

МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРОЕКТИ В ДИНАМИЧНИ СРЕДИ

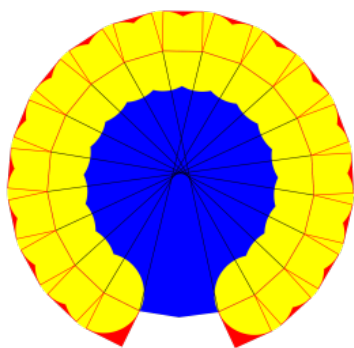
Ангел Гушев

Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново

Резюме. Целта на настоящата статия е да се покаже, че за използването на динамичен математически софтуер няма възрастови граници. Няма ограничения и в начините на използването му и дълбочината на постигнатите резултати. Единственото ограничение се крие в способностите и въображението на тези, които го използват.

Keywords: dynamic mathematical software; ways of use; depth of achievements

В началото представяме наблюдения върху работата на ученик, който в пети клас за пръв път се запознава с динамичния математически софтуер GeoGebra. В този момент ученикът вече притежава начална компютърна грамотност, включително умения за работа с Paint. Затова динамичният математически софтуер GeoGebra в началото е използван само като поле за рисуване. Въпреки това ученикът много бързо самостоятелно овладява инструментите на продукта и създава впечатляващи рисунки като тези на фигура 1.



Ветрило



Човешко лице

Фигура 1

В хода на заниманията и след поредица от експерименти за работата на различните инструменти обучаемият открива начини да включи динамика в рисунките. Първите динамични разработки са геометрични фигури, променящи положението си с движението на само една свободна точка. Постепенно ученикът осъзнава, че за да има динамика и част от обектите да се движат заедно с движението на дадена точка, то всички обекти трябва да са свързани с тази точка и следователно зависими от нея. Вдъхновени от интернет играта “Angry Birds”, се появяват поредица от динамични рисунки, в които различните птици летят и повтарят движенията и формата на събратята си от играта (фигура 2).



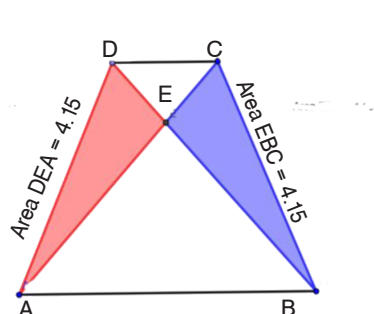
Кран

Фигура 2

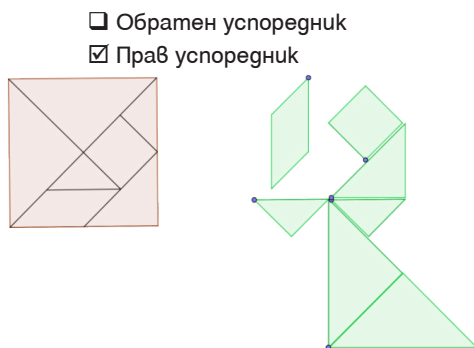
Angry Birds – Бомбата

Около два месеца след началото на учебната година, във връзка с решаване на задачи от школата по математика, се появява и необходимост от създаване на поле за експеримент. С негова помощ ученикът конструира непрости геометрични чертежи, добавя дължини на отсечки, мерки на ъгли, лица на фигури.

В началото на втория срок, използвайки натрупаните си знания, той прави поредица от опити да използва компютъра, за да нарежда любимата си логическа игра „Танграм“ (от седем различни по големина и форма геометрични фигури се съставят различни по форма фигури, една от които е голям квадрат). За постигане на целта се налага ученикът да бъде запознат с част от по-сложните инструменти на динамичната среда, като бутон за показване и скриване на обекти в чертожната повърхност, както и с някои твърдения по геометрия, изучавани в по-горните класове. Резултатът от работата може да се види на фигура 3.



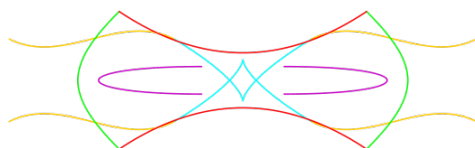
Задача за пеперудката



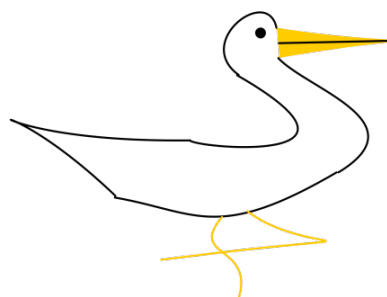
Дамата с огледалото – „Ганграм“

Фигура 3

Накрая ще разгледаме как нашият ученик успя да се ориентира в използването на съвсем нови за него и средата инструменти. Това са създадени от доц. д-р Веселин Гушев потребителски инструмент за изчертаване на криви на Безие от трети ред по четири точки, използвани при обучението на учители от СДК, както и на студентите от IV курс на специалност „Информатика“ във ФМИ на СУ по предмета „Компютърна графика“ един петокласник може да твори в GeoGebra – фигура 4.



Мотив за шевица



Щъркел

Фигура 4

Наблюдаваният ученик, поради многобройните си призови участия в състезания и олимпиади, не може да бъде наречен „средностатистически“. Затова не е редно да очакваме подобни резултати при работата с динамичен софтуер от произволно избрани ученици на същата възраст. По-скоро посочените наблюдения показват, че диапазонът в развитието на един необременен млад човек при срещата му с динамичния математически софтуер може да бъде

много голям. Все пак на този етап на обучение се очертават три различни етапа на използване на динамичния математически софтуер:

- като заместител на графичните програми – поле за рисуване;
- за създаване на динамични рисунки;
- за изследване на несложни конструкции, създаване на логически игри и т.н.

Изучаването на информационни технологии в прогимназиялния етап на основното образование е предпоставка в част от тези часове учениците да бъдат запознати с динамичен софтуер. Това ще бъде една добра основа за по-нататъшна работа в гимназиялния етап.

Ретроспекцията на създадения динамичен софтуер ще продължи не по времето на разработване на съответния продукт, а по това в кой клас на гимназиялния етап той може да се използва. Ако учебното съдържание се изучава в повече от един от класовете, обучението с динамичен софтуер ще бъде приложено там, където според автора е най-уместно.

Второто приложение, което ще разгледаме, е **„Електронен учебник по математика за осми клас“**. По-специално ще обърнем внимание на обучението, което беше проведено с този учебник в Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново.

