

МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ НА РАВНИННИ СЕЧЕНИЯ НА КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР

Ирена Първанова¹⁾, Венцислав Радулов²⁾

¹⁾ Факултет по приложна математика и информатика
Технически университет – София (България)

²⁾ Минно-електромеханичен факултет
Минно-геоложки университет – София (България)

Резюме. Статията разглежда методи за построяване на сечението на кръгов цилиндър с равнина в аксонометрия и монжова проекция. Основната задача, която се използва в тези методи, е намирането на пробод на права с равнина. Начините за намиране на пробод на права с равнина са различни в зависимост от начините на задаване на секущата равнина.

Ключови думи: дескриптивна геометрия; успоредно проектиране; равнинно сечение; кръгов цилиндър

1. Въведение

В учебните програми по дескриптивна геометрия на техническите ВУЗ е предвидено студентите да придобият знания и умения за построяване на сечението на кръгов цилиндър с равнина. Проблемът за построяване на сечението на дадено тяло с равнина е разглеждан както в учебници и учебни пособия, така и в статии. В тази статия ще покажем различни методи за построяване на сечението в зависимост от начините на задаване на секущата равнина и целите на поставената задача. Ако целта на задачата е добра нагледност, то за предпочитане е построенията да се направят в аксонометрия. Ако целта е да се получи сечението в истински вид, да се определят дължините на осите и да се намери лицето, то тогава е удачно задачата да се изпълни в монжова проекция.

Ще акцентираме върху метода на успоредното проектиране, който е подходящ при изобразяване на сечението на призма и цилиндър с равнина, определена от три неколинеарни точки.

Стереометричната постановка на този метод е подробно разработена и описана в статии (Choban et al. 2013) и (Kunchev & Mitev 2022) и са показани приложения на метода при построяването на равнинно сечение на призма.

Сечението на кръгов цилиндър с равнина в общо положение е елипс. Център на елипсата е прободът на оста на цилиндъра със секущата равнина. Малката ос на елипсата е с дължина, равна на диаметъра на основата на цилиндъра. Дължината на голямата ос се променя в зависимост от наклона на секущата равнина спрямо оста на цилиндъра. Точките от елипсата са прободи на образувателните на цилиндъра със секущата равнина.

В неинтересни частни случаи сечението е окръжност, когато равнината е успоредна на основата на цилиндъра, и образувателни, когато равнината е успоредна на оста на цилиндъра. Тези частни случаи са в основата на методи за построяване на линия на взаимно пресичане на цилиндър с друго тяло.

Ще използваме следните стандартни за дескриптивната геометрия понятия и означения: проекционна равнина, проектиращо направление, координатни равнини, аксонометрична проекция и аксонометрична основа на точка и права, дири на равнина, стъпки на права.

2. Изложение

Първият пример, който ще разгледаме, е задача за изобразяване на сечението на прав кръгов цилиндър с равнина α , която е зададена с трите си отреза от координатните оси. В този случай равнината се изобразява чрез дириите си – пресечните ѝ прави с трите координатни равнини. За намирането на прободите на оста и образувателните на цилиндъра с равнината α ще използваме успоредно проектиране по направление на права от секущата равнина върху равнината на дадената основа на цилиндъра. Тогава търсеното сечение се проектира в отсечка – част от пресечната права на равнината на основата на цилиндъра и секущата равнина.

Пример 1. В увеличена ортогонална изометрия да се изобрази сечението на прав кръгов цилиндър с височина 10 и една основа в първа координатна равнина μ , с център $S(4; 8; 0)$ и радиус $r = 2$ с равнината $\alpha[3; -4; 2.5]$.

Построенията извършваме в следната последователност.

