

МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ СОФИЗМИ И ИЗПОЛЗВАНЕТО ИМ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО АЛГЕБРА

Камелия Колева

Национален военен университет „Васил Левски“

Резюме. Математическите софизми са такива твърдения, в доказателството на които се допускат умишлено незабележими, а понякога и доста тънки грешки. Чрез тях се цели повишаване на интереса и вниманието на учениците към учебното съдържание и правилното и трайно овладяване на математическите понятия и твърдения. Накратко се обясняват връзките между *софизми*, *парадокси* и *паралогизми*, както и различни понятия за софизъм в англоезичната литература (sophism, fallacy). Във връзка с разглежданата тематика се представят и така наречените *математически бисери* (howlers) и примери за тях. Представени са примери за използване на софизми в училищния курс по алгебра, съобразени с актуалните програми по математика.

Ключови думи: софизми; грешка; математика; алгебра; преподаване; парадокс

„Ако се сблъскаме с парадокс, вероятно можем да спасим структурата на математиката, като я проследим.“

А. Глисън

„Софизмите, подобно на призраците, не издържат на светлината.“

Е. И. Игнатев

„ $1 + 1 = 3$ за големи стойности на 1 .“

Ученическа шега

1. Въведение и исторически бележки

Етимологията на понятието *софизъм* се свързва, от една страна, с гръцката дума σοφία (sophisma, sophos), която буквално означава мъдрост, а в преносен – „майсторство, умение, хитро изобретение, главоблъсканица“. В исторически план, софизмите се появяват още през V в. пр. Хр. в Древна Гърция,

когато тя се намира в период на политически, културен и стопански разцвет след прочутите гръко-персийски войни. Тогава софистите – платени пътуващи учители по мъдрост, преподавали философия, логика и по-специално реторика. Тяхната дейност оказвала благоприятно значение за културния живот на Древна Гърция чрез прехода от космологическата проблематика към социално-антропологическата. Във връзка с потребностите на монолога и културата на диалога софистите започнали да обръщат все по-голямо значение върху техниката на спора чрез използването на различни психологически или логически уловки (софизми). Последните давали възможност на софистите да постигнат една от основните си задачи – да докажат (потвърдят или опровергаят) всичко, което им е угодно, да излязат победители от всеки интелектуален спор. В представите на софистите умението да спориш, означава „да заставиш слабия аргумент да стане по-добър“ (Boteva-Popova, 1993: 13). С тези идеи се свързва и „критерият за основание“ на Протагор, че „мнението на човека е мярка за истината“.

Още древните философи Платон и Аристотел придавали негативен смисъл на софистиката, считайки я за мнима (привидна) мъдрост – учение, което не може да достигне до големи и смислени творчески постижения. Понякога античната софистика се представя като „жалка издънка на философията на древните гърци или просто като празнословие, използвано като средство за заблуждаване“ (Radev, 1988: 179).

Понятието софизъм, от своето възникване до наши дни, е променяло своето значение си. Най-общо под *софизъм* се разбира мнимо доказателство, в което обосноваването на заключенията се поражда от чисто субективни впечатления, предизвикани от недостатъчен логически или семантичен анализ, или накратко – умишлено нарушаване на законите на логиката; хитро и умело извъртане. Малко по-конкретно съвременната трактовка на софизъм може да се обобщи като: „умишлено неправилно умозаключение, което изглежда формално коректно, но всъщност съдържа фина грешка или недостатък“ (Klymchuk & Staples, 2013: 3). Или накратко, *софизмът* е грешно доказателство на невярно твърдение.

Понятието софизъм трябва да се разграничава от понятията *паралогизъм* и *парадокс*. Паралогизмите спадат към непреднамерените, случайните или неосъзнати логически грешки за разлика от преднамерените логически грешки при софизмите. В превод от древногръцки *паралогизъм* означава „неправилно разсъждение вследствие на неосъзнато нарушаване правилата на логиката“ (Ruzavin, 1997). Думата *парадокс* произлиза от гръцката дума *παράδοξος* (*paradoxon*), което буквално преведено означава неочакван. Парадоксите се отличават от паралогизмите и софизмите по това, че те възникват не в резултат на грешки (преднамерени или непреднамерени). Те са следствие от неяснота, неопределеност или противоречивост на някои изходни принципи

и понятия в някоя наука, или общоприети норми, начини и методи на познание, като цяло. Накратко *парадоксът* е „истина, обърната с главата надолу“ (Smullyan, 1978: 182) или неочаквано (странно) твърдение. От древността до наши дни са достигнали редица парадокси, като „парадокс на лъжеца“, „парадокс на Протагор“, „парадокс на бръснаря“ (Smullyan, 1978) и др. Твърдението на Сократ „Аз знам, че нищо не знам“ е класически парадокс в логиката. Един от най-древните парадокси – на Евбулид, наречен „рогат“, гласи: „Това, което не си загубил, го имаш. Рога не си губил. Следователно ти си рогат“. В последното твърдение се крие логическа грешка и често се отнася и към софизмите.

2. Софизмите в математиката

Софизмите имат удивително приложение в математиката. Известният популяризатор на математика Мартин Гарднер посочва: „Всяка област на математиката – от простата аритметика до съвременната теоретико-множествена топология – има собствени псевдодоказателства, свои софизми. В най-добрите от тях разсъжденията с щателно замаскирани грешки позволяват да се достигне до най-невероятни заключения“ (Gardner, 1961: 112). М. Гарднер разграничава понятията математически софизъм и математически парадокс по следния начин (Gardner, 1961: 112):

→ „*математическият парадокс* може да се определи като истина, дотолкова противоречаща на нашия опит, интуиция и здрав смисъл, че в нея е трудно да се повярва даже след като сме проверили нейното доказателство стъпка по стъпка“;

→ *математическият софизъм* е „не по-малко удивително твърдение, в чието доказателство се крият незабележими, а понякога и доста тънки грешки“.

В (Klymchuk & Staples, 2013: 2) математическият парадокс се разграничава от математическия софизъм, като се разглежда в смисъл на „изненадващо, неочаквано, контраинтуитивно твърдение, което изглежда невалидно, но всъщност е вярно“. Това разграничение позволява на авторите да класифицират като софизми известния парадокс на Зенон за Ахил и костенурката и парадокса на колелото на Аристотел.

