$ и радиус $r = 1.5$, и сечението му с равнината $\alpha[-11; 12.5; z_\alpha]$, минаваща през центъра му.

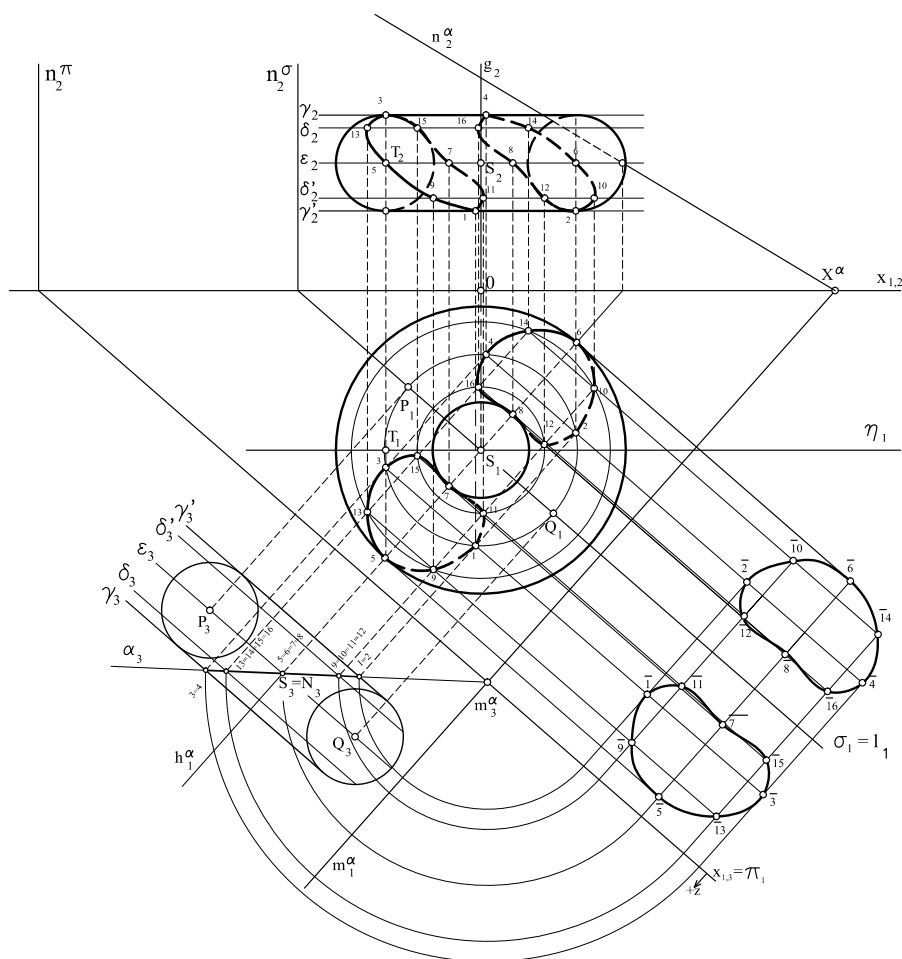
Построенията са извършени в следната последователност:

1. Изобразен е торът и дадената първа дия на равнината α .
2. Построена е равнината σ , минаваща през оста g и перпендикулярна на равнината α . Тази равнина е перпендикулярна на първа проекционна равнина и тогава нейната първа дия е и първа проекция на равнината – σ_1 . Пресечната права на равнината σ със секущата равнина е ос на симетрия на търсеното сечение – права l . l_1 , минава през S_1 и е перпендикулярна на m_1^α .
3. Въведена е трета помощна проекционна равнина π , като е построена $x_{1,3}$, перпендикулярна на m_1^α .
4. Построена е трета проекция на тора, като за целта са намерени

третите проекции на точки P и Q – центрове на сечението на тора с равнината σ .

5. Построена е третата дъга на равнината α , като α_3 , минава през S_3 .

6. От взаимното положение на третата дъга на α и контурните за трета проекция меридиани – окръжностите с центрове P_3 и Q_3 – се определя видът на сечението. Тъй като в случая правата α_3 и двете окръжности нямат общи точки, то сечението се състои от 2 отделни затворени криви.



