

ЛОГАРИТМИЧНИ И ПОКАЗАТЕЛНИ ФУНКЦИИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ (III ЧАСТ)

Диана Стефанова
ОУ „Н. Й. Вапцаров“ – Асеновград

Резюме. Статията е продължение на първите части по темата за трансцендентни уравнения от същия автор в брой 1/2017 г. и брой 4/2017 г. на сп. „Математика и информатика“, като сега се разглеждат комбинации от показателни и логаритмични функции. Предложени са различни подходи за решаването им.

Keywords: transcendental equation; logarithmic function; exponential function; problem solving

В настоящата статия при решаването на трансцендентни уравнения с комбинации от показателни и логаритмични функции прилагаме идеята за решаване на трансцендентни уравнения, но с комбинации от показателни и тригонометрични функции в основата на показателната функция и на логаритмични уравнения с основа или аргумент тригонометрични функции от (Stefanova, 2017). Задачите, които предлагаме, са подходящи за ученици, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и състезания. За успешното решаване е необходимо много добро владение на различните групи показателни и логаритмични уравнения и неравенства, а също и свойствата на показателни и логаритмични функции. Целта е обвързване на знанията за показателни и логаритмични функции със съответните групи уравнения. За да открият различните връзки, учениците упражняват методите на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. За успешното формиране на умения за решаване уравненията са обособени в групи.

I група. Логаритмични уравнения с основа константа и аргумент показателна функция.

Задача 1. Да се реши уравнението $\log_{\frac{1}{3}}(2^{1-x} - 1) = \log_{\frac{1}{3}}(4^{-x} - 1)$.

Решение: Даденото уравнение е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} 2^{1-x} - 1 > 0 \\ 4^{-x} - 1 > 0 \\ 2^{1-x} - 1 = 4^{-x} - 1 \end{cases}.$$

Последователно получаваме еквивалентните системи:

$$\begin{cases} 2^{1-x} > 0 \\ 4^{-x} > 1 = 4^0 \\ 2^{1-x} = 4^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ 2 \cdot 2^{-x} = 2^{-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2^{-x}(2^{-x} - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2^{-x}(2^{-x} - 2) = 0 \end{cases}.$$

Тъй като $2^{-x} > 0$ за всяко реално x , то от уравнението в системата намираме, че $2^{-x} - 2 = 0$, а оттук и $x = -1$. Числото -1 удовлетворява и неравенството в системата. Следователно то е решение на даденото уравнение.

Задача 2. Да се реши уравнението $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество се определя от решенията на неравенството $3^x - 8 > 0$, откъдето намираме, че $x \in (3 \log_3 2; +\infty)$. В множеството от допустимите стойности даденото уравнение е равносилно на уравнени-

ята $3^x - 8 = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}$. Полагаме $3^x = y$, като $y > 0$, и получаваме дробното уравнение $y - 8 = \frac{9}{y}$, което има корени $y_1 = 9$ и $y_2 = -1$. Тогава от

$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$, но $3^x = -1$, което не е възможно. Следователно само $x = 2$ е корен на даденото уравнение.

Задача 3. Да се реши уравнението $x + \lg(5^x - 1) = x \lg 2 + \lg 20$.

Решение: Множеството от допустими стойности на уравнението се определя от неравенството $5^x - 1 > 0$, т.е. $x > 0$. Тъй като $2^x > 0$ и като използваме свойствата на логаритмите, преобразуваме последователно даденото уравнение:

$$\lg 10^x + \lg(5^x - 1) = \lg 2^x + \lg 20, \lg 10^x(5^x - 1) = \lg 20 \cdot 2^x \Leftrightarrow 10^x(5^x - 1) = 20 \cdot 2^x, \\ 2^x \cdot 5^x(5^x - 1) = 20 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - 20 = 0.$$

Полагаме $5^x = y, y > 0$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 - y - 20 = 0$ с корени -4 и 5 . Но само $5 > 0$ и получаваме $5^x = 5$, т.е. $x = 1$. Следователно даденото уравнение има единствено решение $x = 1$.

Задача 4. Да се реши уравнението $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$.