В (Zhecheva & Petrov, 2018: 7) се дава подробно определение за *математически софизъм*, което ни насочва и към възможните грешки в него: „умишлено, преднамерено, невярно умозаключение, което на пръв поглед ни изглежда правилно. До него се стига, като се извършват математически действия, без да са налице условията, при които те могат да се извършват, като се правят неправилни аналогии, като се смесват някои понятия, като се предлагат неточни чертежи, изобщо, като се пропускат редица промеждутъчни звена във веригата на логическите разсъждения под предлог, че пропуснатото е вярно, съвсем ясно, очевидно – а грешката се намира често точно там и затова в изложението на „доказателството“ не може да се открие“.

От спецификата на понятията парадокс и софизъм, а и от прегледа на литературните източници по темата е ясно, че не може да се сложи рязка граница между тези две понятия: в някои случаи двете се разглеждат като синоними, а в други едното понятие може би неправилно (или правилно) се заменя с другото. В подкрепа ще добавим, че в проучената литература на английски език за математически софизми освен думата *sophism* (Klymchuk & Staples, 2013) по-често се използва и думата *fallacy* (Maxwell, 1963; Bunch, 1982; Posamentier, 2003; Aberdein, 2010). В статията (Dufour, 2016) подробно се разглеждат разликите между *sophism* и *fallacy*¹. По-детайлното изучаване на математическите заблуди (*fallacies*) дава възможност те да се разглеждат в контекста на схеми за аргументиране, използвани по неправилен начин, или накратко – като вид грешни аргументи (Aberdein, 2010; Dufour, 2016). В тази връзка, софизмите се превръщат в изключително мощно средство за разбиране на математическите разсъждения, било то формални или неформални. В (Hansen, 2002: 134) се дава определение за *fallacy* като „аргумент, който изглежда верен, но не е така“ с трите му основни компонента: онтологичен, логически и психологически. Разглеждат се в исторически аспект промените в това определение, като се започне от Аристотел и се стигне до австралийския философ, логик и пионер в областта на компютрите Чарлз Хъмблин. Изследванията в тази посока водят до изграждане и по-задълбочено развитие на теорията на грешките (*fallacy theory*) или теорията на грешния аргумент. За смисловото многообразие на разглежданата проблематика говори и феноменът на правилните отговори, които са резултат от неправилни методи. Става дума за така наречените *математически бисери* (*howlers*²) (Maxwell, 1963; Aberdein, 2010; Posamentier, 2003). Разглеждат се като груба и смешна грешка, която води невинно към правилен резултат. Един много разпространен пример за математически бисер е свързан с делението на дроби (Maxwell, 1963):

$$\frac{16}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}.$$

3. Софизмите в училищния курс по математика

Изучаването на множество неочаквани и интересни софизми (и/или парадокси) от историята на математиката ни помага да разберем, че много често именно тяхното разрешаване е давало тласък за нови открития и постижения. В същото време, можем да открием в нова светлина тяхното място в образованието в днешния силно глобализиран и технологизиран свят. „Наблюденията показват, че когато един човек е овладял някои подходи и методи, характерни за математическото мислене, той пренася в една или в друга степен придобития стил на разсъждения и в нематематически области“ (Ganchev, Kolyagin, Kuchinov, Portev & Sidorov, 1996: 58). Някои от по-важните ползи от включването на софизми в уроците по математика са следните.

1) Бързите темпове на развитие на всички сфери на живота днес изискват от младите хора бързо и адекватно да вземат аргументирани решения в разнообразни и непознати ситуации. Неслучайно първият основен приоритет на Стратегията на ЕС „Европа 2020“ е *интелигентен растеж*, способстващ за „изграждане на икономика, основаваща се на знания и иновации“⁽³⁾. В тази връзка, използването на софизми в часовете по математика позволява да се развият и усъвършенстват някои от така наречените „ключови умения на XXI век“⁽⁴⁾:

- *критичното мислене* – при анализиране, синтезиране, обосноваване, оценяване, проверка и прилагане на математическите факти при разрешаване на проблема – къде е допуснатата грешка в софизма;

- *математическата и научната грамотност*, свързани със задълбочено концептуално разбиране на научните факти, трайно и задълбочено осмисляне и усвояване на математическите понятия и твърдения в проблемната ситуация – ефектно „доказателство“ на очевидно неверен резултат; повишаване на вниманието към важните детайли в процеса на решаване на задачи;

- *уменията за учене* – разширяване на математическия кръгозор (и не само математическия) при разрешаване на софизма чрез овладяване на нови знания или актуализиране на стари;

- *креативността* – търсенето на грешката в софизма позволява да се надградят процедурното и алгоритмичното мислене, свързани с шаблонните училищни задачи, развиват се въображението, изобретателността, гъвкавост на мисленето. Анализът и откриването на грешката в софизма често са по-поучителни от прост разбор на „безгрешни“ задачи (Madera & Madera, 2003) или посочването на най-често допусканите математически грешки в различни сайтове⁵⁾. Както пише И. П. Павлов, „правилното разбиране на грешката е път към откритие“, към бъдещи изобретения и оригинални решения;

- *умението за личностно развитие* – нестандартният характер на софизма привлича и задържа вниманието на обучаемия, активизира позитивното мислене и мотивацията за овладяване на нови знания и умения за постигане на поставените цели. „Творческият процес има ярко изразена личностна мотивационна организация (персонална активност, амбиции и самосъзнание)“ (Petrov, 2003: 86); развива се рефлексията в основните ѝ прояви, като:

- „интелектуална рефлексия“ при „конструиране на плана, схемата, модела, по който ще се реши една проблемна и достатъчно сложна задача; мислено забягване напред в процеса на познавателното действие, при което субектът внимателно отчита и прилага своите лични познавателни възможности...“ (Vasilev, Dimova & Kolarova-Kancheva, 2005: 52);

- „праксиологическа рефлексия“ като „умение на субекта да мобилизира, организира или реорганизира своите опознати знания, умения и способности при решаването на определена професионална или житейска ситуация“ (Vasilev, Dimova & Kolarova-Kancheva, 2005: 64 – 65).