Фигура 1

7. За намирането на точки от тези криви са използвани 5 спомагателни успоредни равнини, като първите три са задължителни при работа с тор.

- Равнините γ и γ' – горна и долна допирателни към повърхнината на тора равнини. Тези две равнини се допират до тора в паралели с радиуси $r = |x_T - x_S|$. В тях са точки – 1, 2, 3 и 4.

- Равнината ε , която съдържа гърлото и екватора на тора. В тази равнина са точки 5, 6, 7 и 8.

- Две произволни равнини – δ и δ' , които вземаме на равни разстояния под и над точка S , така че паралелите, които получаваме в тях, да са с равни радиуси и първите им проекции да съвпадат. В тези равнини са съответно точки 13, 14, 15, 16 и 9, 10, 11, 12.

Торът е повърхнина от четвърта степен и сечението се определя еднозначно от 14 произволни точки, така че намерените 16 точки са достатъчни за да се твърди, че сечението е еднозначно определено.

8. Свързани са гладко точките, като е определена видимостта на сечението.

- В първа проекция видима е частта от сечението, която е над равнината ε .

- Във втора проекция видима е частта от сечението, която е пред равнината η , минаваща през точка S и успоредна на втора проекционна равнина ν , и върху външната част от повърхнината на тора. Това е частта: 1-9-5-13-3.

9. Склопена е равнината α до μ , за да се изобрази сечението в истински вид.

Когато секущата равнина минава през центъра на тора, сечението има още една ос на симетрия – хоризонталната права на равнината α , минаваща през точката $S - h_\alpha$.

Построенията са показани на фиг. 1.

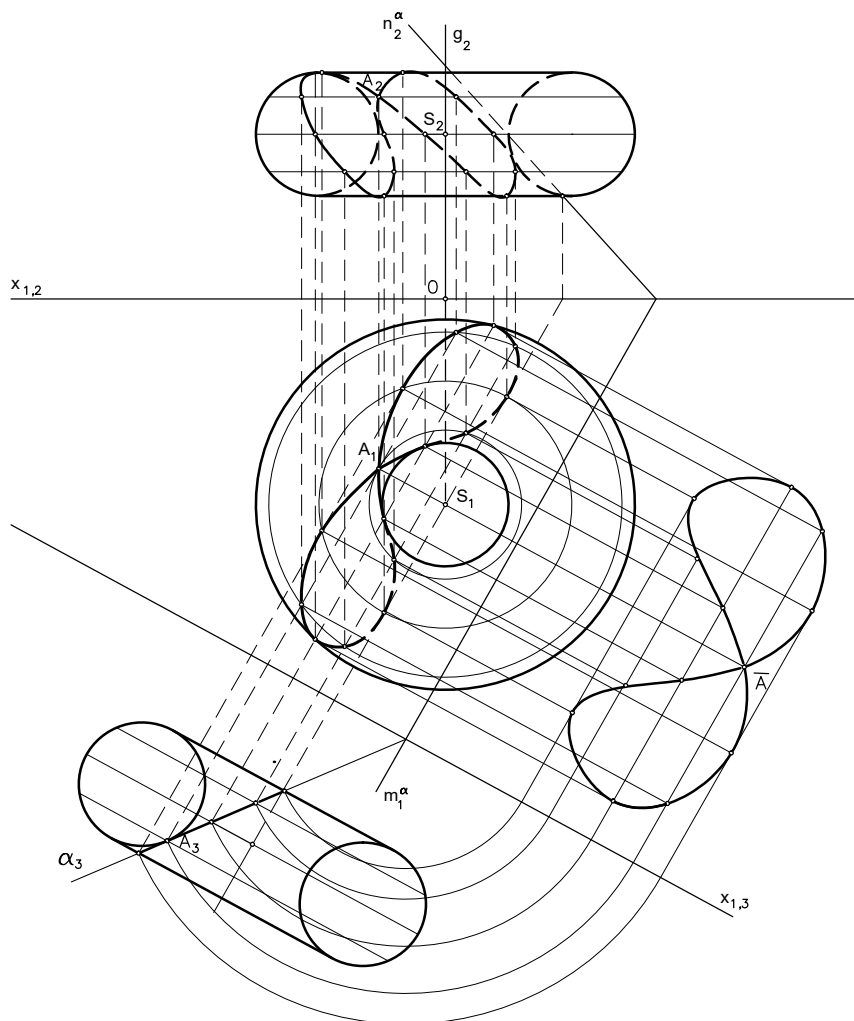
Пример 2. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 4)$, ос g , перпендикулярна на μ , и меридиан – окръжност $k(T(3; 5; 4); r = 1.5)$, и сечението му с равнината $\alpha[-5; 9; z_\alpha]$, допираща се вътрешно до повърхнината на тора в точка A , като $z_A > z_S$.