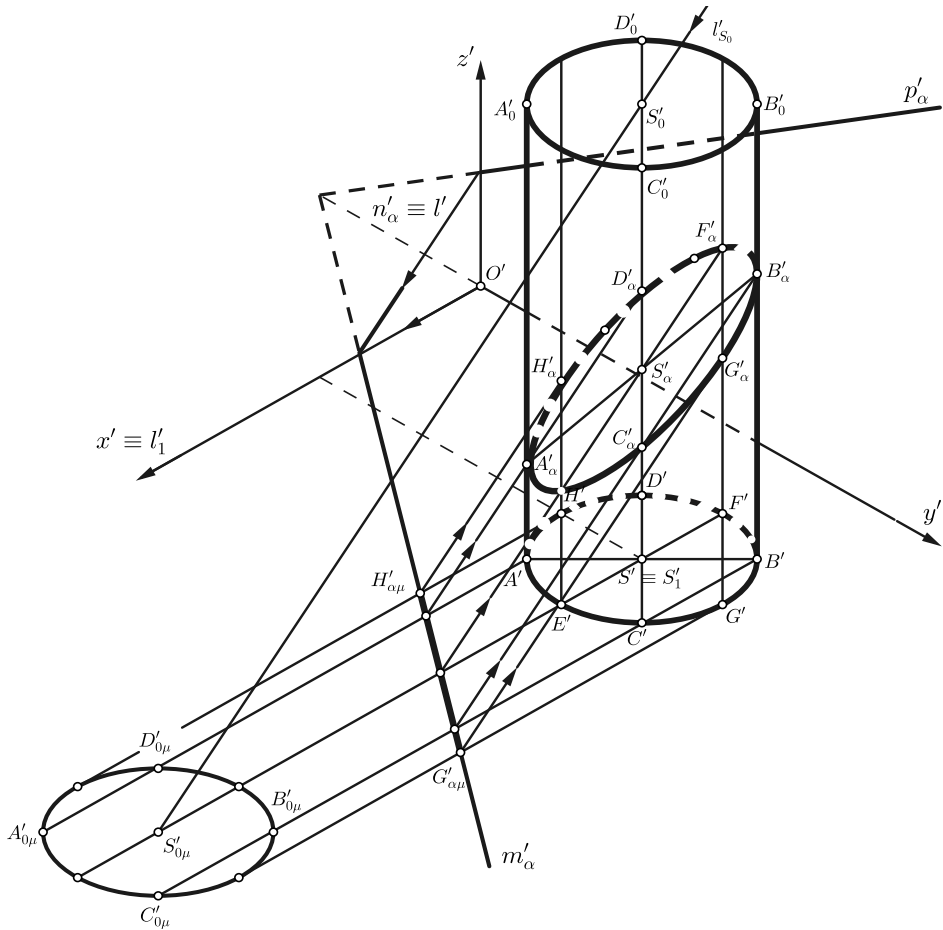
1. Изобразяваме цилиндъра и дириите на дадената равнина.
2. Тъй като основата на цилиндъра е в първа координатна равнина μ , то проектираме тялото в тази равнина, като най-лесно и удобно е това да се направи по направление на втората дия на секущата равнина n_α , т.е.

$$l' \equiv n'_\alpha, l'_1 \equiv x'.$$

• Долната основа е в първа координатна равнина и тогава тя съвпада с проекцията си. За построяване на проекцията на горната основа е достатъчно да намерим проекцията на центъра ѝ. Построяваме лъч, минаващ

през точката S_0 , и намираме първата му стъпка – $S_{0\mu}$.

• Горната основа лежи в равнина, успоредна на долната, и тогава нейната проекция в μ е еднаква окръжност с център т. $S_{0\mu}$. В проекция построяваме еднаква елипса на аксонометричните проекции на основите на цилиндъра.



Фигура 1

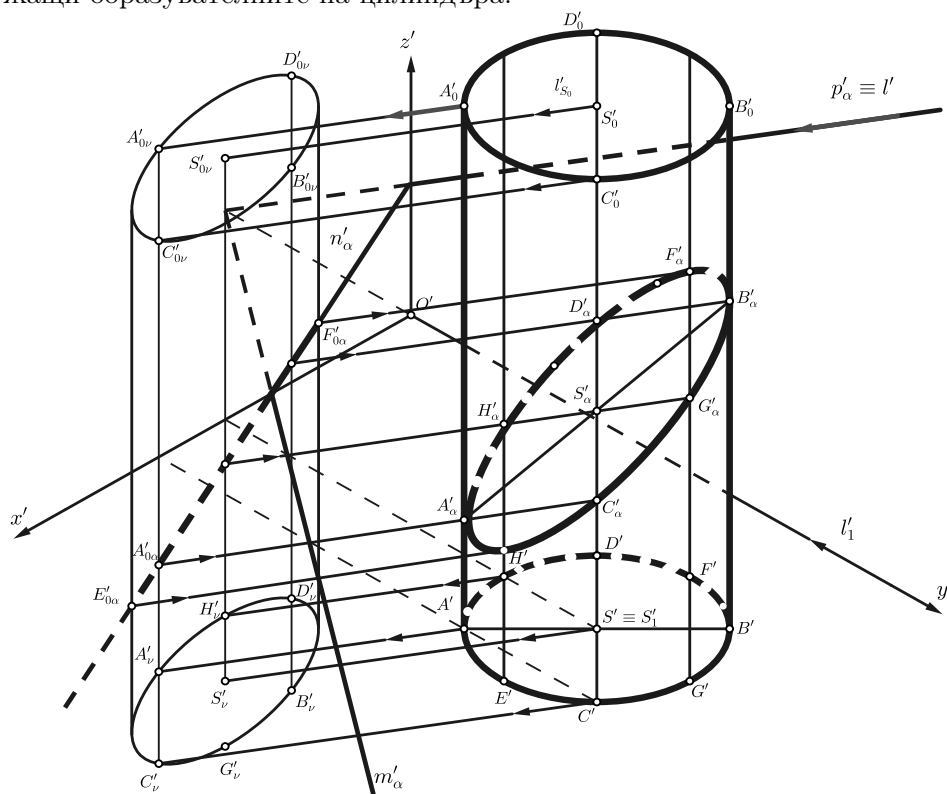
3. Намираме проекциите на образувателните на цилиндъра, минаващи през краищата на диаметрите на окръжността, с помощта на които сме изобразили основата на цилиндъра – $A'B'$ – голяма ос, $C'D'$ – малка ос, $E'F'$ и $G'H'$ – диаметри, успоредни на координатните оси на μ .