В хода на съвместната работа бяха включени уроци от „Електронен учебник по математика за осми клас“ и в IX клас. Идеята беше да се направи паралел между знанията на учениците от IX клас, които са придобити без помощта на Електронния учебник, и тези на VIII клас.

Обучението се извършваше в класна стая, като през часа учителят ползваше както черната дъска, така и мултимедия. Серията от мултимедийни уроци беше съпроводена от контролни тестове: единия – непосредствено преди започване на електронното обучение, а другия – в края на работата.

За учениците от VIII клас изходният тест послужи за проверка на усвояването на новите знания от темата „Графика на функция“, докато в IX клас – за въведение към темата „Модулни уравнения. Параметрични модулни уравнения“.

В VIII клас тестът беше проведен с 25, а в IX клас – с 23 ученици. Той беше на хартиен носител и включваше 9 задачи, които учениците решаваха 40 минути.

Основните цели, които бяха поставени, са да се провери:

- доколко учениците са усвоили построението на линейна функция и познават ли нейните свойства;

$$(*) \ y = \begin{cases} f_1(x) & , x \in D_1 \\ M & , \text{където } \bigcup_{i=1}^n D_i = I, D_i \cap D_j = \emptyset; \\ f_n(x) & , x \in D_n \end{cases}$$

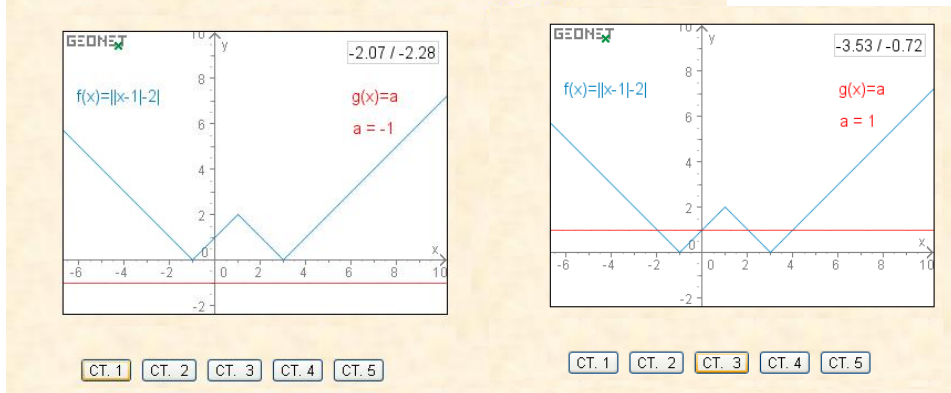
– могат ли да построяват графика в интервал I на функция от вида (*) – могат ли да прилагат трансформации от вида: $y = f(x) + c$ и $y = f(x + c)$, приложени върху графиката на функцията $y = |x|$.

Средният успех от теста на учениците от VIII клас бе „Много добър“ (4,83), а на IX клас – „Много добър“ (4,65), и не се различава от средния успех по математика на учениците до момента. Без да имаме претенции за представителност, може да кажем, че учениците:

- могат да построяват графика на линейна функция и познават нейните свойства;
- могат да построяват графика на функцията $y = |x|$ и $y = |x + c|$, но изпитват затруднения с трансформацията $y = |x + c|$;
- изпитват затруднения с построяването на функции от вид (*).

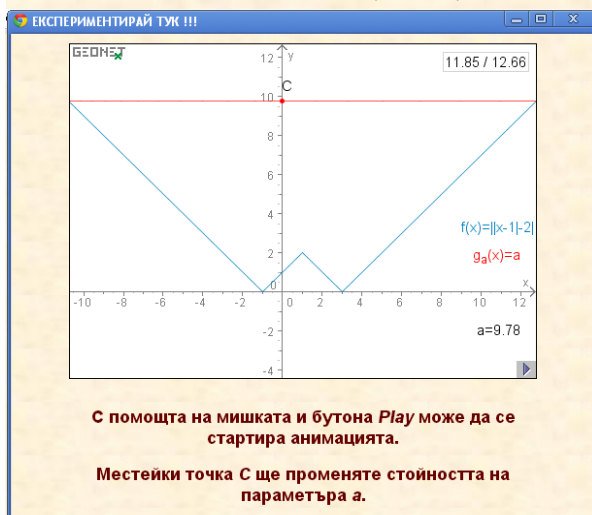
Основна причина за възникналите затруднения е в невъзможността за един учебен час да бъдат предадени и усвоени от учениците по-голям брой задачи от посочения тип. Необходимостта от използването на Електронния учебник се почувства най-вече при **решаването на модулни параметрични уравнения**. На фигури 5 и 6 са показани част от стъпките, през които минава решаването на дадена задача.

Задача 7. Да се определи броя на корените на уравнението $||x - 1| - 2| = a$ в зависимост от стойността на параметъра a .



Фигура 5

Задача 7. Да се определи броя на корените на уравнението $||x-1|-2|=a$ в зависимост от стойността на параметъра **a**.



Решение:

$$y_1 = ||x-1|-2| = \begin{cases} |x-3|, & x \geq 1 \\ |x+1|, & x < 1 \end{cases}$$

$$y_2 = a.$$

$$\text{Понеже } |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -x+3, & x < 3 \end{cases}$$

$$\text{а } |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases} \text{ полу-}$$

$$\text{чаваме } y_1 = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & 1 \leq x < 3 \\ x+1, & -1 \leq x < 1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$$

ЕКСПЕРИМЕНТИРАЙ

- Ако $a \in (-\infty, 0)$ уравнението няма решение;
- Ако $a = 0$ уравнението има две решения;
- Ако $a \in (0, 2)$ уравнението има четири решения;
- Ако $a = 2$ уравнението има три решения;
- Ако $a \in (2, +\infty)$ уравнението има две решения.

Фигура 6

Следващата разработка е продиктувана от решаването на конкретна задача, дадена на ЗМС във Варна през 2007 г. в XI клас.

В хода на обсъждане на решението в школата по математика учениците стигнаха не само до решението на конкретната задача, но и направиха редица обобщения. Впоследствие съставиха задача, която може да се реши само със знанията за VIII клас.

Направените разсъждения са в основата на разработеното уеб приложение, което представяме на фигури 7 и 8.