При построяването на дирите на секущата равнина е използвано, че тя е допирателна към повърхнината на тора и се определя от двете допирателни към паралел и меридиан в дадена точка. В първа проекция паралелите са в истински вид и допирателните към тях са хоризонтални прави. В трета проекция двата контурни меридиана са в истински вид и тогава α_3 е построена допираща се до единия от тях. Допирната точка е означена с A .

Тогава сечението е една затворена крива, симетрична спрямо равнината σ , като точка A е точка на самопресичане на кривата. Тъй като

α_3 няма общи точки с другия контурен за трета проекция меридиан, то кривата няма други общи точки с равнината на симетрия. Този случай на сечение на тор с равнина е разгледан в (Raduiov & Parvanova 2012), без да е показан истинският вид на кривата.

Построенията и видът на сечението са показани на фиг. 2.



Фигура 2

Като частен случай на показания пример е разгледан следният:

Пример 3. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 4)$, ос g , перпендикулярна на μ , и меридиан – окръжност $k(T(3; 5; 4); r = 1.5)$, и сечението му с равнината α , допираща се до повърхнината на тора в точка $A(-1; y_A; z_A)$ ($y_A > y_A$) от гърлото му.

Тук допирната точка е от гърлото на тора и тогава се получава крива линия, известна като лемниската. Ако означим с R разстоянието от центъра на тора до точка T , то при $r = R/2$ лемнискатата е известна като лемниската на Бернули. На това твърдение е показано аналитично доказателство, като за център на тора е взета точка O – началото на координатната система точка O . Тогава уравнението на тора е:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2 z^2 = 4r^2 R^2.$$

За опростяване на пресмятанията секущата равнината α е поставена успоредна на втора координатна равнина и допираща се до тора в точка $A(0; R - r; 0)$. Тогава нейното уравнение е $\alpha : y = R - r$.

След заместване в уравнението на тора получаваме:

$$\begin{aligned}(x^2 + (R - r)^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2 z^2 - 4r^2 R^2 &= 0 \\(x^2 + R^2 - 2rR + r^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2 z^2 - 4r^2 R^2 &= 0 \\(x^2 - 2rR + z^2)^2 + 4R^2 z^2 - 4r^2 R^2 &= 0 \\x^4 + z^4 + 4r^2 R^2 + 2x^2 z^2 - 4rR x^2 - 4rR z^2 + 4R^2 z^2 - 4r^2 R^2 &= 0 \\x^4 + z^4 + 2x^2 z^2 - 4rR(x^2 + z^2) + 4R^2 z^2 &= 0\end{aligned}$$

и $(x^2 + z^2)^2 = 4rR(x^2 + z^2) - 4R^2 z^2$ е уравнение на лемниската.