4. Проекцията в μ на търсеното сечение е част от първата дъга на секущата равнина – отсечката $H'_{\alpha\mu} G'_{\alpha\mu}$.

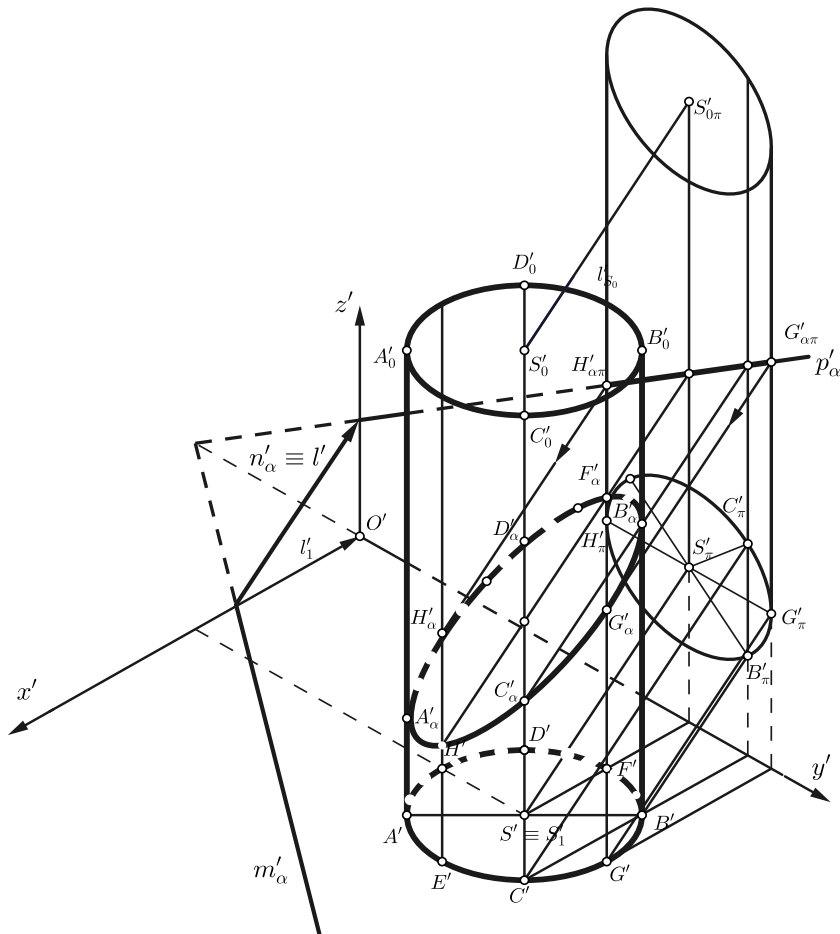
5. През пресечните точки на проекциите на образувателните на цилиндъра с първата дъга на равнината α построяваме прави, успоредни на втората дъга, до пресичане със съответните образувателни и отбелязваме получените осем точки от сечението. Отсечките $A'_\alpha B'_\alpha$ и $C'_\alpha D'_\alpha$, и $E'_\alpha F'_\alpha$ и $G'_\alpha H'_\alpha$ са две двойки спрегнати диаметри на проекцията на търсеното сечение.