Задача: В триъгълник ABC , за който $\angle ACB = \gamma$, са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 пресича описаната около триъгълника окръжност в точки A_2 и B_2 . Точките I и O са съответно център на вписаната и център на описаната окръжност за $\triangle ABC$. Точката P е среда на A_1B_1 , точката Q е среда на A_2B_2 , а точката S е среда на дъгата AB , несъдържаща C .

а) Да се докаже, че S е точка от симетралата на AB и точка от ъглополовящата на $\angle ACB$;

б) Да се изрази чрез γ $\angle AIB$;

в) Да се определи при кои стойности на γ точките A_1 , C , B_1 и I лежат на една окръжност;

г) Ако точките A_1 , C , B_1 и I лежат на една окръжност да се докаже, че $IP \perp A_1B_1$;

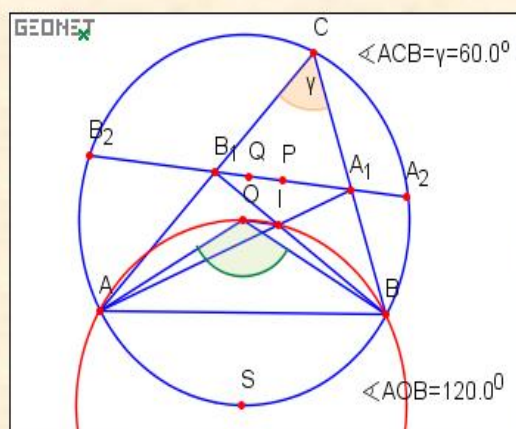
д) Ако точките A_1 , C , B_1 и I лежат на една окръжност да се докаже, че $OQ \parallel IP$;

е) Да се изрази чрез γ $\angle AOB$ и да се определи при кои стойности на γ точките A , B , I и O лежат на една окръжност;

ж) Ако точките A , B , I и O лежат на една окръжност да се намерят центъра и радиуса на тази окръжност;

з) Ако точките A , B , I и O лежат на една окръжност и $\triangle ABC$ е разностранен да се докаже, че $OIPQ$ е правоъгълник ($OI \parallel PQ$);

и) При условията в з) да се докаже, че $SP = SQ$.



А Б В Г Д Е Ж З И

ЕКСПЕРИМЕНТИРАЙ

Решения: а) б) в) г) д)

е) ж) з) и)

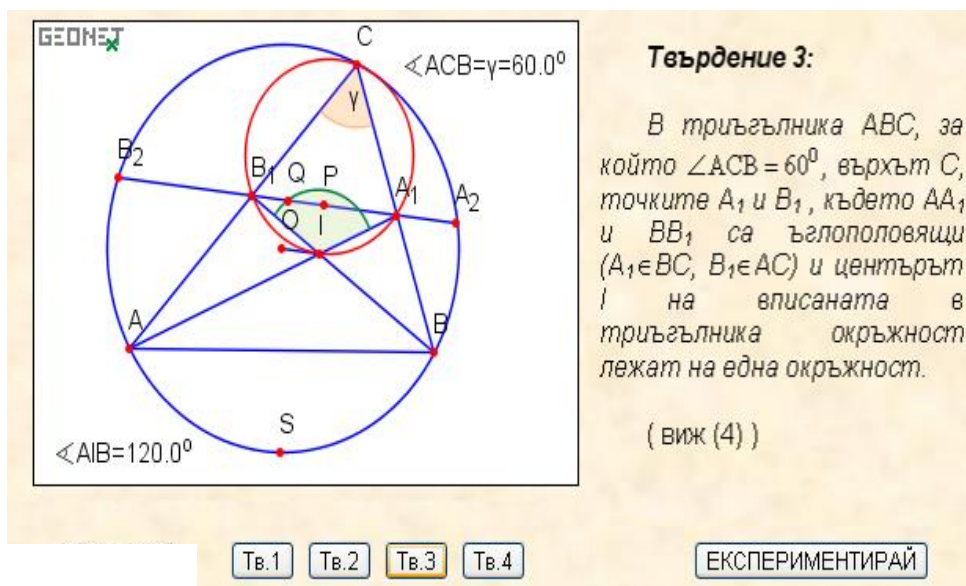
$$\begin{aligned} \text{е) } \angle AOB &= \widehat{AB} = 2\angle ACB \\ \Rightarrow \angle AOB &= 2\gamma \quad (9). \end{aligned}$$

За да лежат точките A , B , I и O на една окръжност трябва

$$\angle AOB = \angle AIB \Leftrightarrow 2\gamma = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ \quad (10);$$

Фигура 7



Фигура 8

Освен Динамичната обучаваща среда за изучаване на теоремите на Менелай и Чева, предназначена за обучение в часовете по профилирана подготовка в IX клас, в часовете по свободноизбираема подготовка може да се ползва проектът „Метод на инверсията. Свойства и приложение“.

Той е разработен от учениците Мирослав Славчев и Преслав Николаев и печели трето място в раздела „Геометрични миниатюри“ на международния конкурс „Математика и проектиране“ през 2008 г. в Москва (фигура 9).

Всички конструкции в Проекта са направени само с основните построителни инструменти на Geonext версия 1.53. Дори и в следващите версии инструмент „Инверсия“ не беше направен. През 2008 година другата динамичната среда – GeoGebra, също не предлагаше такава възможност.

Това още веднъж показва, че при работа с динамичен софтуер възможностите на потребителя се простират не само докъдето му позволяват вградените функции и инструменти, а докъдето се простират собствените му знания и възможности.

Метод на инверсията. Свойства и приложение

Автори: Мирослав Славчев и Преслав Николаев

Ръководител: Ангел Гушев

BG RU EN

Увод Свойства Аполониеви задачи Теорема на Мор-Маскерони Биографии

II случай: Точка M лежи на контура на k_0 , т.е $OM=r$.
От $OM=r$ и условието, че $OM \cdot OM' = k = r^2$ следва, че $r \cdot OM' = r^2$, т.е $OM' = r$. Тогава $M' \in k_0$, а по определението $M' \in OM \Rightarrow M' = k_0 \cap OM$. Но $k_0 \cap OM = M$, т.е $M \equiv M'$.