При $r = R/2$ получаваме:

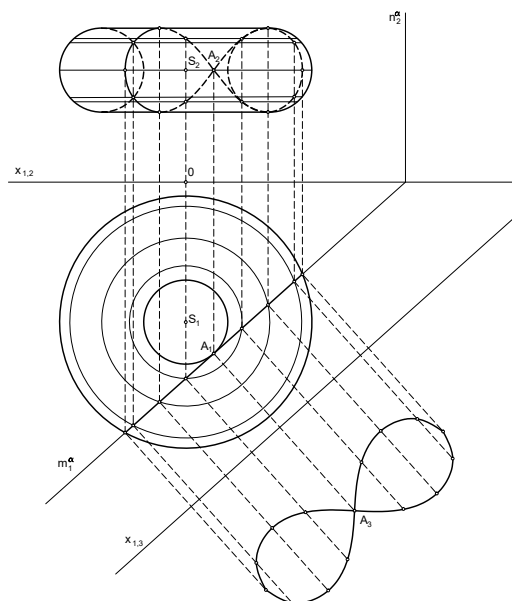
$$\begin{aligned}(x^2 + z^2)^2 &= 2R^2(x^2 + z^2) - 4R^2 z^2 \\(x^2 + z^2)^2 &= 2R^2 x^2 + 2R^2 z^2 - 4R^2 z^2\end{aligned}$$

и $(x^2 + z^2)^2 = 2R^2(x^2 - z^2)$ е уравнение на лемниската на Бернули.

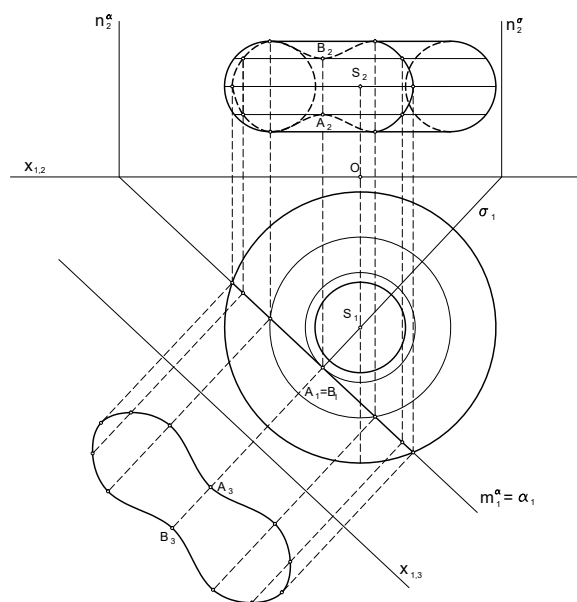
Лемнискатата на Бернули е частен случай на фамилия криви на Касини, които се получават при пресичането на тор с равнини, успоредни на оста на тора. В пример 4 е показана още една от тези криви.

Пример 4. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 3)$, ос g , перпендикулярна на μ и меридиан – окръжност $k(T(3; 5; 3); r = 1.5)$, и сечението му с равнината $\alpha[8; 7; \infty]$.

В примери 3 и 4 истинският вид на сечението се получава в трета проекционна равнина, тъй като секущите равнини са перпендикулярни на първа проекционна равнина μ .