2) Чрез софизмите се реализират междупредметните връзки между математика, философия, логика, реторика. „Софистите полагат основите на науката за спора, като дял от реториката и обект на теория на аргументацията, защото не игнорират логиката, естетиката, етиката, психологията и философията на спора“ (Boteva-Popova, 1993: 13). Ясното разбиране на причините за грешката в софизма е път към правилното осмисляне на математиката като достатъчно сериозно средство за опознаване на света, на постиженията ѝ и разглеждането ѝ в цялостност.

3) Софизмите водят до постигане на хармония между познание и развлечение, рационално и емоционално – „лъжливите“ доказателства извеждат обучаемия от „летаргията“ на формален слушател в час (Beukov, 1984b) и показват, че математиката е „жива наука“, а не скучен и неразбираем сбор от закостенели догми. „Подобно на другите естествени науки, математиката е игра, в която играем с окръжаващия ни свят, с Вселената. Най-добрите математици са и най-добрите преподаватели – очевидно хора, които са запознати с нейните правила, а също получават удоволствие от самия процес на игра... И не познавам по-добър начин да се прави това, особено сред хората, изучаващи математика, отколкото с игри, загадки, парадокси, фокуси и прочие весели атрибути от така наречената занимателна математика“ (Gardner, 1983: 7 – 8).

4) По-детайлното проучване на софизмите в синергетичен аспект (Koleva, 2018) дава възможност да потвърдим, че софизмите спадат към редица процеси и явления в образованието, „чийто вътрешен механизъм е синергетичен“ (Grozdev, 2002b). Хаосът в софизма, а впоследствие и хаосът в мисленето при първоначалното му възприемане, привежда хаотичната структура в ред след откриване на грешката (основен принцип в синергетиката). В тази връзка се проявяват и „организацията и самоорганизацията“ като основни компоненти „в управлението на възможностите на учениците и в самото решаване на задачи... Говорим за организация в случая на осъзнати дейности и действия, а за самоорганизация, когато дейностите и действията са неосъзнати (инстинктивни)“ (Grozdev, 2002a: 51).

5) Чрез активизиране на мисленето на обучаемите, тяхната логика и навици за правилно мислене софизмите ни насочват към по-внимателни и точни действия, към разумни и правилни аргументи, логически строго обосновани. В съвременния информационен свят е важно учениците да бъдат „въоръжени“ срещу лъжите и да не изпадат в ситуацията на „заблудени наивници“.

6) Математическите разсъждения са в основата на решаването на всяка математическа задача поради естеството на математиката. Способността да се правят логични разсъждения, да се търси правдоподобността на решението при софизмите, е от решаващо значение и в живота, тъй като може да се приложи и извън математическите контексти. Способността да се използват правдоподобни разсъждения, подобни на математическите, докато представяме нашите становища и анализираме мненията на другите, е от решаващо

значение за вземане на добре обосновани решения, необходими на конструктивни, заинтересовани, осъзнати и отговорни граждани. Математиката продължава да бъде основата за: икономическия растеж чрез науката, технологиите и инженерните науки като основа за иновации и за разбирането на света и за активната гражданска позиция в обществото⁶⁾.

4. Класификация на математическите софизми

Както споменахме по-рано, софизмът може да се преведе и като „главоблъсканица“. Ето защо от прегледа на публикациите, свързани със занимателна математика, се вижда, че в тях са включени софизми (парадокси) под една или друга форма. В голяма част от огромното си творчество, свързано с математически развлечения и игри, М. Гарднер включва и софизми. Например в (Gardner, 1961) – математически софизми от различни области и парадокси от теория на вероятностите; в (Gardner, 1983) – софизми, формулирани като геометрични заблуди; в (Gardner, 1974) – софизми в глава „Трудности и парадокси, свързани с безкрайни редове и понятието граница“. В (Ignatyev, 1982) глава 8 съдържа геометрични софизми и парадокси. В своята книга със занимателни задачи по алгебра Perelyman Ya. I. (Perelyman, 1967) представя няколко софизма под формата на „алгебрични и логаритмични комедии“. Авторът образно описва софизмите по следния начин: „Хуморът на подобни математически представления се крие в това, че грешката – достатъчно елементарна – е малко замаскирана и не се набива веднага на очи“ (Perelyman, 1967: 131).

В една част от специализираната литература за софизми се включват такива, в които формулировката им подсказва за тяхното математическо съдържание (Posamentier, 2003; Bunch, 1982). В по-голяма част от публикациите (Maxwell, 1963; Litcman, 1962; Klymchuk & Staples, 2013; Lyamin, 1911; Beykov, 1984 a; Beykov, 1984b) софизмите са класифицирани в групи според областта от математиката, чието съдържание включват: алгебра, геометрия, аритметика, планиметрия, диференциално и интегрално смятане, аналитична геометрия и др. В български онлайн сборник със задачи⁷⁾ класификацията на математическите софизми е на две нива – клас (от V до XII клас) и тема (според класификацията от учебните програми на МОН към 2017 г.), отнасяща се за съответния клас. В (Madera & Madera, 2003) – сборник за ученици от VII до XI клас, в основата на класификацията не са разделите от програмите по математика, а хомогенността на съдържанието на „доказваните“ твърдения. Целта на авторите е по-голяма свобода и интерес у читателя без стресиращия момент при връзка на задачите с учебника.

Смятаме, че нашите изследвания биха били от полза най-вече на учители, ученици и студенти, които ще преподават математика. В тази връзка, предлагаме класификацията на софизмите да е свързана с основните области от математиката, които се изучават в училищния курс: алгебра, геометрия и тригонометрия. На всеки от тези раздели предлагаме допълнителна (вторична)

класификация по класове и във всеки от класовете избираме софизъм, свързан с учебното съдържание по математика в актуалните към момента учебни програми на МОН⁸⁾. Заради обема тук предлагаме само софизми, свързани с алгебричното съдържание по математика. Следвайки предложената класификация, в следващи статии могат да бъдат включени софизми, свързани с геометрията и тригонометрията.