6. При работа на ръка по получените осем точки оформяме елипсата. За по-прецизно оформяне и при работа с AUTOCAD чрез конструкцията на Риц могат да се намерят осите на проекцията на сечението.

Отбелязваме, че построяването на проекцията на горната основа на цилиндъра в равнината μ сме направили за по-добра нагледност. За изобразяване на сечението са достатъчни проекциите само на правите, съдържащи образувателните на цилиндъра.

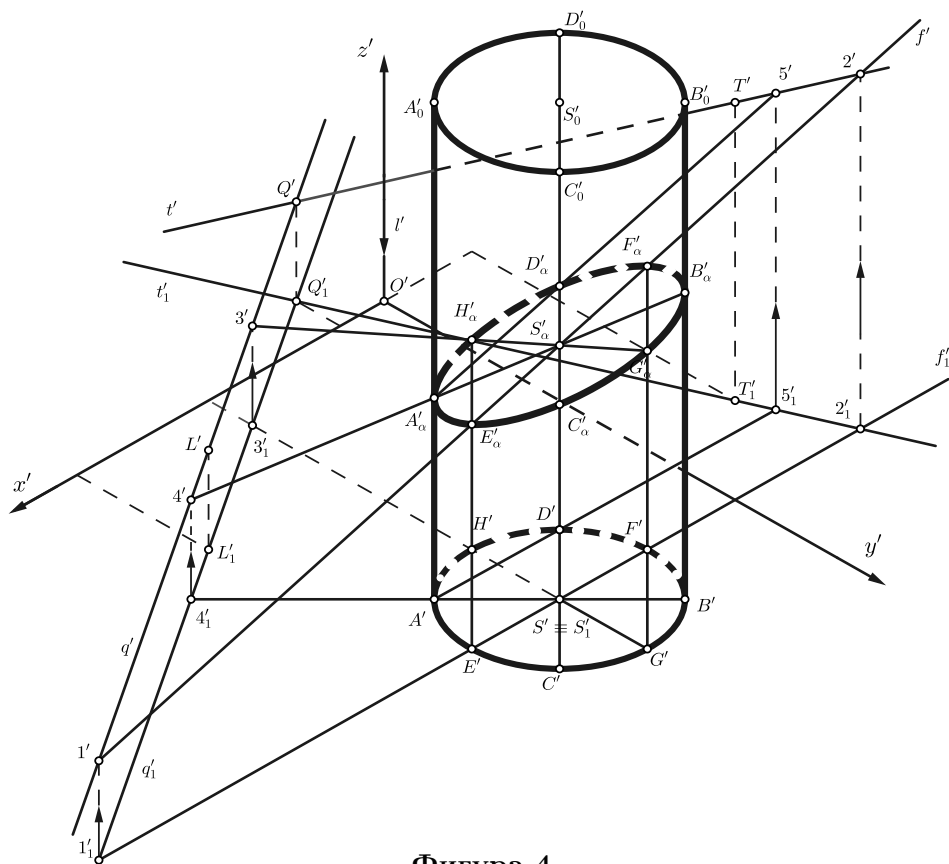


Фигура 2



Вторият пример, който ще разгледаме, е задача за намиране на сечението на прав кръгов цилиндър с равнина, определена от три произволни неколинеарни точки.

Първо ще покажем решение на задачата чрез използване на метода на успоредното проектиране на тялото и прави от секущата равнина в равнината на дадената основа на цилиндъра по направление на образувателните на цилиндъра. Този начин на построяване на сечението сме използвали при призма в (Choban et al. 2013).



Фигура 4

Пример 2. В увеличена ортогонална изометрия да се изобрази прав кръгов цилиндър с височина 10 и една основа в първа координатна равнина μ , с център $S(4; 8; 0)$ и радиус $r = 2$. Изобразете сечението му с равнината, определена от точките $L(7; 3; 2)$, $T(-2; 6; 6)$ и $Q(1; -1; 2)$.

Построенията извършваме в следната последователност.