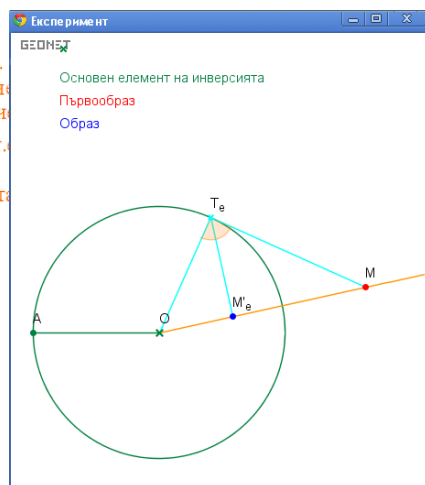
Извод: При инверсия всяка точка от основната окръжност се изобразява в себе си.

III случай: Точка M е вътрешна за k_0 , т.е $OM < r$.
Да построим права p , минаваща през M и перпендикулярна на OM . Нека p пресича k_0 в точка T и през T сме спуснали допирателна t към k_0 . Точката, в която t пресича OM е търсената M' .

Доказателство: По построение $M' \in OM$ (1). За правоъгълния $\triangle OMT$ ($\angle OTM = 90^\circ$) OM е проекция на катета OT върху хипотенузата OM , т.е $OM \cdot OM' = OT^2 \Rightarrow OM \cdot OM' = r^2 = k$ (2).

От (1) и (2) следва, че M' е образ на M при дадената инверсия.

Забележка: Интересно е да се забележи, че от условието $OM \cdot OM' = k$ следва, че при инверсия всяка точка от равнината извън основната окръжност има образ, вътрешен за нея, и обратно. Полюсът на инверсията има за образ точка в безкрайността.



Експериментирай

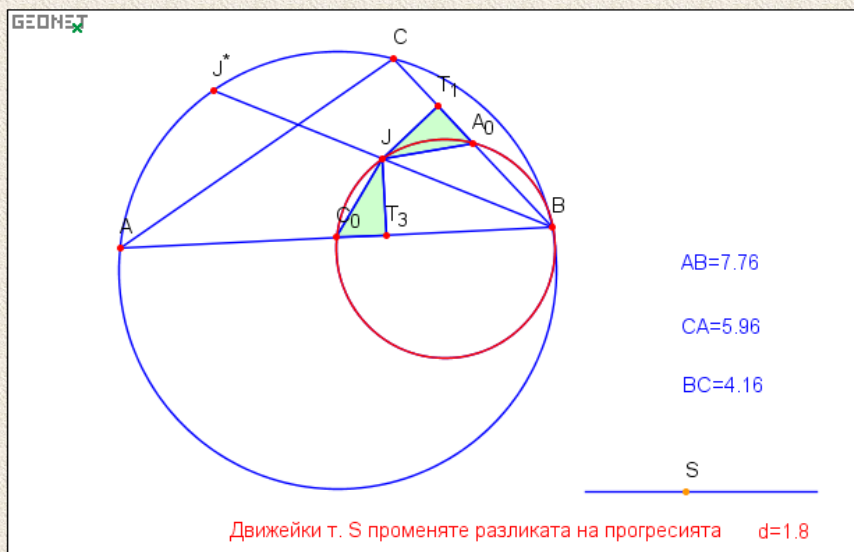
Фигура 9

Разработката на следващия проект – „Триъгълник и прогресия“, също е продиктувана от решаването на конкретна задача¹⁾. Проектът е предназначен за обучение на ученици от XI клас, но преформулирайки част от задачите и твърденията, те могат да бъдат използвани и в IX клас (фигура 10).

Когато дължините на страните на триъгълника образуват аритметична прогресия

Задача 1. Ако дължините на страните a , b и c на триъгълника ABC взети в този ред образуват аритметична прогресия, то върхът B , центърът на вписаната в триъгълника окръжност J и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.

Решение:



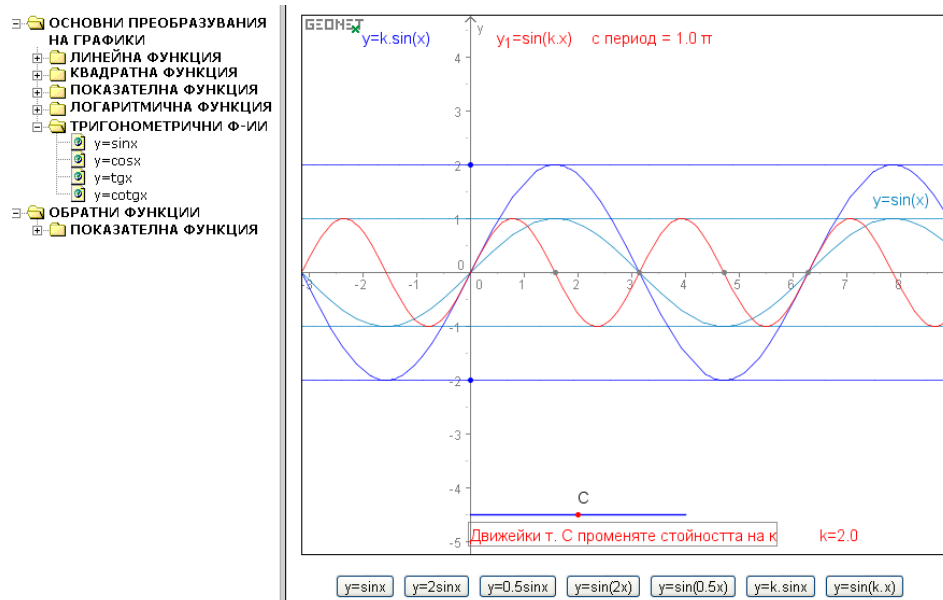
Фигура 10

Следващият проект е с по-универсален характер. В основната си част той е предназначен за **обучение в XI клас** (фигури 11 и 12).