5. Алгебрични софизми в обучението по математика

Предмет на алгебра е изучаването на уравненията и на редица въпроси, които са се развили от теория на уравненията. От педагогически съображения обаче в училищния курс по алгебра се включват и въпроси, които по същество спадат по-скоро към аритметиката. Такива са например теорията на прогресиите и логаритмичните пресмятания.

V клас. Основно свойство на обикновените дроби, съкращаване на обикновени дроби

Софизъм 1. Ще „докажем“, че $2 \cdot 2 = 5$.

Да започнем с вярното числово равенство $4:4 = 5:5$. От него последователно се извършват преобразуванията:

$$4(1:1) = 5(1:1); 4 = 5.$$

Следователно от последното равенство имаме $2 \cdot 2 = 5$.

Обяснение. Грешната стъпка тук е представянето $4(1:1) = 5(1:1)$, което трябва да се замени с $\frac{4}{4} = \frac{5}{5} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{5}{5} \Rightarrow 1 = 1$.

Поради възрастовите и психологическите особености на учениците в V клас смятаме, че е рано често да се използват софизми. Вместо тях могат да се използват подходящи математически бисери с цел разнообразяване на учебното съдържание. Във връзка с учебното съдържание в софизъм 1 може да се посочи следният бисер.

Бисер 1. Един ученик трябвало да съкрати дробите: $\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$ и $\frac{49}{98} = \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Той получил верен резултат, но извършил грешни математически действия. Кои са те?

След представянето на бисер 1 веднага трябва да се дадат поне три-четири примера, в които подобно съкращаване на цифрите е неприложимо. След това трябва да се акцентира върху основното свойство на обикновените дроби при съкращаването им.

VI клас. Пропорции, свойства. Уравнения от вида $ax + b = 0$

Софизъм 2. Ще „докажем“, че $1 \neq 1$.

Нека е дадена пропорцията $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Като се използва основното свойство на пропорциите, че $a \cdot d = b \cdot c$, се извежда свойството:

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}.$$

Нека в пропорцията $\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$ неизвестното x е определено така, че да се изпълнява равенството. Тогава, като се приложи свойство (1), следва последователно:

$$\frac{3}{4} = \frac{(x+1)-3}{(x+2)-4};$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} = \frac{x-2}{x-2}.$$

След съкращаване в дясната страна на (2) се получава **1**, а вляво остава $\frac{3}{4} \neq 1$. Следователно **1** $\neq$ **1**.

Обяснение. В пропорцията $\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$, като се използва основното свойство на пропорциите, получаваме $4(x+1) = 3(x+2)$.

Като се преобразува последното равенство, се стига до уравнението $4x + 4 = 3x + 6$ с решение $x = 2$. Следователно, за да е изпълнена пропорцията $\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$, трябва $x = 2$. Грешката идва оттам, че поради специалния избор на пропорцията при намиране на решението на уравнението $x = 2$ и заместването му в (2) в дясната страна на равенството се получава не **1**, а дроб $\frac{0}{0}$, която няма смисъл. Ако се приложи аналогично свойство на (1) със събиране $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$, т.е. $\frac{3}{4} = \frac{(x+1)+3}{(x+2)+4}$, то тогава очевидно грешката в софизма изчезва.

Софизъм 3. Ше „докажем“, че 1 = 0.

Нека $x + 2 = 0$ и да разгледаме пропорцията $\frac{x+2}{x+2} = \frac{0}{x+2}$. В лявата страна се получава **1**, като съкратим, а отдясно имаме **0**. Т.е. получава се грешното равенство **1** = **0**.

Обяснение. Тук учениците сами трябва да се ориентират къде е грешката, след като използват софизъм 2. Грешката може да се обясни и с нарушаване на основното свойство на обикновените дроби: трябва да разделим числителя и знаменателя на дробта в лявата страна на едно и също число, различно от нула. А тук по условие $x + 2 = 0$.

VII клас. Формули за съкратено умножение. Дефиниционно множество (пропедевтика)

Софизъм 3 може да се разшири с новите знания от VII клас по следния начин.

Софизъм 4. Ше „докажем“, че 1 = 2 = 3 = 4.

По условие $x = 1$. Разглеждаме последователно дробите:

$$\frac{x-1}{x-1} = 1; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1; \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 \text{ и}$$

$$\frac{x^4-1}{x-1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = x^3+x^2+x+1.$$

След заместване във всяко от горните четири равенства с $x = 1$ получаваме $\frac{0}{0} = 1 = 2 = 3 = 4$.

Обяснение. При $x = 1$ всяка от четирите дроби не е дефинирана, следователно записът $\frac{0}{0}$ няма смисъл (недопустимо е да се получава).

Софизъм 5. Ще „докажем“, че $1 = 2$.

Нека $a = b$. Умножаваме двете му страни с a и получаваме $a^2 = ab$. Изваждаме b^2 от двете страни на последното равенство и имаме

$$(3) \quad a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

В (3) разлагаме двете му страни на множители (вляво прилагаме формула за съкратено умножение) и следва, че:

$$(4) \quad (a - b)(a + b) = b(a - b).$$

Делим двете страни на (4) с $(a - b)$ и се получава $a + b = a$. И тъй като сме предположили, че $a = b$, като заместим, имаме $a + a = a$ или преобразувано $2a = a$. В последното уравнение делим двете му страни на a и окончателно получаваме $2 = 1$.

Обяснение. Грешният ход при „доказателството“ на софизъм 5 е делението с $(a - b)$ в равенството (4). Тъй като сме предположили в началото, че $a = b$ следва, че $a - b = 0$, а делението на нула е недопустимо математическо действие. По този начин още в VII клас може да се извършва пропедевтика на важното понятие *дефиниционно множество на функция*.

Бисер 2. Един ученик трябвало да опрости дробта $\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$. Той съкратил степенния показател 2 в числител и знаменател и получил $\frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \frac{1+x}{1-x}$, при което резултатът бил верен. Къде е грешката в преобразуванията?

За да се затвърдят формулите за съкратено умножение и съкращаването на обикновени дроби, се дават няколко подходящи примера, като $\frac{(2+x)^2}{4-x^2}$, $\frac{3+x^2}{(3-x)^2}$ и т.н., в които бисер 2 е неприложим.