Решение: Допустимите стойности на даденото уравнение са $x \in (-\infty; +\infty)$. Преобразуваме втория множител, а именно:

$$\log_2(2^{x+1} + 2) = \log_2(2(2^x + 1)) = \log_2 2 + \log_2(2^x + 1) = 1 + \log_2(2^x + 1).$$

След това заместваем в даденото уравнение и получаваме:

$$\log_2(2^x + 1) \cdot (1 + \log_2(2^x + 1)) = 2.$$

Полагаме $\log_2(2^x + 1) = y$ и намираме, че $y(y + 1) = 2$ откъдето се получава квадратното уравнение $y^2 + y - 2 = 0$, чиито корени са $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$.

От $\log_2(2^x + 1) = 1$ намираме, че $x = 0$ и уравнението $\log_2(2^x + 1) = -2$ няма решение.

Задача 5. Да се реши уравнението $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

Решение: Даденото уравнение има смисъл за всяко x . Като използваме, че $\lg 10 = 1$, преобразуваме даденото уравнение до вида $\lg(2(4^{x-2} + 9)) = \lg(10(2^{x-2} + 1))$. След това антилогаритмуваме и получаваме $2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1)$. Прилагаме свойствата на степените: $2^{2(x-2)} + 9 - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 = 0$ и като положим $2^{x-2} = y, y > 0$, получаваме квадратното уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$, чиито корени са $y_1 = 1$ и $y_2 = 4$. От $2^{x-2} = 1$ намираме, че $x_1 = 2$, а от $2^{x-2} = 4$ имаме, че $x_2 = 4$.

Задача 6. Да се реши уравнението $\log_3(2^{x-1} + 3^{x+1}) + x = 1 + \log_3(4^x + 6^x)$.

Решение: даденото уравнение има смисъл за всяко x . Преобразуваме го последователно, а именно:

$$\log_3(2^{x-1} + 3^{x+1}) + \log_3 3^{x-1} = \log_3(4^x + 6^x) \Rightarrow \log_3[(2^{x-1} + 3^{x+1})3^{x-1}] = \log_3(4^x + 6^x).$$

След това антилогаритмуваме и получаваме $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} + 3^{2x} = 4^x + 6^x$. Прилагаме свойствата на степените: $6 \cdot (3^x)^2 - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x - 6 \cdot (2^x)^2 = 0$ и делим двете

страни на $(2^x)^2 \neq 0$. Оттук $6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0$. Като положим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y, y > 0$, получаваме квадратното уравнение $6y^2 - 5y - 6 = 0$, чиито

корени са $y_1 = -\frac{2}{3}$ и $y_2 = \frac{3}{2}$. Уравнението $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -\frac{2}{3}$ няма решение, а от $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ заключаваме, че единственото решение на даденото уравнение е $x = 1$.

Задача 7. Да се реши уравнението $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество съдържа общите решения на неравенствата $4^x + 4 > 0$ и $2^{x+1} - 3 > 0$. Първото от двете неравенства е изпълнено за всяко x , а второто има за решение всяко $x > \log_2 3 - 1$. Оттук намираме, че $x \in (\log_2 3 - 1; +\infty)$. В множеството от допустими стойности преобразуваме последователно даденото уравнение и получаваме еквивалентните му уравнения

$$\begin{aligned} \log_2(4^x + 4) - \log_2(2^{x+1} - 3) &= x \Leftrightarrow \log_2 \frac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} = x \Leftrightarrow \\ \frac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} &= 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Полагаме $2^x = y$, като трябва $y > 0$, и получаваме квадратното уравнение $y^2 - 3y - 4 = 0$, чиито корени са $y_1 = -1$ и $y_2 = 4$. Но тъй като $y > 0$, то решение е само $y_2 = 4$. В такъв случай $2^x = 4$. Оттук $x = 2$, което принадлежи на множеството на допустимите стойности. Следва, че числото 2 е търсеното решение на даденото уравнение.

Задача 8. Да се реши уравнението $\log_3(2^x - 1) - \log_3(2^x - 2^{-x}) = -2 + x \log_3 2$.

Решение: Даденото уравнение има смисъл за всяко x , за което $2^x - 1 > 0$ и $2^x - 2^{-x} > 0$, откъдето намираме, че $x \in (0; +\infty)$. Преобразуваме даденото уравнение до вида $\log_3(2^x - 1) - \log_3(2^x - 2^{-x}) = \log_3 \frac{1}{9} + \log_3 2^x$, а оттам и до $\log_3 \frac{2^x - 1}{2^x - 2^{-x}} = \log_3 \frac{2^x}{9}$. След което антилогаритмуваме и получаваме

$\frac{2^x - 1}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^x}{9}$, откъдето $\frac{2^x}{2^x + 1} = \frac{2^x}{9}$, т.е. $2^{2x} - 8 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(2^x - 8) = 0$. Тъй като $2^x = 0$ за всяко x то $2^x = 8$ и следователно $x = 3$.