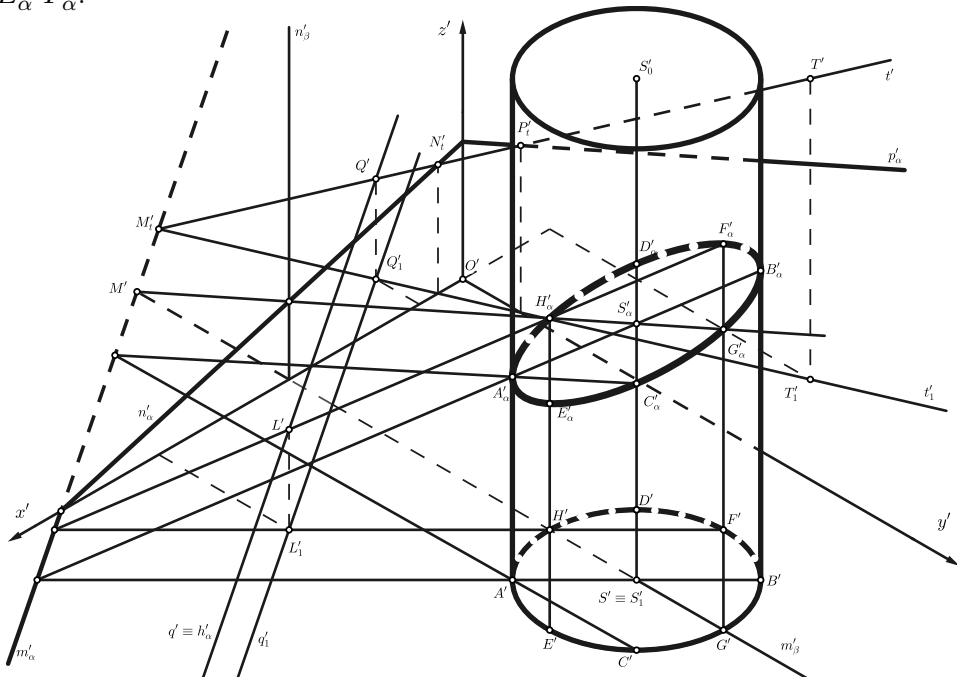
1. Изобразяваме проекцията на цилиндъра и точките, определящи равнината.

2. Изобразяваме две прави от равнината – $t = TQ$ и $q = LQ$.

3. Тъй като цилиндърът е прав, то неговите образувателни са успоредни на оста z на координатната система. Тогава проектираме правите t и q в равнината μ по направление на оста z . Проекциите им са съответно $t'_1 = T'_1Q'_1$ и $q'_1 = L'_1Q'_1$.

4. Проекцията в равнината μ на търсеното сечение съвпада с проекцията на основата на цилиндъра.

5. За намиране на прободите на оста на цилиндъра и образувателните, минаващи през точките E и F , построяваме проекцията на правата $f = EF$ – $f'_1 = E'F'$. Намираме пресечните точки на проекциите на правите f и l – точка 1, и f и q – точка 2. Чрез прави, успоредни на оста z , намираме точки $1'$ и $2'$. Свързваме ги и построяваме правата f' , която пресича оста на цилиндъра в точката S'_α – център на търсеното сечение и образувателните, минаващи през точките E' F' в точки от сечението – E'_α F'_α .



Фигура 5

6. Чрез аналогични построения намираме прободите и на другите образувателни на цилиндъра с дадената равнина.

7. Оформяме елипсата – сечение.

За да покажем предимствата на описания начин на намиране на сечението, на фиг. 5 сме показали решение на задачата чрез построяване на дирите на секущата равнина и използване на съответствието между проекцията на основата на цилиндъра и проекцията на сечението. За целта намираме стъпките на прави от равнината и построяваме дирите и. След което сечението може да бъде построено по описаните в първия пример начини – чрез проектиране на тялото в една от трите координатни равнини, или както сме показали на фиг. 5.

1. Въвеждаме помощна равнина β , която съдържа оста на тялото и образувателните, минаващи през точките G и H .

2. Намираме пресечната права на равнините α и $\beta - s_{\alpha\beta}$.

3. Така получаваме прободите на оста на цилиндъра и образувателните GG_0 и HH_0 с равнината α . Точката S_α е център на сечението.

4. За намирането на другите точки от сечението използваме съответствието между проекцията на долната основа на цилиндъра и проекцията на сечението, което е хомоложен афинитет φ с ос m'_α и съответни точки S' и $S'_\alpha - \varphi(m'_\alpha, S' \rightarrow S'_\alpha)$.

От направения чертеж е видно, че построенията, които правим при използването на този стандартен начин за решаване на задачата, са значително повече и по-сложни.

Следващият пример, който разглеждаме, касае намирането на сечението на наклонен кръгов цилиндър с равнина, определена от три неколинеарни точки.