VII клас. Уравнения от вида $(ax + b)(cx + d) = 0$ и свеждащи се към линейни

Бисер 3. Един ученик решил уравнението $(x + 2)(3 - x) = 4$ по следния начин:

$$x + 2 = 4 \text{ или } 3 - x = 4;$$

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = -1.$$

След като направил проверка с получените корени: $(2+2)(3-2) = 4 \cdot 1 = 4$ и $(-1+2)[3-(-1)] = 1 \cdot 4 = 4$, установил, че е работил вярно. Къде греши обаче?

Дават се няколко контрапримера на бисер 3: $(x+3)(4-x) = 1$; $(x-1)(x+1) = 2$ и др. След това същите примери се модифицират като $(x+3)(4-x) = 0$; $(x-1)(x+1) = 0$ и т.н. По този начин трябва да се затвърди решаването на уравнения от вида $(ax+b)(cx+d) = 0$.

VII клас. Числови неравенства. Свойства. Линейно неравенство с едно неизвестно

Софизъм 6. Ще „докажем“, че $0 > 2$.

Нека n е произволно естествено число. Тогава $n+1 > n$. Умножаваме двете страни на неравенството с числото (-2) и получаваме последователно:

$$\begin{aligned} (5) \quad & -2(n+1) > -2n; \\ & -2n-2 > -2n; \\ & 2n-2n > 2. \end{aligned}$$

Окончателно стигаме до невярното неравенство $0 > 2$.

Обяснение. Грешката е в ред (5) поради неправилното приложение на едно от основните свойства на числовите неравенства, при което знакът на неравенството (посоката му) трябва да се обърне, т.е. $-2(n+1) < -2n$, след което грешката изчезва.

VIII клас. Дробни уравнения, свеждащи се до линейни или квадратни. Дефиниционно множество на рационални дроби

Софизъм 7. Ще „докажем“, че $2 = 7$.

При решаване на уравнението $\frac{3x^2-15x+18}{2x-4} = \frac{3x^2-15x+18}{x^2+3x-10}$ понеже числителите на двете дроби в равенството са равни, следва, че и знаменателите трябва да са равни, т.е. $2x-4 = x^2+3x-10$. След преобразуване получаваме квадратното уравнение $x^2+x-6=0$ с корени $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Чрез разлагане на квадратните тричлени на множители първоначалното уравнение е еквивалентно на:

$$(6) \quad \frac{3(x-3)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{3(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+5)}.$$

След съкращаване на дробите в двете страни на (6) на общите множители $(x-2)$ и 3 стигаме до уравнението

$$(7) \quad \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{x+5}.$$

След като заместим с x_1 и x_2 в (7), следва съответно:

$$\text{– при } x_1 = -3 \text{ имаме } \frac{-3-3}{2} = \frac{-3-3}{-3+5} \Rightarrow -3 = -3;$$

– при $x_2 = 2$ следва $\frac{2-3}{2} = \frac{2-3}{2+5} \Rightarrow 2 = 7$.

Обяснение. При изясняване на грешката, допусната в софизма, е важно да се обърне внимание върху понятието дефиниционно множество (допустими/недопустими стойности) на дробни рационални изрази. От (6) веднага следва, че $x = 2$ и $x = -5$ са недопустими стойности за дробното уравнение. Всъщност извършеното съкращаване в (6) е възможно точно при $x \neq 2$ и $x \neq -5$. При тези условия привеждаме под общ знаменател в (7) и получаваме квадратното уравнение $x^2 = 9$ с корени $x_{1,2} = \pm 3$.

VIII клас. Квадратен корен. Свойства

Софизъм 8. Ще „докажем“, че $2 = 3$.

Да започнем с вярното числово равенство $4 - 10 = 9 - 15$. Прибавяме към двете му страни $\frac{25}{4}$, получаваме равенството $4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$.

Прилагаме за двете му страни формула за съкратено умножение и имаме

$$(8) \quad \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Като приложим квадратен корен към двете страни на (8) последователно, получаваме:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2};$$

$$2 = 3.$$

Обяснение. Грешката е в неправилното приложение на свойство на квадратния корен, а именно $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{ако } x \geq 0, \\ -x, & \text{ако } x < 0. \end{cases}$

Тогава, като се коренува (8), трябва да се получи

$$\left|2 - \frac{5}{2}\right| = \left|3 - \frac{5}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

IX клас. Системи линейни уравнения с две неизвестни. Графика на линейна функция

Софизъм 9. Ще „докажем“, че $9 = 2$.

Решаваме системата $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 3 - \frac{y}{3} \end{cases}$ чрез заместване (на неизвестното x от второто уравнение в първото) получаваме $\begin{cases} 3\left(3 - \frac{y}{3}\right) + y = 2 \\ x = 3 - \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - y + y = 2 \\ x = 3 - \frac{y}{3} \end{cases}$.

Следователно от първото уравнение следва абсурдният резултат $9 = 2$.

Обяснение. При преобразуване на второто уравнение в първоначалната система се стига до еквивалентната система $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$, която очевидно няма решение. Тук по-интересна е геометричната интерпретация на решаването на системата. Като се използват знанията за графика на линейна функция, се начертават двете прави, представящи линейните функции на системата: $y = 2 - 3x$ и $y = 9 - 3x$. Така учениците се убеждават нагледно, че системата няма решение поради успоредност на двете прави.

IX клас. Дробни неравенства

Софизъм 10. Ще „докажем“, че $0 \geq 1$ или $0 \geq 1; \frac{1}{2} \geq 1; \frac{2}{3} \geq 1; \dots$

Нека е дадено неравенството $\frac{x}{x+1} \geq 1$.

Един ученик го решил така: $\frac{x}{x+1} \geq 1 \Rightarrow x \geq x+1 \Rightarrow 0 \geq 1$.

Втори ученик стигнал до решението чрез последователните преобразувания:

$$\frac{x}{x+1} \geq 1; \frac{x}{x+1} - 1 \geq 0; \frac{x-x-1}{x+1} \geq 0; \frac{-1}{x+1} \geq 0; x+1 \geq 0; x \geq -1.$$

След като направил проверка в първоначалното неравенство, вторият ученик получил:

$$x = -1 \Rightarrow \frac{-1}{0} \geq 1; x = 0 \Rightarrow \frac{0}{1} = 0 \geq 1; x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq 1; x = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \geq 1; \dots$$

Обяснение. При изясняване на допуснатите грешки в софизма трябва да се акцентира върху:

- допустимите стойности на рационалните дроби, участващи в неравенството (и при двамата ученици не са определени);
- знаменателят не се премахва (грешка при първия ученик);
- свойство на числовите неравенства, че при умножаване с отрицателно число се променя посоката на неравенството (грешка при втория ученик).