Задача 9. Да се реши уравнението $\lg(5^{2x} + 4^x - 16) = 2x - x \lg 4$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество се определя от решенията на неравенството $5^{2x} + 4^x - 16 > 0$. В множеството от допустимите стойности даденото уравнение е равносилно на уравненията:

$\lg(5^{2x} + 4^x - 16) + \lg 4^x = \lg 10^{2x} \Leftrightarrow 4^x \cdot 25^x + 4^{2x} - 16 \cdot 4^x = 100^x \Leftrightarrow 4^x(4^x - 16) = 0$. Тъй като $4^x > 0$, то остава $4^x - 16 = 0$, откъдето намираме, че $x = 2$. Чрез непосредствена проверка установяваме, че $x = 2$ удовлетворява неравенството $5^{2x} + 4^x - 16 > 0$, т.е. принадлежи на множеството на допустимите стойности. Следователно $x = 2$ е единственият корен на даденото уравнение.

Задача 10. Да се реши уравнението $\left(1 + \frac{x}{2}\right) \log_2 3 - \log_2(3^x - 13) = 3 \log_{\frac{\sqrt{5}}{25}} 5 + 4$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество се определя от решенията на неравенството $3^x - 13 > 0$, откъдето намираме, че $x \in (\log_3 13; +\infty)$. За улеснение полагаме $3^{\frac{x}{2}} = y$, като $y > 0$, и получаваме уравнението $\log_2 \frac{3y}{y^{2-13}} = 3 \log_{\frac{\sqrt{5}}{25}} 5 + 4$.

Преобразуваме и получаваме квадратното уравнение $3y = 4y^2 - 52$ с корени $y_1 = 4$ и $y_2 = -3,25$. Тогава $3^{\frac{x}{2}} = 4 \Rightarrow x = \log_3 16$, но $3^{\frac{x}{2}} = -3,25$, което е невъзможно. Следователно само $x = \log_3 16$ е корен на даденото уравнение, тъй като е допустима стойност.

Задача 11. Да се реши уравнението $\log_6(3^{x^2} + 1) - \log_6(3^{2-x^2} + 9) = \log_6 2 - 1$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество съвпада с решенията на неравенствата $3^{x^2} + 1 > 0$ и $3^{2-x^2} + 9 > 0$, откъдето намираме, че $x \in (-\infty; +\infty)$. Използваме свойствата на логаритмите и преобразуваме даденото уравнение:

$$\log_6(3^{x^2} + 1) - \log_6(3^{2-x^2} + 9) = \log_6 2 - \log_6 6 \Leftrightarrow \log_6 \left(\frac{3^{x^2} + 1}{3^{2-x^2} + 9} \right) = \log_6 \frac{2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^{x^2} + 1}{3^{2-x^2} + 9} = \frac{2}{6}, \text{ откъдето } 3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2} - 3 = 0. \text{ Полагаме } 3^{x^2} = y, y > 0 \text{ и получа-}$$

ваме квадратното уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$ с корени $y_1 = -1$ и $y_2 = 3$. Но $y > 0$ и следователно само $y_2 = 3$ е допустима стойност. От $3^{x^2} = 3$ намираме, че $x_{1/2} = \pm 1$ са корените на даденото уравнение.

Задача 12. Да се реши уравнението $\log_2(32 - 4x^2 + x^2 \cdot 2^x) = x + 3$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество се определя от решенията на неравенството $32 - 4x^2 + x^2 \cdot 2^x > 0$. В множеството от допустимите стойности даденото уравнение е равносилно на уравненията

$$32 - 4x^2 + x^2 \cdot 2^x = 2^{x+3} \Leftrightarrow 4(8 - x^2) + 2^x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow (4 - 2^x)(8 - x^2) = 0.$$

Последното уравнение има корени $x_1 = 2, x_2 = 2\sqrt{2}$ и $x_3 = -2\sqrt{2}$, които са корени и на даденото уравнение, тъй като с непосредствена проверка установяваме, че принадлежат на множеството от допустими стойности.

Задача 13. Да се реши уравнението $\log_2(5^{\lg x} - 2^{-\lg x}) = 1 - \lg x$.