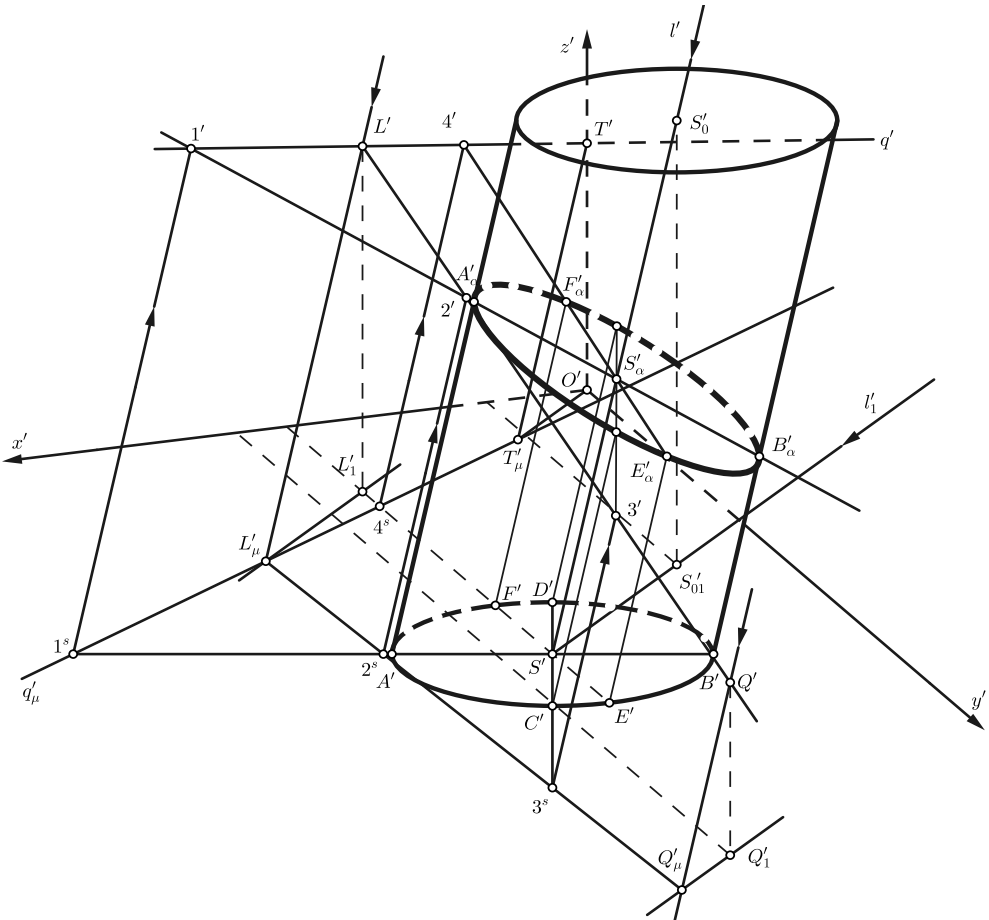
Пример 3. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази кръгов цилиндър с ос $SS_0[S(6; 14; 0), S_0(2; 10; 9)]$ и една основа в първа координатна равнина μ с радиус $r = 3$. Изобразете сечението на цилиндъра с равнината, определена от точките $L(6; 4; 7)$, $T(0; 0; 5)$ и $Q(7; 26; 3.5)$.

Решението сме направили отново чрез успоредно проектиране на тялото и прави от секущата равнина в равнината на долната основа на цилиндъра по направление на образувателните на цилиндъра. Отбелязваме, че контурните образувателни на проекцията на цилиндъра не минават през краищата на големите оси на проекциите на основите, а са допирателните към тях и точките на смяна на видимостта на сечението са допирните точки на елипсата до контурните образувателни.

Съществена разлика в построенията има при намирането на проекциите на точките в първа координатна равнина по направление на оста на цилиндъра, тъй като цилиндърът не е прав както в пример 2. Точките L_μ , T_μ и Q_μ са проекциите на точките, определящи секущата равнина, в μ .

За намирането им построяваме прави, успоредни на оста на цилиндъра, и намираме първите им стъпки.

Останалите построения са както в пример 2.



Фигура 6

Последният пример, който показваме, е решен в монжова проекция, тъй като имаме зададен наклон на секущата равнина спрямо равнината на основата на цилиндъра и се търси истинският вид на сечението.

Пример 4. В монжова проекция да се изобрази ротационен цилиндър с височина 8 и една основа в първа проекционна равнина μ , с център $S(0; 3; 0)$ и радиус $r = 3$. Изобразете сечението на цилиндъра с равнина $\alpha[8; 10; z_\alpha]$, която сключва ъгъл 40° с μ , и намерете истинския му вид.