Вярното решаване на неравенството се получава от веригата тъждествени преобразувания:

$$\frac{x}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

X клас. Ирационални уравнения с един квадратен радикал

Софизъм 11. Ще „докажем“, че $16 = 0$.

Да се реши уравнението $2\sqrt{x+5} + x - 3 = 0$. Извършваме последователно преобразуванията:

$$2\sqrt{x+5} = 3 - x; \quad (2\sqrt{x+5})^2 = (3-x)^2; \quad 4x + 20 = 9 - 6x + x^2; \\ x^2 - 10x - 11 = 0; \quad x_1 = 11 \text{ и } x_2 = -1.$$

След като заместим с първия корен в първоначалното уравнение, имаме $2\sqrt{16} + 11 - 3 = 0 \Rightarrow 16 = 0$. Вторият корен очевидно удовлетворява даденото уравнение.

Обяснение. За да не се стига до подобни неверни резултати, е важно да се акцентира върху следните важни компетентности на ученика при решаването на ирационални уравнения:

- може да определя допустими стойности на ирационален израз;
- може да извършва тъждествени преобразувания на ирационални изрази;
- разбира смисъла на релациите „следва“ и „еквивалентност“ при преобразуването на уравнението и свързаните с това „чужди“ корени.

Повдигането на квадрат не е тъждествено преобразуване, при което се получава уравнение – следствие на първоначалното, което води до чуждия корен $x_1 = 11$. За да се реши вярно ирационалното уравнение, последователно се извършва:

- определят се допустимите стойности за ирационалния израз, т.е. $x \geq -5$;
- при повдигането на квадрат, за да са еквивалентни преобразуванията в уравнението, дясната страна трябва да е положителна, т.е. $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$;
- допустимите стойности на уравнението са $x \in [-5; 3]$;
- след решаване на квадратното уравнение и съпоставяне с допустимите стойности се заключава, че $x_1 = 11$ не е корен.

XI клас. Показателна функция

Софизъм 12. Ще „докажем“, че $-3 = 3$.

Нека $a = -3$, $m = 2$ и $n = \frac{1}{2}$. За тези стойности прилагаме свойство на показателната функция, че $(a^m)^n = a^{mn}$ и получаваме $-3 = ((-3)^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Обяснение. Показателната функция е дефинирана при $a > 0$, $a \neq 1$ и при тези стойности е изпълнено $(a^m)^n = a^{mn}$.

XI клас. Логаритъм. Основни свойства. Сравняване на логаритми

Софизъм 13. Ще „докажем“, че $-2 > 0$.

Да тръгнем от вярното неравенство $9 > 1$. Логаритмуваме двете му страни при основа $\frac{1}{3}$ и получаваме

$$(9) \log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 1.$$

Като използваме свойствата на логаритмите ($\log_b^n a^m = \frac{m}{n} \log_b a$; $\log_b b = 1$ и $\log_b 1 = 0$, при $a, b > 0, b \neq 1$), имаме последователно:

$$\log_{3^{-1}} 3^2 > \log_{\frac{1}{3}} 1; -2 \log_3 3 > 0; -2 > 0.$$

Обяснение. При $0 < b < 1$ логаритмичната функция $\log_b x$ е намаляваща, следователно посоката на (9) трябва да се обърне, т.е. $\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} 1$. Като се приложат същите преобразувания за двете страни на последното неравенство, решението на софизма е налице $-2 < 0$.

Софизъм 14. Ще „докажем“, че $b^0 \neq 1$.

Нека $b \neq 0$ е произволно число. Тъй като $\log_b 1 = 0$, получаваме

$$(10) \log_b 1 = \log_b (-1)^2 = 2 \log_b (-1) = 0.$$

Следователно $\log_b (-1) = 0$. Тогава от последното равенство, чрез определението за логаритъм, се получава $b^0 = -1 \neq 1$.

Обяснение. В софизма се съдържат следните грешки:

1) Основата на логаритъма е не всяко число $b \neq 0$, а число, отговарящо на условията $b > 0$ и $b \neq 1$.

2) Свойството $\log_b a^m = m \log_b |a|$, при m – четно, е приложено неправилно в (10) и следователно трябва да се запише във вида $\log_b (-1)^2 = 2 \log_b |-1| = 2 \log_b 1 = 0$. Така софизмът е разрешен.

XII клас. Модулни уравнения от вида $|ax^2 + bx + c| = m$

Софизъм 15. Ще „докажем“, че $2 = -2$.

Да решим уравнението $|x^2 - 2| = -2$. Последователно извършваме действията:

$$x^2 - 2 = -2 \text{ или } x^2 - 2 = +2;$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ и } x^2 = 4 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2.$$

Заместваме с $x_1 = 0$ в даденото уравнение и получаваме $|0^2 - 2| = |-2| = 2 = -2$. Аналогично се получава и при проверка с $x_{2,3}$.

Обяснение. Грешката в софизма следва от пренебрегване на дефиницията на модул, при което още от условието се вижда, че уравнението няма решение, тъй като модулът не може да бъде отрицателен. Решените две уравнения не са еквивалентни на даденото и трите корена са чужди.

ХІІ клас. Логаритмични уравнения

Софизъм 16. Съществува логаритъм от отрицателни числа.

Дадено е уравнението $\lg(x - 3) + \lg x = 1$. Прилагаме свойство на логаритмите в лявата страна и получаваме

$$(11) \lg[(x - 3)x] = 1.$$

Определяме дефиниционното множество на логаритмичната функция в лявата страна на (11): $x(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$. От дефиницията на логаритъм (11) се преобразува в квадратното уравнение $10^1 = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$ с решения $x_1 = 5$ и $x_2 = -2$. Проведим проверка с първия корен в първоначалното уравнение и получаваме вярното числово равенство $\lg(5 - 3) + \lg 5 = 1 \Leftrightarrow \lg 10 = 1$. При заместване с втория корен получаваме $\lg(-5) + \lg(-2) = 1$, въпреки че очевидно и двата корена са от допустимите стойности на уравнението.