Решение: Определяме множеството от допустимите стойности на неизвестното. В случая това множество съдържа общите решения на неравенствата $x > 0$ и $5^{\lg x} - 2^{-\lg x} > 0$, като второто неравенство има за решение всяко $x > 1$. Оттук намираме, че $x \in (1; +\infty)$. Използваме определението за логаритъм и даденото уравнение се преобразува до $2^{1-\lg x} = 5^{\lg x} - 2^{-\lg x}$, откъдето $3 \cdot 2^{-\lg x} = 5^{\lg x}$ или $3 = 10^{\lg x} = x$. Числото 3 е от областта на допустимите стойности за уравнението и следователно $x = 3$ е единствено негово решение.

Задача 14. Да се реши уравнението $\log_{\frac{1}{2}} \left(5^{\lg x} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} \right) = \lg x - 3$.

Решение: Уравнението може да се запише във вида $5^{\lg x} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x - 3}$ или $10^{\lg x} - 1 = 8$, откъдето намираме $\lg x = \lg 9$, т.е. $x = 9$. Тъй като $\lg 9 > 0$,

от $5 > \frac{1}{2}$ следва $5^{\lg 9} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg 9} > 0$, т.е. аналитичните изрази имат смисъл при $x = 9$.

Задача 15. Да се реши уравнението $\lg(5^{2x} - \lg x - 2) = (-\lg 64 + 6)\frac{x}{3}$.

Решение: Дясната страна на даденото уравнение преобразуваме по следния начин:

$$(-\lg 64 + 6)\frac{x}{3} = (-6\lg 2 + 6\lg 10)\frac{x}{3} = 2x\lg 5 = \lg 5^{2x}$$

и получаваме $\lg(5^{2x} - \lg x - 2) = \lg 5^{2x}$ или $-\lg x - 2 = 0$, а след това намираме $x = 0,01$.

II група. Показателни уравнения с основа константа и показател логаритмична функция.

Задача 1. Да се реши уравнението $9^{\log_7 x} - 3^{\log_7 x} + 3^{\log_7 x} = 1$.

Решение: Допустимите стойности на уравнението са: $x \in (0; +\infty)$. Като използваме свойствата на степените, преобразуваме по следния начин:

$(3^{\log_7 x})^2 - 3 \cdot 3^{\log_7 x} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\log_7 x} = 1$. Полагаме $3^{\log_7 x} = y, y > 0$ и получаваме квадратното уравнение $3y^2 - 8y + \frac{1}{3} = 0$ с корени $y_1 = 3 > 0$ и $y_2 = \frac{1}{3} > 0$. По-нататък имаме $3^{\log_7 x} = 3 \Rightarrow \log_7 x = 1 \Rightarrow x = 7$.

Задача 2. Да се реши уравнението $(2,5)^{\log_3 x} + (0,4)^{\log_3 x} = 2,9$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Като използваме, че $2,5 = \frac{5}{2}$ и $0,4 = \frac{2}{5}$, даденото уравнение до-

бива вида $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_3 x} = 2,9$. Полагаме $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = y, y > 0$ и получаваме

дробното уравнение $y + \frac{1}{y} = 2,9$, а оттам и квадратното $10y^2 - 29y + 10 = 0$, чиито корени са $y_1 = \frac{5}{2}$ и $y_2 = \frac{2}{5}$. От $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x_1 = 3$. От

$\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$.

Задача 3. Да се реши уравнението $(5)^{\log_4(x-3) \log_4(x-1)} = 0,2^{-(2-\log_4 8)}$.

Решение: Като вземем предвид, че $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, получаваме уравнението $5^{\log_4(x+3) - \log_4(x-1)} = 5^{2 - \log_4 8}$, което е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \\ \log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8 \end{cases}$$

Оттук последователно получаваме:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \\ \log_4 \frac{x+3}{x-1} = \log_4 \frac{16}{8} \end{cases}, \begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \\ \frac{x+3}{x-1} = 2 \end{cases}$$

По-нататък имаме $\frac{x+3}{x-1} = 2 \ (x-1 \neq 0) \Leftrightarrow x+3 = 2x-2$ е $x = 5$. Тъй като $5 > 1$, то $x = 5$ е решение на даденото уравнение.

Задача 4. Да се реши уравнението $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25}(x^2+2x+5)} = 7^{\frac{\log_1(3x+1)}{7}}$.