При решаването на тази задача използваме допълнително ортогонално проектиране на тялото и секущата равнина в трета проекционна равнина, която поставяме така, че да можем да определим дадения двустенен ъгъл и да изобразим сечението като отсечка.

Построенията са показани на фиг. 7 и са извършени в следната последователност.

1. Изобразяваме тялото и дадената първа дия на секущата равнина.
2. Въвеждаме трета помощна проекционна равнина π , която е перпендикулярна на дадената равнина α и на първа проекционна равнина μ , т. е. построяваме новата ос $x_{1,3}$, перпендикулярна на m_1^α .

3. Намираме трета проекция на цилиндъра и построяваме трета дия на равнината $\alpha - \alpha_3$ като $\angle(\alpha_3, x_{1,3}) = 40^\circ$. Съгласно теорема от стереометрията построенят ъгъл е линеен ъгъл на дадения двустенен.

4. Търсеното сечение в трета проекция е отсечката $A_3^\alpha B_3^\alpha$. Дължината на отсечката $A_3^\alpha B_3^\alpha$ е реалната дължина на голямата ос на елипсата $2a$, $a = \frac{r}{\cos 40^\circ}$. Малката ос на сечението в трета проекция е точка – средата на голямата ос $C_3^\alpha \equiv D_3^\alpha$.

5. В първа проекция $A_1^\alpha B_1^\alpha$ е диаметърът на основата, перпендикулярен на първата дия на равнината α , а $C_1^\alpha D_1^\alpha$ е диаметърът на основата, успореден на дията. Малката ос на елипсата лежи на хоризонтална права на равнината $\alpha - h_\alpha$, а голямата ос – на стръмна права – f_α . Дължината на отсечката $C_1^\alpha D_1^\alpha = 2b = 2r$ е реалната дължина на малката ос, тъй като тя е успоредна на първа проекционна равнина.

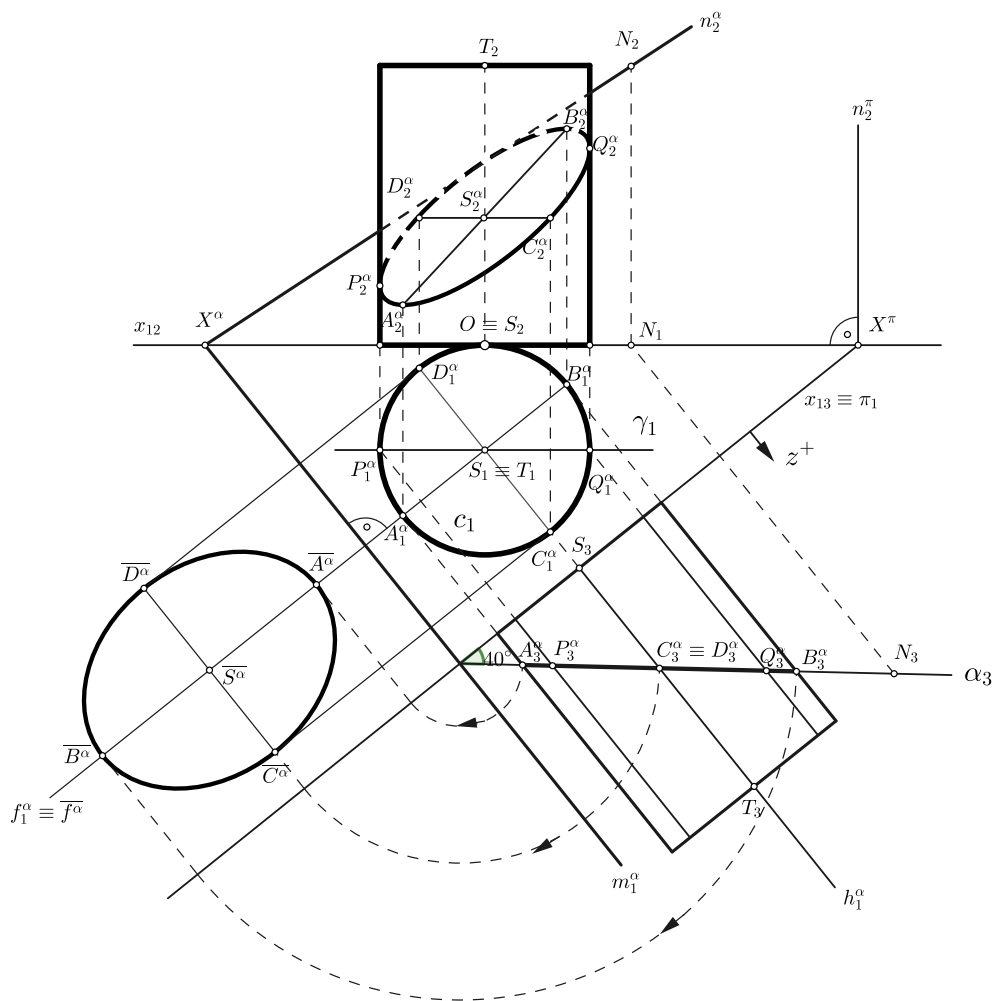
6. Намираме вторите проекции на осите на елипсата – $A_2^\alpha B_2^\alpha$ и $C_2^\alpha D_2^\alpha$. Получените две отсечки са спрегнати диаметри на втората проекция на елипсата. Осите на проекцията на сечението могат да се намерят с конструкцията на Риц.