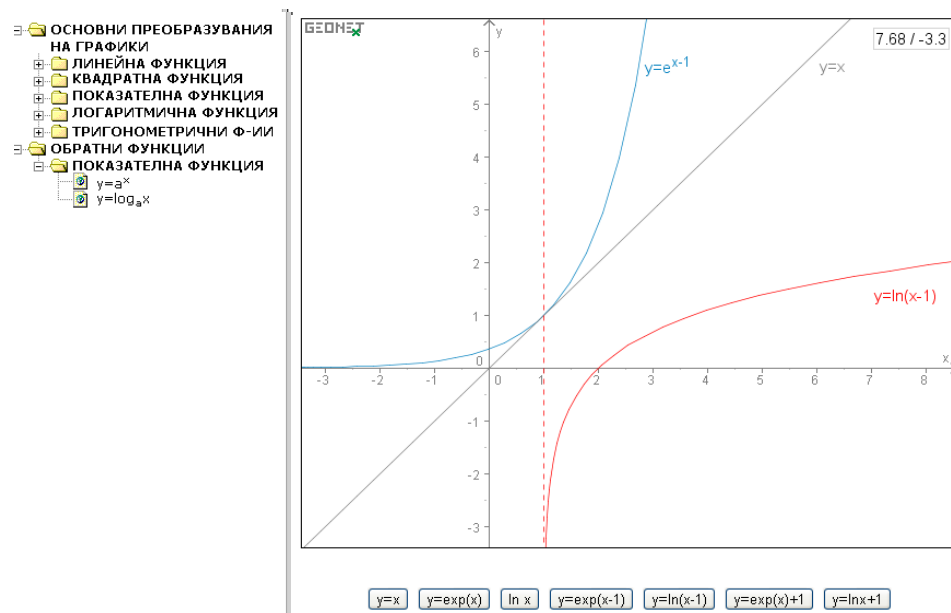
Освен графиката на функцията $y = f(x)$ с приложението могат да се чертаят и графиките на: $y = k \cdot f(x)$, $y = f(k \cdot x)$, $y = f(x) + c$, $y = f(x + c)$ (виж фигура 11).

Потребителите могат да строят и графиките на обратните функции $y = e^x$ и $y = \ln x$. Дори могат да проверят, че обратната на функцията $y = e^{x-1}$ не е $y = \ln(x-1)$ (виж фигура 12).

Точно идеята за построяване графиките на обратните функции беше в основата на съставянето на проекта. Оказа се, че построяването им затруднява дори и ученици, изучаващи математика в профилирана подготовка.



Фигура 11



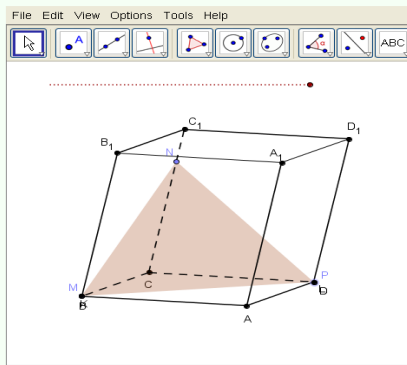
Фигура 12

В XI клас профилирана подготовка започва изучаването на **стереометрия**. Точно тук започват и проблемите на учителя с онагледяването на: взаимни положения на точки, прави и равнини; перпендикулярност в пространството; сечение на многостен с равнина и т.н. В помощ на учителя идва следващото приложение, което няма претенции за покриване на целия учебен материал.

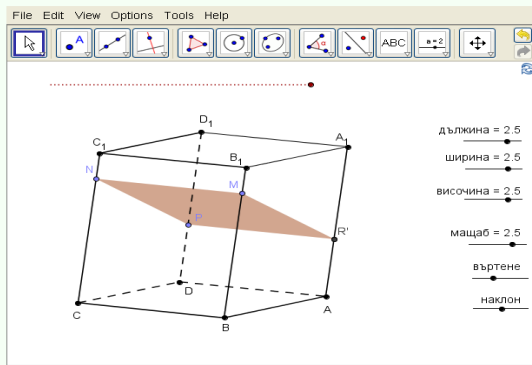
В основата на повечето конструкции е „триизмерна четириъгълна призма“, която може да се върти в равнините O_{xy} и O_{xz} и на която могат да бъдат променени дължините на страните.

На фигури 13 и 14 са представени две задачи от раздела „Сечение на многостен с равнина“.

Сечение на паралелепипед



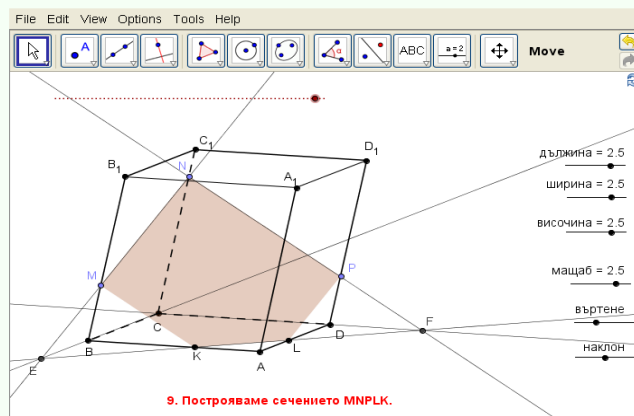
Сечение на паралелепипед



Фигура 13

Тема 5. Тетраедър и паралелепипед > Метод на следите при задачи за построение на сечения на многостени >

Сечение на паралелепипед



Задача 2. Върху ребрата на паралелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ са дадени три точки M , N и P . Да се построи сечението на паралелепипеда с равнината (MNP) .

Построението на търсеното сечение зависи от това на кои ребра лежат точките M , N и P .

6. Направете извод за вида на сечението, ако точките лежат съответно на ребрата BB_1 , CC_1 и DD_1 .

Зависи ли начина на построение от избора на разположение на тези точки?

Бутонът  в левия долен ъгъл на аплета стартира анимацията на построението.

Движейки плъзгачите и точките M , N и P потребителят може да мени конструкцията.