Решение: Множеството от допустимите стойности на уравнението се определя от системата $\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x^2+2x+5 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x^2+2x+5 > 0 \text{ за всяко } x \end{cases}$,

откъдето $x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Като вземем предвид логаритмичните твърдения, получаваме $(5^{-1})^{\frac{1}{2}\log_5(x^2+2x+5)} = 7^{-1 \cdot \log_7(3x+1)}$,

$$\left[5^{\log_5(x^2+2x+5)}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[7^{\log_7(3x+1)}\right]^{-1} \Leftrightarrow (x^2+2x+5)^{-\frac{1}{2}} = (3x+1)^{-1} \text{ за } x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Оттук продължаваме така: $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{3x+1} \Leftrightarrow 3x+1 = \sqrt{x^2+2x+5}$,

$2x^2 + x - 1 = 0$. Корените на квадратното уравнение са $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, но

$x_1 = -1$ не е от интервала $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Следователно само $x = \frac{1}{2}$ е решение на даденото уравнение.

Задача 5. Да се реши уравнението $9.5^{\lg x} - 5^{\lg \frac{x}{10}} = 5500$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Тъй като $\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то даденото уравнение се преобразува по следния начин:

$$\begin{aligned} 9.5^{\lg x} - 5^{\lg x - 1} &= 5500 \Leftrightarrow 9.5^{\lg x} - 5^{\lg x} \cdot 5^{-1} = 5500 \\ \Leftrightarrow 5^{\lg x} \left(9 - \frac{1}{5} \right) &= 5500 \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 5^4 \lg x = 4, \text{ т.е. } x = 10^4 \text{ или } x = 100000 \end{aligned}$$

Задача 6. Да се реши уравнението $2^{\log_8 \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = 3^{2 \log_x \sqrt{x} - 1}$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$. Преобразуваме дясната страна на уравнението по следния начин: $3^{2 \log_x \sqrt{x} - 1} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} = 3^0 = 1$. Тогава $2^{\log_8 \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = 1$ или:

$$\log_8 \sqrt{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \log_8 |x-3| = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 1.$$

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Задача 7. Да се реши уравнението $9^{\log_3 |x|} + x^2 = 18$.

Решение: Тъй като $9^{\log_3 |x|} = 3^{2 \log_3 |x|} = 3^{\log_3 |x|^2} = |x|^2$, то уравнението добива вида $|x|^2 + x^2 = 18$. Но $x^2 = |x|^2$ и тогава $2|x|^2 = 18 \Rightarrow |x| = 3$, откъдето намираме корените $x_{1/2} = \pm 3$.

Задача 8. Да се реши уравнението $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Преобразуваме дясната страна на уравнението по следния начин:

$$2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 2^{2 \log_3 x} \cdot 5^{\log_3 x} = 4^{\log_3 x} \cdot 5^{\log_3 x} = 20^{\log_3 x}.$$

Тогава $20^{\log_3 x} = 20^2$, откъдето намираме, че $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$.

Задача 9. Да се реши уравнението $(0,4)^{\lg^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \lg x^3}$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Като вземем предвид, че $0,4 = \frac{2}{5}$ и $6,25 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, записваме

даденото уравнение във вида $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2 - \lg x^3)}$. Степените са равни,

основите са равни и тъй като $\frac{2}{5} \neq 0, \frac{2}{5} \neq 1$, то заключаваме, че и показателите са равни, т.е. $\lg^2 x + 1 = -4 + 2 \lg x^3$. Уравнението $\lg^2 x - 6 \lg x + 5 = 0$ има корени $\lg x = 5$ и $\lg x = 1$, следователно $x_1 = 10^5$ и $x_2 = 10$.

Задача 10. Да се реши уравнението $3^{2+\log_2|x-1|} = 9^{\log_4(2x+1+|x-2|)}$.

Решение: Преобразуваме уравнението, както следва:

$$2 + \log_2|x-1| = 2\log_4(2x+1+|x-2|), \quad \log_2 4 + \log_2|x-1| = \log_4(2x+1+|x-2|)^2, \\ \log_2 4|x-1| = \log_2(2x+1+|x-2|), \quad 4|\dot{x}-1| = 2 + 1 + |x-2|.$$

При $x \in (-\infty; 1]$ уравнението става $4(1-x) = 2x+1+2-x$, чийто корен $x = \frac{1}{5}$ принадлежи на интервала $(-\infty; 1]$. При $x \in [1; 2]$ уравнението става $4(\dot{x}-1) = 2 + 1 + 2 - x$, чийто корен $x = \frac{7}{3}$ не принадлежи на интервала $[1; 2]$. При $x \in [2; +\infty)$ уравнението става $4(x-1) = 2x+1+x-2$, чийто корен $x = 3$ принадлежи на интервала $[2; +\infty)$. Непосредствено се проверява, че числата $x_1 = \frac{1}{5}$ и $x_2 = 3$ удовлетворяват даденото уравнение.