Обяснение. Дефиниционното множество не е определено правилно. За целта трябва да се реши системата $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откъдето допустимите стойности за уравнението се вижда, че са $x \in (3; \infty)$. По този начин следва, че $x_2 = -2$ не е решение и така софизмът е „осветлен“.

6. Заключение

Основен житейски принцип е човек да се учи от грешките си. Каква по-хубава реализация при софизмите: да научиш законите на математиката по пътя на откриване на „замаскираната“ грешка, да я осъзнаеш и да не я повтаряш. Софизмите са подходящо средство, подпомагащо учениците да се научат да дават разумни аргументи и да са сигурни, че те са правилни – математически строги, основани на солидна теория и достатъчно силни да издържат на критиките. Това подпомага развиването на някои от основните компетентности, свързани с приемане на различни гледни точки, реализиране на независими преценки и поемане на отговорност за собствените действия⁹⁾.

БЕЛЕЖКИ

1. Авторът на статията подробно разглежда в исторически аспект откога и как започват да се различават понятията *sophism* и *fallacy*. В книгите до към XIX в. двете думи са синоними. Основната тенденция да се прави разлика между тях, тръгва от намерението да се заблуди и в този смисъл накратко *sophism* се тълкува като преднамерен, а *fallacy* – непреднамерен. Още в древността Аристотел проправя път, като се занимава с преднамерени грешни аргументи в своите произведения. Той предупреждава, че ако човек не е достатъчно внимателен, може да се самозаблуди с паралогизъм по време на саморефлексия. Имануел

Кант също подкрепя разграничаването на *sophism* и *fallacy* въз основа на волята за измама. Той разграничава понятията *fallacy*, паралогизъм и *sophism* по следния начин: силогизъм във вид, правилен за него, но грешен от гледна точка на формата, е *fallacy*; силогизъм от такъв вид, когато човек мами себе си, е паралогизъм; и когато се опитва да измами другите, е *sophism*. Накратко, според Кант паралогизъм и *sophism* са подкатегории на *fallacy*.

2. В (Bunch, 1982) за обозначаване на бисер се използва и терминът *fallacy*, а в (Litman, 1962: 73) се разглежда като особен тип софизъм.
3. Стратегия за интелигентен, устойчив и приобщаващ растеж „Европа 2020“, МОН, достъпна на 22 март, 2019 от:
https://www.mon.bg/upload/6574/europe2020_bg.pdf.
4. Наръчник „Как да развиваме умения на XXI век в час“, от учители за учители, създаден по програмата „Заедно в час“ в рамките на проекта „Функционална грамотност за XXI век: инструменти за оценка и методи на преподаване“, Издание на фондация „Заедно в час“, София, 2016. Достъпен на 22 март, 2019 от:
<http://21stcenturyskills.info/wp-content/uploads/2016/03/Skills-Guidebook-web-Umeniya-na-21-vek.pdf>.
5. Common Math Errors, Retrieved March 22, 2019 from
<http://tutorial.math.lamar.edu/Extras/CommonErrors/CommonMathErrors.aspx>;
The most Common Errors in Undergraduate Mathematics, Retrieved March 22, 2019 from <https://math.vanderbilt.edu/schectex/commerrs/>.
6. Mahajan, S. et al. PISA Mathematics in 2021, center for Curriculum redesign, Retrieved March 22, 2019 from <https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-final-extended-version-with-examples-ccr.pdf>.
7. Математически и ИТ софизми в помощ на учителя, достъпни на 22 март, 2019 от: <https://sofizmi.cphpvb.net>.
8. Имаме предвид и програмите по математика за X, XI и XII клас, които влизат в сила поэтапно от учебната 2019/2020 година и след това.
9. OECD (2005), The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary, OECD, Paris, Retrieved March 22, 2019 from <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>.

ЛИТЕРАТУРА

- Aberdein, A. (2010). Observations on sick mathematics. In B. Van Kerkhove, J. P. Van Bendegem, & J. De Vuyst (Eds.), *Philosophical perspectives on mathematical practice*. London: College Publications, 269 – 300.
- Бейков, М. (1984 а). Използване на някои софизми за активизиране на обучението по алгебра. *Обучението по математика*, 3.
- Бейков, М. (1984 б). Използване на някои софизми за активизиране на обучението по геометрия. *Обучението по математика*, 5.

- Ботева-Попова, М. (1993). *Диалогът от Сократ до днес*. Велико Търново: Абагар.
- Dufour, M. (2016). *On the difference between fallacy and sophism*. OSSA Conference Archive, 80.
- Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев & Ю. Сидоров (1996). *Методика на обучението по математика VIII – XI клас*, I част, София: Модул.
- Гарднер, М. (1974). *Математические новеллы*. Москва: Мир.
- Гарднер, М. (1999). *Математические головоломки и развлечения*. Москва: Мир.
- Гарднер, М. (1988). *Крестики-нолики*. Москва: Мир.
- Гроздев, С. (2002 а). Организация и самоорганизация при решаване на задачи. *Математика и информатика*, 6, 51 – 58.
- Гроздев, С. (2002 б). Синергетика на ученето. *Педагогика*, 7, 3 – 23.
- Hansen, H. V. (2002). The Straw Thing of Fallacy Theory: The Standard Definition of ‘Fallacy’. *Argumentation 16*. Kluwer Academic Publishers, 133 – 155.
- Игнатъев, Е. И. (1982). *В царстве смекалки*. Москва: Наука.
- Klymchuk, S. & S. Gulyaev (2017). *Selected puzzles, paradoxes and sophisms for tertiary STEM students*.
- Klymchuk, S. & S. Staples (2013). *Paradoxes and Sophisms in Calculus*. Washington: Mathematical Association of America, Inc.
- Колева, К. (2018). *Софизмите и синергетиката*. Научна конференция в памет на проф. д-р Марга Янкова Георгиева, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий”, (под печат).
- Литцман, В. (1962). *Где ошибка?* Москва: Физико-математической литературы.
- Лямин, А. А. (1911). *Математические парадоксы и интересные задачи для любителей математики*. Москва: Тип. Г. Лисснера и Д. Собко.
- Мадера, А. Г. & Д. А. Мадера (2003). *Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям*. Москва: Просвещение.
- Maxwell, E. A. (1963). *Fallacies in Mathematics*. Cambridge: The University Press.
- Перельман, Я. И. (1967). *Занимательная алгебра*. Москва: Наука.
- Петров, П. (2003). *Формиране на умения за решаване на задачи от училищния курс по математика*. Стара Загора: Кота.
- Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders to inspire teachers and students*. USA, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development Alexandria.
- Радев, Р. (1988). *Антична философия*. София: Наука и изкуство.
- Рузавин, Г. И. (1997). *Логика и аргументация, учебное пособие для вузов*. Москва: Юнити, культура и спорт.