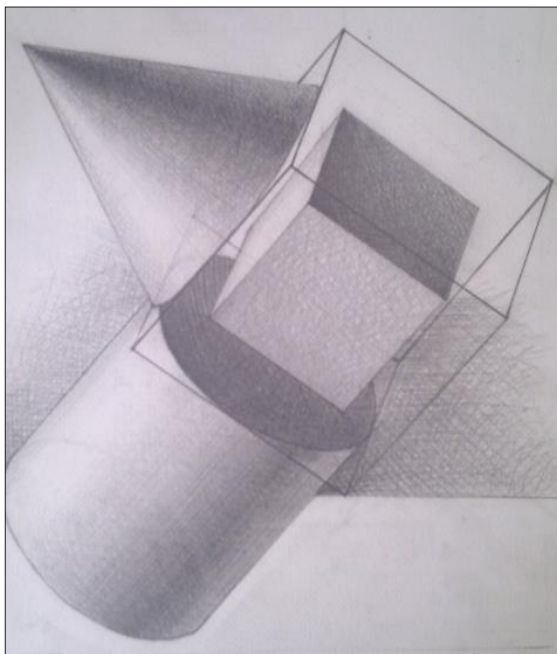
Фигура 14

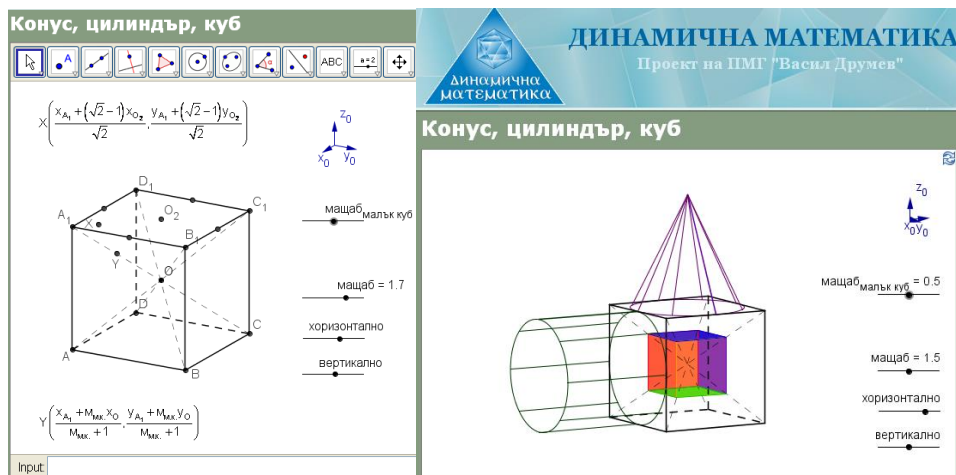
Преподаването на разделите **„Комплексни числа“** и **„Елементи на аналитичната геометрия в равнината“** създава затруднения на учителя в XII клас профилирана подготовка – те са разположени в края на учебника и не влизат нито в учебното съдържание за държавните зрелостни, нито за кандидат-студентските изпити. Опитът на автора показва, че учениците в ПМГ „Васил Друмев“ – Велико Търново, също не проявяват особен ентузиазъм при преподаването на посочения материал.

В един от часовете ученичка, вместо да внимава, рисува нещо в тетрадката си. Тази ученичка се готвеше да кандидатства архитектура в УАСГ, а там освен с математика се влиза с изпит по рисуване. Оказа се, че тя рисува задача от перспектива, а това не е толкова лесно. Предизвикателството на автора към тази ученичка беше да направи същата конструкция, но динамична и на GeoGebra.

За осъществяването на идеята, освен умения за работа с динамичната среда, бяха необходими и основни знания по аналитична геометрия. Ето го и отговора на въпроса, който вече беше поставен. Допълнителен стимул за работа беше възможно участие в заключителен семинар по проект „Фибоначи“, както и участие в националните кръгове на международния проект „Математика и проектиране“.

Възникналата идея скоро след това бе реализирана в проект, наречен **„Динамична математика“** (фигура 15).





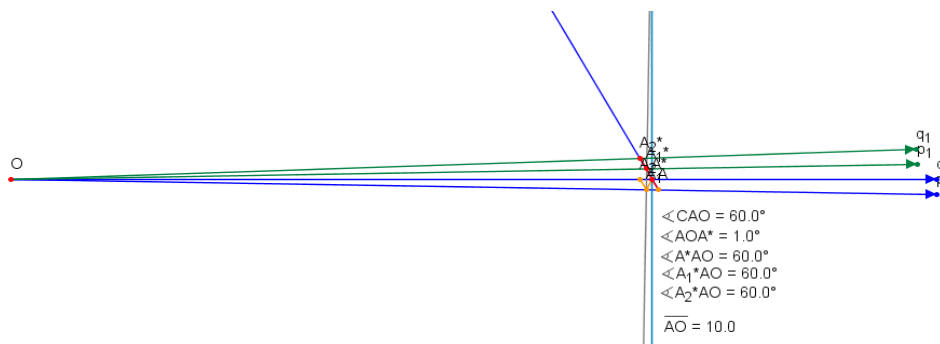
Фигура 15

С този проект учениците от ПМГ „Васил Друев“ заеха трето място в раздела „Геометрични миниатюри“ на националния кръг на международния конкурс „Математика и проектиране“ през 2013 г.

Последните динамични конструкции са свързани със задача, дадена на петия турнир „Черноризец Храбър“ през 1996 г.²⁾

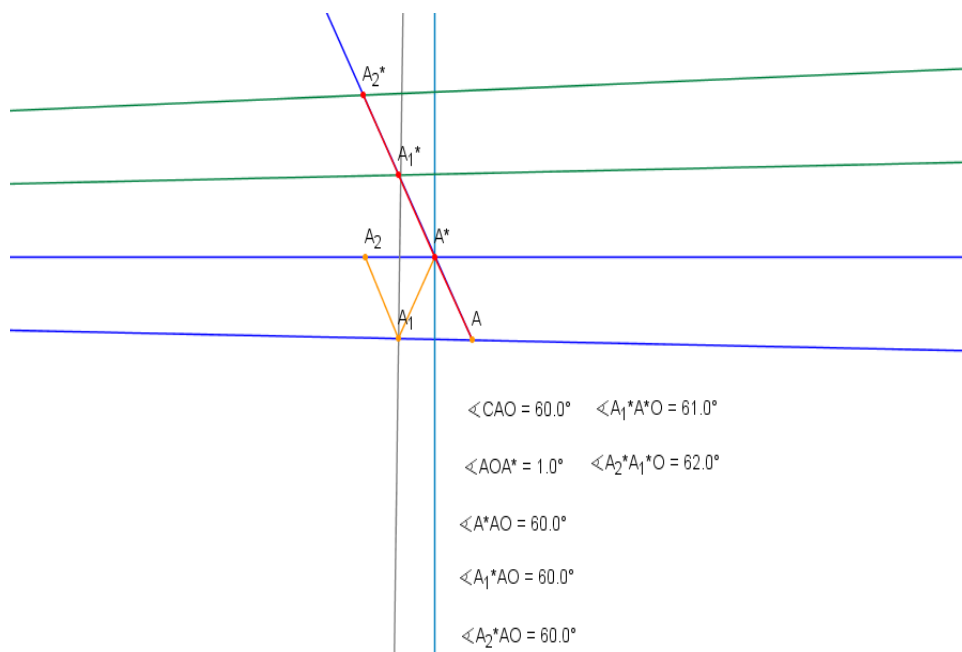
Задача (96-20): даден е ъгъл АОВ с мярка 1° и огледална вътрешна повърхност, като $AO = 1$ м. От точка А под ъгъл 60° спрямо лъча ОА влиза светлинен лъч и след многократно отражение се връща в точка А. Да се определи изминатият от лъча път.