Задача 11. Да се реши уравнението $5^{1-2\log_5 x} \cdot x - 6 \cdot 5^{-2\log_5 x} - 1 = 0$.

Решение: Допустимите стойности на уравнението са $x > 0$. Използваме свойствата на степените и преобразуваме даденото уравнение във вида $5 \cdot 5^{-2\log_5 x} \cdot x - 6 \cdot \frac{1}{5^{2\log_5 x}} - 1 = 0$. След това умножаваме двете му страни с $5^{2\log_5 x}$ и получаваме $5 \cdot 5^0 \cdot x - 6 - 5^{2\log_5 x} = 0 \Leftrightarrow 5x - 6 - (5^{\log_5 x})^2 = 0 \Leftrightarrow 5x - 6 - (x)^2 = 0$. Корените на квадратното уравнение са $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$.

III група. Показателни уравнения, при които неизвестното се намира в основата и в показателя на логаритмична функция.

Задача 1. Да се реши уравнението $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Логаритмуваме двете страни на уравнението при основа 5 и получаваме $(\log_5 x - 1) \cdot \log_5 \sqrt{x} = 1$, т.е. $y^2 - y - 2 = 0$, като сме положили $\log_5 x = y$. Корените на квадратното уравнение са $y_1 = -1; y_2 = 2$. От $\log_5 x = -1$ и $\log_5 x = 2$ намираме съответно $x_1 = \frac{1}{5}; x_2 = 25$. Непосредствено се проверява, че както x_1 , така и x_2 удовлетворяват даденото уравнение.

Задача 2. Да се реши уравнението $x^{2\lg^3 x - \frac{3}{2}\lg x} = \sqrt{10}$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Логаритмуваме двете страни на уравнението при основа 10 и получаваме $\left(2\lg^3 x - \frac{3}{2}\lg x\right) \cdot \lg x = \frac{1}{2}$, т.е. $4y^4 - 3y^2 - 1 = 0$, като сме положили

$\lg x = y$. Биквадратното уравнение има два реални корена $y_1 = -1$ и $y_2 = 1$. От $\lg x = -1$ и $\lg x = 1$ намираме съответно $x_1 = \frac{1}{10}$; $x_2 = 10$. Непосредствено се проверява, че както x_1 , така и x_2 удовлетворяват даденото уравнение.

Задача 3. Да се реши уравнението $2x^{\lg x} + 3x^{-\lg x} = 5$.

Решение: Допустимите стойности на уравнението са $x \in (0; +\infty)$. Като използваме свойствата на степените, преобразуваме уравнението до вида $2x^{2\lg x} - 5x^{\lg x} + 3 = 0$. Полагаме $x^{\lg x} = y$ и получаваме квадратното уравнение $2y^2 - 5y + 3 = 0$ с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{3}{2}$. От $x^{\lg x} = 1$ намираме, че $x_1 = 0 \notin (0; +\infty)$, а от $x^{\lg x} = \frac{3}{2}$ имаме, че $x_{2/3} = 10^{\pm \sqrt{\lg \frac{3}{2}}}$ $\in (0; +\infty)$. Следователно числата $10^{\pm \sqrt{\lg \frac{3}{2}}}$ са корени на даденото уравнение.

Задача 4. Да се реши уравнението $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.

Решение: Стойностите $x \leq 0$ са недопустими за изразите в уравнението. При $x > 0$, поради тъждеството $\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{2}{x}$, уравнението добива вида $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = x$, т.е. $\lg^2 x + 3\lg x + 3 = 1$. Оттук намираме $\lg x = -1$ и $\lg x = -2$, т.е. $x_1 = \frac{1}{10}$ и $x_2 = \frac{1}{100}$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\sqrt[4]{x^{\lg x + 7}} = 10^{\lg x + 1}$.