7. Намираме точките, в които втората проекция на сечението се допира до контурните образувателни – P_2^α и Q_2^α , като използваме третите им проекции, и оформяме елипсата, като определяме видимостта.

8. За намиране на истинския вид на сечението извършваме склопяване на равнината до първа проекционна равнина.

За по-добра нагледност може решената задача да се изобрази в аксонометрия, като се използва полученото решение в монжова проекция.

Показаният на фиг. 2 метод за построяване на равнинно сечение на тяло е използван от доц. д-р Христо Пачев в преподавателската му работа, както и от авторите при изобразяване на сечения на пирамида и призма в (Radulov & Parvanova 2006) и (Radulov & Parvanova 2012).



Фигура 7

Благодарности

Всички чертежи, показани на фигурите, са изработени с помощта на GeoGebra.

REFERENCES

CHORBADGIEV, D., 1992. *Descriptive geometry*, UACG, (in Bulgarian).

- CHOBAN, M., MIHAYLOVA, E., PARVANOV, I., 2013. *About Methods of Constructing Plane Sections of Spatial Figures. Mathematics and Education in Mathematics*, Proceedings of the XLII Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovetz, pp. 337 – 343. http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom.2013/pdf/337-343.pdf
- KUNCHEV, M., MITEV, T., 2022. *Application of Parallel Projection for Construction of the Section of a Prism with a Plane. Mathematics and Informatics*, vol. 65, no. 3, pp. 296 – 311, (in Bulgarian).
- PACHEV, H., 2000. *Descriptive geometry, examples and problems. Plane sections*, UACG (in Bulgarian).
- RADULOV, V., PARVANOV, I., 2006. *Descriptive geometry. Plane sections*, UACG, (in Bulgarian). ISBN 13978-954-724-031-5.
- RADULOV, V., PARVANOV, I., 2012. *Descriptive geometry. Plane sections*, Regalia 6, (in Bulgarian). ISBN 978-954-745-220-6.

ЛИТЕРАТУРА

- КУНЧЕВ, М., МИТЕВ, Т., 2022. *Приложение на успоредно проектиране за построяване на сечението на призма с равнина, Математика и информатика*, т. 65, № 3, стр. 296 – 311.
- ПАЧЕВ, Х., 2000, *Дескриптивна геометрия в примери и задачи, Равнинни сечения*, УАСГ.
- РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., 2006. *Ръководство по дескриптивна геометрия. Равнинни сечения*, УАСГ. ISBN 13978-954-724-031-5
- РАДУЛОВ, В., ПЪРВАНОВА, И., 2012. *Ръководство по дескриптивна геометрия. Равнинни сечения*, Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
- ЧОРБАДЖИЕВ, Д., 1992. *Дескриптивна геометрия*, УАСГ.

METHODS FOR CONSTRUCTION OF PLANE SECTIONS OF A CIRCULAR CYLINDER

Abstract. The article discusses methods of drawing plane sections of a circular cylinder with a plane in Axonometric and Monge projection. The main problem used in these methods is the one of finding an intersection of a line and a plane. The ways to find the intersection depend on the setting of the secant plane.

Keywords: descriptive geometry; parallel projection; plane section; circle cylinder

✉ **Irena Parvanova, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0009-0001-3278-0625

Department of Applied Mathematics and Informatics

Technical University of Sofia

8, Kl. Ohridski Blvd.

Sofia, Bulgaria

E-mail: irena.parvanova@tu-sofia.bg

✉ **Dr. Vencislav Radulov, Chief Assist. Prof.**

ORCID iD 0009-0007-1687-457X

Faculty of Mining Electromechanics

University of Mining and Geology

Sofia, Bulgaria

E-mail: v.radulov@mgu.bg