При опит да бъде направен прецизен чертеж в динамичната среда Geonext се получава следната конструкция (фигура 16).



Фигура 16

Въпреки че е прецизно направена, тя не може да ни бъде полезна, защото обектите в нея са разположени близко един до друг и идеята за решаването на задачата не може да се онагледя. Опитът да се приближат част от обектите, ни води до следната конфигурация (фигура 17).



Фигура 17

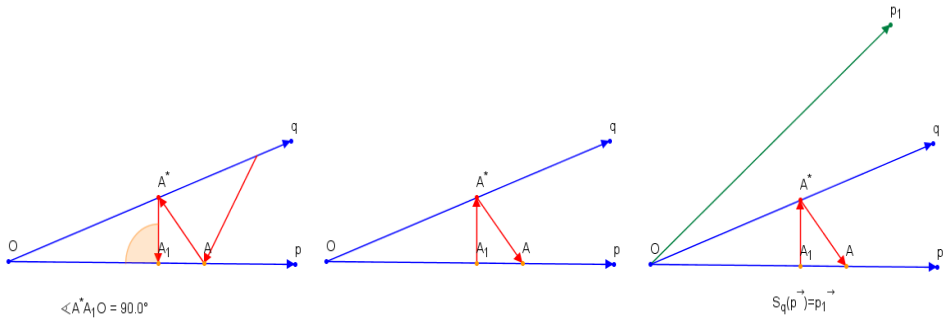
В този случай се губи цялостната визия и отново не може да се проследи основната идея за решаване на задачата.

До същата конструкция се достига, ако се използва и динамичната среда GeoGebra.

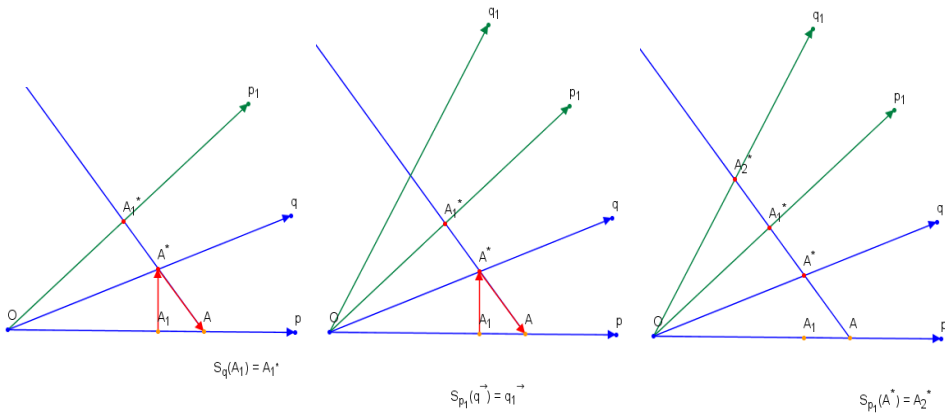
Това ни навежда на мисълта, че за да се онагледя идеята за решаването на конкретната задача, е хубаво да се реши задача, решението на която използва същата идея, но се достига в по-малко стъпки. Такъв е следният пример.

Задача 1: дадени са ъгъл AOB с мярка 20° и огледална вътрешна повърхност. От точка A под ъгъл 50° спрямо лъча OA влиза светлинен лъч и след многократно отражение се връща в точка A . Ако $AO = a$, да се определи изминатият от лъча път.

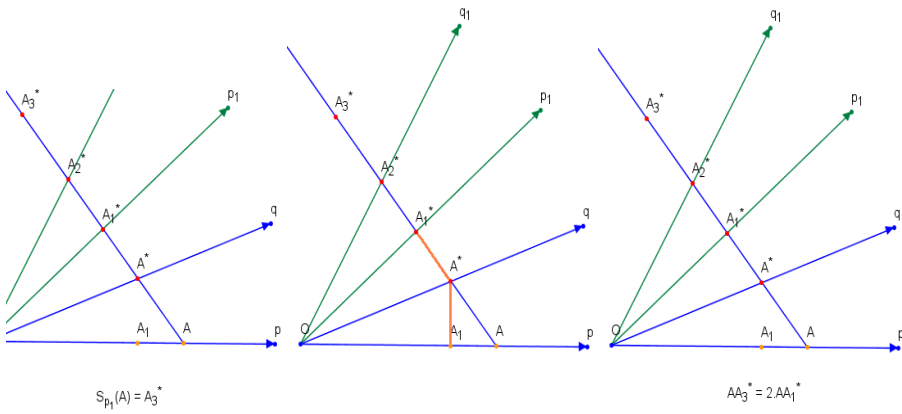
Вместо решение ще предложим поредица от слайдове, илюстриращи нейното решение (виж фигури 18, 19 и 20).



Фигура 18



Фигура 19



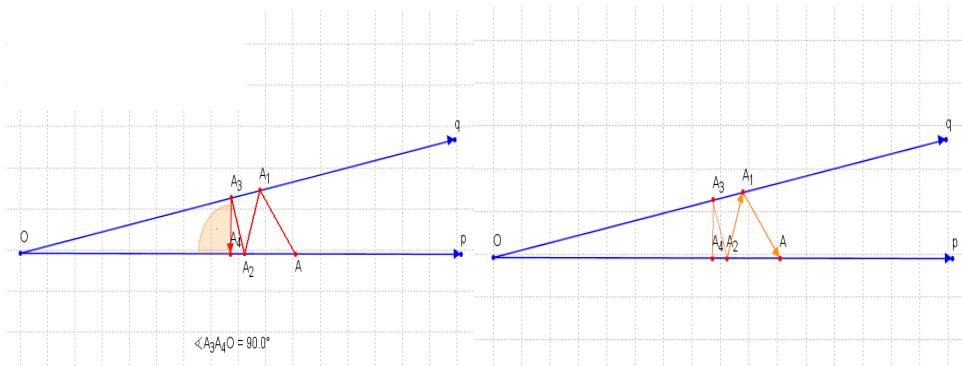
Фигура 20

Сега е видно, че изминатият от лъча път е равен на дължината на отсечка $AA_3^* = 2AA_1^*$ и че $\triangle AOA_1^*$ е правоъгълен, като $OA = a$, $\angle AOA_1^* = 2\angle AOA^* = 40^\circ$. Тогава $AA_3^* = 2a \cdot \sin 40^\circ$.