- Смълян, Р. М. (1985). *Как се казва тази книга?* София: Народна просвета.
- Василев, В., Й. Димова & Т. Коларова-Кънчева (2005). *Рефлексия и обучение – I част*. Пловдив: Макрос.]
- Жечева, Ал. & Ф. Петров (2018). Онлайн сборник със задачи със софизми по математика, информатика и информационни технологии. *Математика, компютърни науки и образование*, 1, 7 – 11.

REFERENCES

- Aberdein, A. (2010). Observations on sick mathematics. In B. Van Kerkhove, J. P. Van Bendegem, & J. De Vuyst (Eds.), *Philosophical perspectives on mathematical practice*. London: College Publications, 269 – 300.
- Beykov, M. (1984 a). Using some sophisms to activate the teaching in algebra. *Mathematics Education*, 3.
- Beykov, M. (1984 b). Using some sophisms to activate the teaching in geometry. *Mathematics Education*, 5.
- Boteva-Popova, M. (1993). *Dialogue from Socrates till nowadays*. Veliko Tarnovo: Abagar.
- Bunch, B.H. (1982). *Mathematical Fallacies and Paradoxes*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.
- Dufour, M. (2016). *On the difference between fallacy and sophism*. OSSA Conference Archive, 80.
- Ganchev, Iv., Yu. Kolyagin, Y. Kuchinov, L. Portev & Yu. Sidorov (1996). *Methodology of Mathematics Education VIII – XI grades*, part I, Sofia: Modul.
- Gardner, M. (1974). *Mathematical Novels*. Moskva: Mir.
- Gardner, M. (1961). *Mathematical Puzzles and Diversions from Scientific American*. London: G. Bell and Sons Ltd.
- Gardner, M. (1983). *Wheels, life and other mathematical amusements*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Grozdev, S. (2002 a). Organization and Self-organization in the Mathematical Problem Solving. *Mathematics and Informatics*, 6, 51 – 58.
- Grozdev, S. (2002 b). Synergetics of Learning. *Pedagogy*, 7, 3 – 23.
- Hansen, H. V. (2002). The Straw Thing of Fallacy Theory: The Standard Definition of ‘Fallacy’. *Argumentation* 16. Kluwer Academic Publishers, 133 – 155.
- Ignatyev, E. I. (1982). *In the realm of ingenuity*. Moskva: Nauka.
- Klymchuk, S. & S. Gulyaev (2017). *Selected puzzles, paradoxes and sophisms for tertiary STEM students*.
- Klymchuk, S. & S. Staples (2013). *Paradoxes and Sophisms in Calculus*. Washington: Mathematical Association of America, Inc.

- Koleva, K. (2018). Fallacies and synergetics. Proc. of Conference in V. Tarnovo University „St. Ciril and St. Methodius“ in Memory of Prof. M. Georgieva, (in print).
- Litcman, V. (1962). *Where is the mistake?* Moskva: Fiziko-matematicheskoy literature.
- Lyamin, A. A. (1911). *Mathematical paradoxes and interesting problems for lovers of mathematics*. Moskva: Tip. G. Lissnera & D. Sobko.
- Madera, A. G. & D. A. Madera (2003). Mathematical sophisms: Plausible reasoning, leading to false statements. Moskva: Prosveshtenie.
- Maxwell, E. A. (1963). *Fallacies in Mathematics*. Cambridge: The University Press.
- Perelyman, Ya. I. (1967). *Entertaining algebra*. Moskva: Nauka.
- Petrov, P. (2003). *Forming skills for solving problems from Mathematics curriculum in schools*. Stara Zagora: Kota.
- Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders to inspire teachers and students*. USA, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development Alexandria.
- Radev, R. (1988). *Ancient philosophy*. Sofia: Nauka i Izkustvo.
- Ruzavin, G. I. (1997). *Logic and argumentation, textbook for universities*. Moskva: Yuniti, kultura i Sport.
- Smullyan, R.M. (1978). *What's the name of this book?* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Vasilev, V., Y. Dimova & T. Kolarova-Kancheva (2005). *Reflexion and Education – part I*. Plovdiv: Makros.
- Zhecheva, Al. & Ph. Petrov (2018). Online Collection of Sophism Problems in Mathematics, Informatics and Informational Technologies. *Mathematics, Computer Science and Education, 1*, 7 – 11.

MATHEMATICAL FALLACIES AND THEIR USE IN THE ALGEBRAIC CURRICULUM IN SCHOOLS

Abstract. Mathematical fallacies are such statements in the chains of arguments that cause subtle mistakes. Using them in the process of teaching Mathematics can contribute to increasing students' interest in learning the material as well as helping them acquire a firm and lasting knowledge in mathematical concepts and theorems. In brief, the connections between sophisms, paradoxes and paralogisms, as well as the differences between the terms „sophism” and „fallacy“, are explained. The so-called mathematical howlers and examples of them are presented in connection with the subject in consideration. This paper includes examples of the use of fallacies in the Algebraic curriculum in schools, in line with the current mathematics programs.

Keywords: sophism; fallacy; mathematics; algebra; teaching; paradox; howler

✉ **Dr. Kamelia Koleva, Senior Lecturer**
Land Forces Faculty
National Military University „Vassil Levski”
76, Bulgaria St.
5006 Veliko Turnovo, Bulgaria
E-mail: kameliabk@abv.bg