Фигура 3

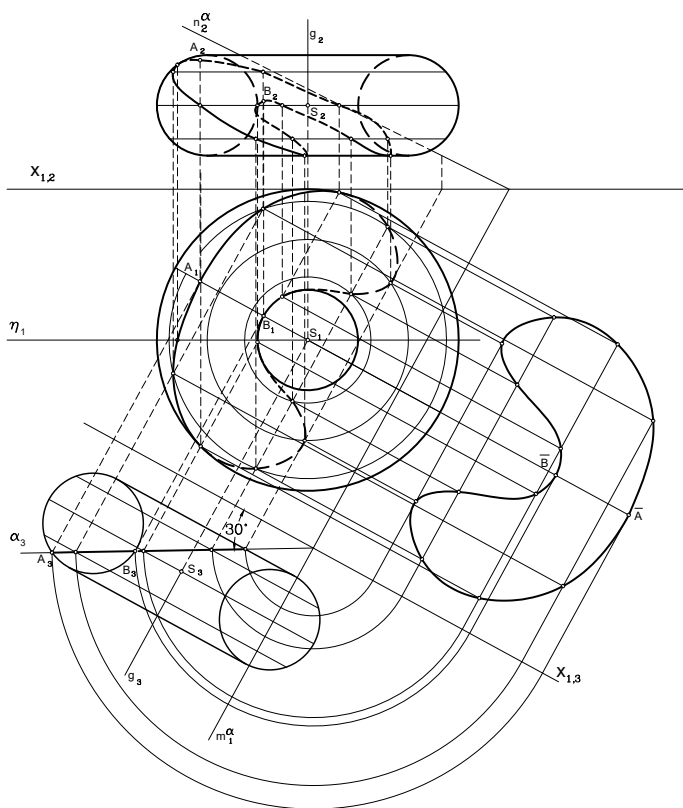


Фигура 4

Показаният вид на сечението в пример 4 е частен случай на вида, който се получава при две общи точки на третата дъга на секущата равнина с единия от контурните в трета проекция меридиани. Тогава сечението е една затворена крива, която пресича равнината на симетрия в две точки – A и B . Този случай е показан със следния пример:

Пример 5. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 4.5; 2.5)$, ос g , перпендикулярна на μ и меридиан – окръжност $k(T(3; 4.5; 2.5); r = 1.5)$, и сечението му с равнината $\alpha[-6; 11; z_\alpha]$, ако $\angle(\alpha; \mu) = 30^\circ$.

Построенията са показани на фиг. 5.



Фигура 5

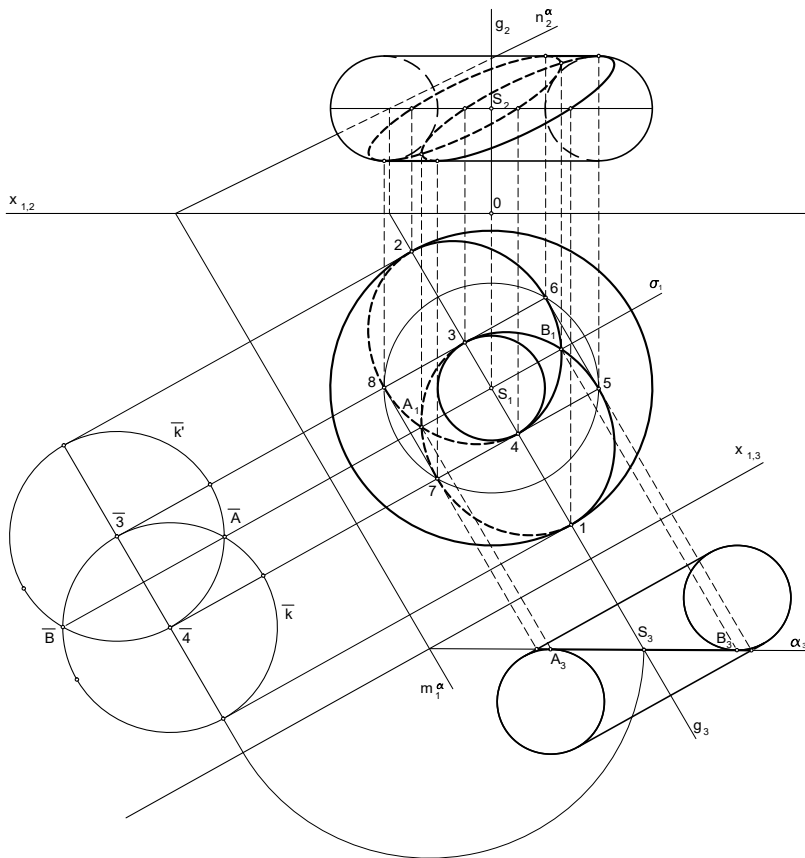
В пример 6 е показан също много интересен частен случай на две общи точки на α_3 с контурните меридиани в трета проекция – равнината

е допирателна към повърхнината на тора в две точки. Тогава сечението се състои от две пресичащи се окръжности с радиуси $r_c = |S_3T_3| = R$.

В първа проекция двете окръжности се проектират като елипси. Големите оси на елипсите лежат на хоризонтална права на секущата равнина и имат дължина $2R$. Малките оси лежат на стръмни прави на α и имат дължина $2R\cos\varphi$, където $\varphi = \angle(\alpha; \mu)$. Във втора проекция образите на осите са спрегнати диаметри на проекциите на окръжностите.