Използвайки същата идея, може да формулираме и нова задача.

Задача 2: дадени са ъгъл AOB с мярка 10° и огледална вътрешна повърхност. От точка A под ъгъл 50° спрямо лъча AO влиза светлинен лъч и след многократно отражение се връща в точка A . Ако $AO = a$, да се определи изминатият от лъча път.

Идеята за нейното решаване е същата, само че сега светлинният лъч пада под прав ъгъл към рамото Op не след първото, а след третото отражение (виж фигура 21).



Фигура 21

Оказва се, че гореизложените задачи са частни случаи на една по-обща задача, която може да има следната формулировка.

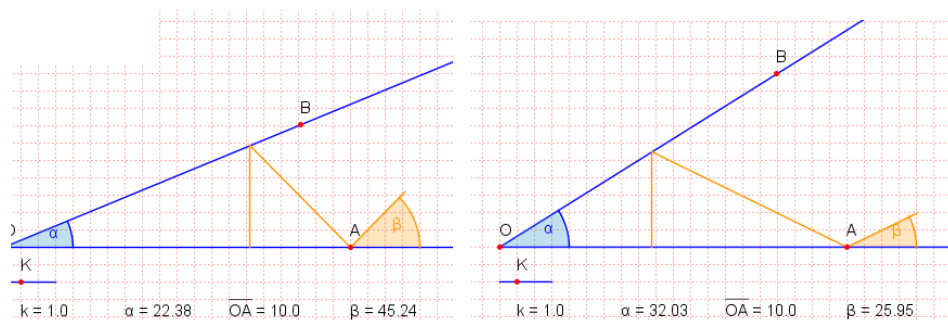
Обща задача: дадени са ъгъл AOB с мярка α , където $\alpha < 45^\circ$, и огледална вътрешна повърхност. От точка A под ъгъл $(90^\circ - 2k\alpha)$, където $k \in \mathbb{N}$ и

$k \leq \left\lfloor \frac{45}{\alpha} \right\rfloor$, спрямо лъча AO влиза светлинен лъч и след многократно отраже-

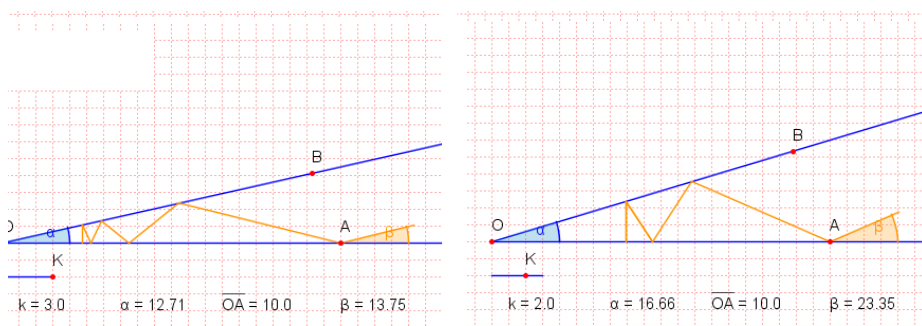
ние се връща в точка A . Ако $AO = a$, да се намери дължината на изминатия от лъча път.

Забележка: при $\alpha = 1^\circ$ и $k = 15$ получаваме **задача 96-20**, при $\alpha = 20^\circ$ и $k = 1$ получаваме **задача 1**; при $\alpha = 10^\circ$ и $k = 2$ получаваме **задача 2**.

Конструкции, които онагледяват общата задача, може да видите на фигури 22 и 23.



Фигура 22



Фигура 23

Разглеждайки задачата от петия математически турнир „Черноризец Храбър“, можем да направим следните изводи:

- динамичният математически софтуер не може да ни помогне в решаването или онагледяването на всяка задача;
- използването на динамичен софтуер трябва да е премерено и само там, където ще се възприеме като ефект, а не като дефект в работата;
- ако нямаме ясна идея какво и как искаме да постигнем при решаването на даден проблем, е без значение с какъв софтуер разполагаме.

От методическа гледна точка, трябва да подчертаем, че ако направо пристъпим към решаването на **задача (96-20)**, тя ще бъде достъпна и разбираема за много малка аудитория. Ако в своето изложение започнем със **задача 1**, преминем през **задача 2** и **общата задача**, то накрая ще ни е много лесно да обясним и решението на **задача (96-20)**.

На осемнадесетия турнир „Черноризец Храбър“ през 2009 година бяха дадени следните задачи в групите VII – VIII и IX – X клас.

Задача 15 (VII – VII клас): лазерен лъч излиза от точка върху рамото $p \rightarrow$ на ъгъл $pOq = 10^\circ$, перпендикулярна на $p \rightarrow$, и последователно се отразява от рамото $q \rightarrow$, после от $p \rightarrow$ и т.н. Кой от ъглите $70^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ или 10° не може да бъде ъгъл на отражение на лазерния лъч?

Задача 9 (IX – X клас): лазерен лъч излиза от точка върху рамото $p \rightarrow$ на ъгъл $pOq = 10^\circ$, перпендикулярна на $p \rightarrow$, и последователно се отразява от рамото $q \rightarrow$, после от $p \rightarrow$ и т.н. Колко пъти се е отразил лъчът?

За учениците от школата по математика на ПМГ „Васил Друмев“ – Велико Търново, които бяха запознати с идеята за решаване на гореизложените задачи, не беше проблем да решат задачата за своята възрастова група.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. Темата е описана подробно в две съвместни публикации на автора: „Когато дължините на страните на триъгълника образуват аритметична прогресия“, сп. Математика, 2007 г., бр. 2, стр. 8 – 13, и „Триъгълник и прогресия“, сп. Математика, 2007 г., бр. 3, стр. 11 – 14.
2. Доклад по тази тема е изнесен на Международния конгрес на математиците (MASSEE), проведен от 16 до 20 септември 2009 г. в Охрид.

MATHEMATICAL PROJECTS IN DYNAMIC ENVIRONMENT

Abstract. The purpose of this article is to show that there are no age limits for the use of dynamic mathematical software. There are no limitations on how to use it and the depth of the results. The only limitation lies in the capabilities and imagination of those who use it.

✉ **Mr. Angel Gushev**

Principal

High School of Mathematics and Natural Science “Vasil Drumev”

10, Vela Blagoeva St.

5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria

E-mail: angel_hg@abv.bg