Решение: Допустимите стойности на x за $\lg x$ са всички положителни числа и тъй като при положителна основа и реален степенен показател степента приема положителна стойност, т.е. за всяко $x > 0$, $x^{\lg x + 7} > 0$, то всички положителни числа са допустими на неизвестното. При решаването на даденото уравнение се получава $x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{\lg x}{4}} = 10x$ или $x^{\frac{\lg x}{4}} = 10x^{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\lg^2 x = 1 - \frac{3}{4}\lg x$. Полагаме $y = \lg x$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 + 3y - 4 = 0$ с корени $y_1 = -4$ и $y_2 = 1$. Тогава корените на даденото уравнение са $x_1 = 10^{-4}$ и $x_2 = 10$ които са допустими за неизвестното.

Задача 6. Да се реши уравнението $x^{\sqrt{\log_x 5}} + 5^{\sqrt{\log_5 x}} = 2\sqrt{5}$.

Решение: Допустимите стойности на даденото уравнение са $x \in (0; +\infty)$. Използваме свойствата на логаритмите и преобразуваме:

$$x^{\sqrt{\log_x 5}} = x^{\frac{\log_x 5}{\sqrt{\log_x 5}}} = x \log_x 5 \sqrt{\log_5 x} = (x^{\log_x 5})^{\sqrt{\log_5 x}} = 5^{\sqrt{\log_5 x}}.$$

Заместваме в даденото уравнение и получаваме $5^{\sqrt{\log_5 x}} = \sqrt{5}$, откъдето $\sqrt{\log_5 x} = \frac{1}{4}$ или $x = \sqrt[4]{5}$.

Задача 7. Да се реши уравнението $3x^{\log_5 2} + 2^{\frac{1}{\log_x 5}} = 64$.

Решение: Преобразуваме израза $2^{\frac{1}{\log_x 5}} = x^{\log_5 2}$, заместваме в даденото уравнение и получаваме $x^{\log_5 2} = 16$. Логаритмуваме при основа 2 и получаваме уравнението $\log_2 x^{\log_5 2} = \log_2 16 = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \log_2 5$, откъдето намираме, че $x = 625$.

Задача 8. Да се реши уравнението $x^{2+\log_3 x} = 3^8$.

Решение: Тъй като и двете страни на уравнението са положителни, то дефиниционната област е $x > 0$. Логаритмуваме двете страни на уравнението при основа 3 и получаваме $\log_3 x^{2+\log_3 x} = \log_3 3^8$, откъдето намираме $(2+\log_3 x)\log_3 x = 8$. Полагаме $\log_3 x = y$ и получаваме уравнението $y(2+y) = 8$. Корените на това уравнение са $y_1 = -4$ и $y_2 = 2$. Заместваме в полагането и намираме, че корените на даденото уравнение са $x_1 = \frac{1}{81}$ и $x_2 = 9$.

Задача 9. Да се реши уравнението $x^{(\log_3 x)^3 - 3\log_3 x} = 3^{-3\log_2 \sqrt{2} 4+8}$.

Решение: Преди да решим уравнението в съответствие със свойствата на показателната и логаритмичната функция, определяме допустимите стойности по следния начин:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Следователно $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Използваме

свойството на логаритмите: $3^{-3\log_2 \sqrt{2} 4+8} = 3^{\frac{-3\log_3 2^2+8}{2^2}} = 3^{-4+8} = 3^4$. Сега преобразуваме даденото уравнение по следния начин:

$$x^{(\log_3 x)^3 - 3\log_3 x} = 3^4 \Leftrightarrow (\log_3 x)^3 - 3(\log_3 x) = \log_x 3^4 \Leftrightarrow (\log_3 x)^3 - 3(\log_3 x) = \frac{4}{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$(\log_3 x)^4 - 3(\log_3 x)^2 = 4.$$

Полагаме $z = (\log_3 x)^2$ и получаваме квадратното уравнение $z^2 - 3z - 4 = 0$ с корени $z_1 = 4$ и $z_2 = -1$. От $(\log_3 x)^2 = 4$ намираме, че $\log_3 x = 2$ и

$\log_3 x = -2$, откъдето $x_1 = 9$ и $x_2 = \frac{1}{9}$. Уравнението $(\log_3 x)^2 = -1$ няма корени. Следователно числата 9 и $\frac{1}{9}$ са единствените решения на даденото уравнение.