Пример 6. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 3)$, ос g , перпендикулярна на μ , и меридиан – окръжност $k(T(3; 5; 3); r = 1.5)$, и сечението му с равнината α , допираща се до тора в две точки от повърхнината му, ако $\angle(m^\alpha; \nu) = 60^\circ$.

Построенията са показани на фиг. 6.

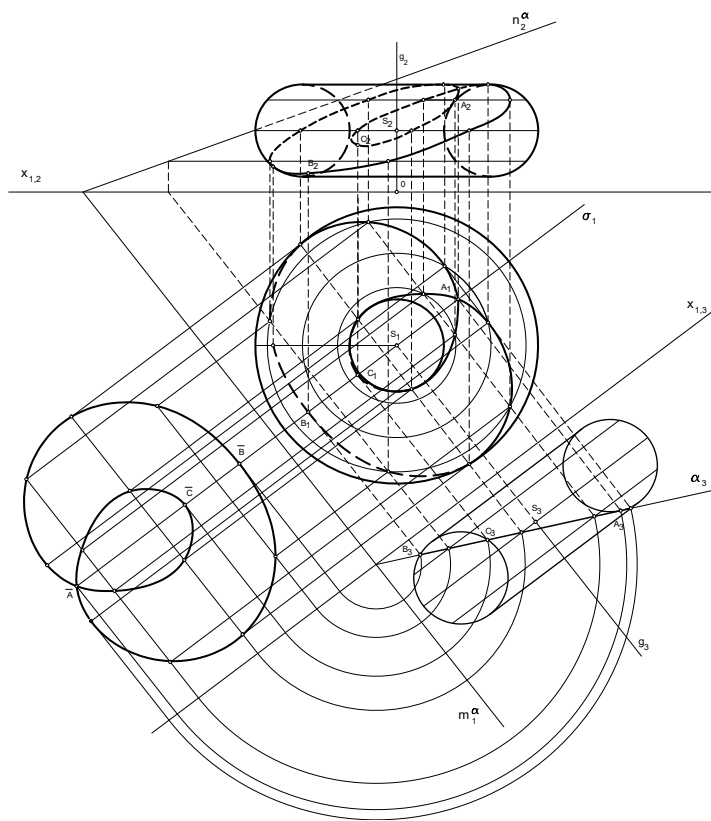


Фигура 6

В пример 7 е показан случаят, когато третата дъря на секущата равнина и контурните меридиани на тора имат 3 общи точки. Това е възможно, ако равнината е допирателна към повърхнината на тора. В този случай кривата пресича равнината на симетрия в точките A , B и C , като точката A е точка на самопресичане на кривата.

Пример 7. Да се изобрази кръгов тор с център $S(0; 5; 2)$, ос g , перпендикулярна на μ , и меридиан – окръжност $k(T(3; 5; 2); r = 1.5)$, и сечението му с равнината $\alpha[10; 13; z_\alpha]$, допираща се вътрешно до повърхнината на в точка A , като $z_A > z_S$.

Построенията са показани на фиг. 7.



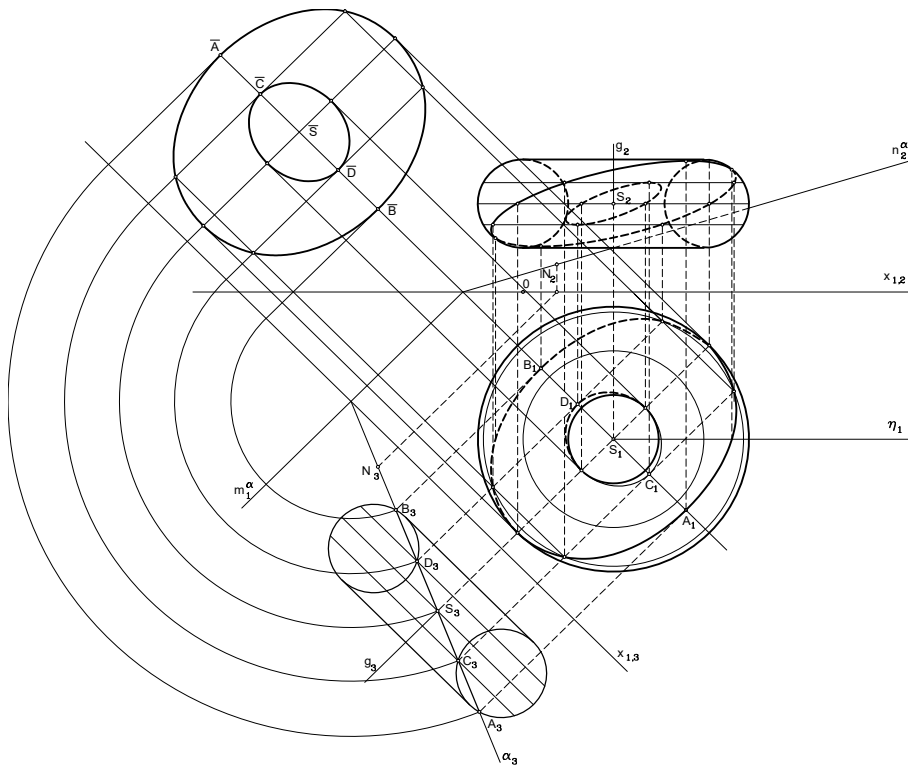
Фигура 7

Последната възможност е α_3 да пресича контурните меридиани на тора в трета проекция в 4 точки. Тогава сечението се състои от две от-

делни затворени криви, които пресичат равнината на симетрия в точките A, B, C и D . Тази възможност е показана в следния пример:

Пример 8. Да се изобрази кръгов тор с център $S(-3; 5; 3)$, ос g , перпендикулярна на μ , и меридиан – окръжност $k(T(0; 5; 3); r = 1.5)$, и сечението му с равнината $\alpha[2; -2; z_\alpha]$, минаваща през центъра му.

В този пример, както и в примери 1 и 6, секущата равнина е взета минаваща през центъра на тора, за да се получи втора ос на симетрия. Това е случай, който е разгледан от доц. Чорбаджиев в (Chorbadjev 1992). Построенията са показани на фиг. 8.



Фигура 8

Благодарности

Чертежите, които са показани на фигурите, са изработени с помощта на AUTOCAD.

REFERENCES

- CHORBADGIEV, D., 1992. *Descriptive geometry*, UACG (in Bulgarian)
RADULOV, V., PARVANOV, I., 2006. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, UACG, (in Bulgarian). ISBN 13978-954-724-031-5
RADULOV, V., PARVANOV, I., 2012. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, Regalia 6, (in Bulgarian). ISBN 978-954-745-220-6

ЛИТЕРАТУРА

- РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., 2006. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, УАСГ, ISBN 13978-954-724-031-5
РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., 2012. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
ЧОРБАДЖИЕВ, Д., 1992. *Дескриптивна геометрия*, УАСГ.

THE METHOD OF AUXILIARY PARALLEL PLANES WHEN STUDYING THE TYPE OF SECTIONS OF A TORUS WITH A PLANE

Abstract. The article discusses the study and determination of the type of curves that result from the intersection of a torus with a plane using the methods and tools used in descriptive geometry. The method used is a universal method in descriptive geometry – method of auxiliary parallel planes.

Keywords: descriptive geometry; orthogonal projection; plane section; circle torus

Irena Parvanova, Assist. Prof.

ORCID iD: 0009-0001-3278-0625

Department of Applied Mathematics and Informatics

Technical University of Sofia

8, Kl. Ohridski Blvd.

Sofia, Bulgaria

E-mail: irena.parvanova@tu-sofia.bg

Dr. Vencislav Radulov, Chief Assist. Prof.

ORCID iD 0009-0007-1687-457X

Faculty of Mining Electromechanics

University of Mining and Geology

Sofia, Bulgaria

E-mail: v.radulov@ngu.bg