Задача 10. Да се реши уравнението $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение по следния начин: $(\sqrt{x})^{2\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$ или $(\sqrt{x})^{\log_{\sqrt{x}} (2x)^2} = 4$, т.е. $(2x)^2 = 4$, откъдето $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Но $x_1 < 0$, а $\sqrt{x} = 1$ е невъзможно. Следователно даденото уравнение няма корени.

Задача 11. Да се реши уравнението $3^{2+\log_2^2 x} = x^{3\log_2 3}$.

Решение: Допустимите стойности на уравнението са $x \in (0; +\infty)$. От условието следва, че $3^{2+(\log_2 x)^2} = (x^{\log_2 3})^3$. Като използваме формулата за смяна на основата, т.е. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, намираме, че

$$3^{2+(\log_2 x)^2} = (3^{\log_2 x})^3 \Leftrightarrow 3^{2+(\log_2 x)^2} = 3^{3\log_2 x} \Leftrightarrow 2 + (\log_2 x)^2 = 3\log_2 x.$$

Полагаме $\log_2 x = y$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$ с корени $y_1 = 2$ и $y_2 = 1$. От $\log_2 x = 2$ и $\log_2 x = 1$ намираме, че корените на даденото уравнение са числата 2 и 4.

Задача 12. Да се реши уравнението $x^{\frac{2\log_4 x}{x^2}} = \frac{8}{x^2}$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0; +\infty)$. Преобразуваме даденото уравнение:

$$x^{\frac{2\log_4 x}{x^2}} = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow x^{2\log_4 x + 2} = 8 \Leftrightarrow (4^{\log_4 x})^{2\log_4 x + 2} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2(\log_4 x)^2 + 2\log_4 x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\log_4 x - \frac{1}{2}\right)\left(\log_4 x + \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Оттук намираме, че $\log_4 x = \frac{1}{2}$ и $\log_4 x = -\frac{3}{2}$. Следователно решенията на даденото уравнение са $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{8}$.

Задача 13. Да се реши уравнението $(x^2 - 6x + 6)^{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = 1$.

Решение: Логаритъмът има смисъл при $x > 0$. От уравнението $(x^2 - 6x + 6)^{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = 1$ заключаваме, че основата е единица или показателят е нула, т.е. $x^2 - 6x + 6 = 1$ или $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$ при $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$. Корените на първото уравнение са $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$, а на второто са $x_3 = 3$ и $x_4 = \frac{1}{4}$. Всичките са решения на даденото уравнение.

Задача 14. Да се реши уравнението $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$.

Решение: Множеството от допустими стойности на уравнението се задава с неравенството $x > 0$. При решаване на уравнението ще използваме свойството, че равни степени с равни основи имат равни показатели. Ще разгледаме три случая:

1. основата на степента е равна на 0;
2. основата на степента е равна на 1;
3. показателите на степените са равни.

Разглеждането на тези случаи ще помогне да избегнем загубата на корени. Все пак придобити корени могат да се появят, защото във всеки от случаите ще решаваме уравненията независимо едно от друго и може да се получи така, че някои от получените корени да не принадлежат на множеството на допустимите стойности на даденото уравнение. Следователно след преминаване от равенството на степените към равенството на показателите и решаване на съответните уравнения трябва да проверим кои от получените корени принадлежат на множеството на допустимите стойности.

1) Нека $x-1=0$, т.е. $x=1$. При тази стойност на x левият израз в уравнението приема вида 0^0 . Изразът 0^0 няма смисъл, следователно $x=1$ не е корен.

2) Нека $x-1=1$, т.е. $x=2$. Очевидно $x=2$ е решение на даденото уравнение.

3) Остава да проверим показателите на степените $\lg^2 x - \lg x^2 = 3$. Това уравнение е еквивалентно на уравнението $\lg^2 x - 2 \lg x = 3$ при всички x , принадлежащи на множеството на допустимите стойности. Полагаме $y = \lg x$ и стигаме до квадратното уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$, чиито корени са $y_1 = 3$ и $y_2 = -1$. Оттук $x_1 = 1000$ и $x_2 = \frac{1}{10}$. Двете стойности на x са допустими и следователно са решения на даденото уравнение.

Задача 15. Да се реши уравнението $x^{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = a^{\log_{a^2} 4}$, където $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Решение: Множеството на допустимите стойности на x се задава с $x \in (0;+\infty)$. Като използваме свойствата на степените и логаритмите, даденото уравнение се преобразува по следния начин:

$$x^{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = a^{\log_{a^2} 4} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^{\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = (a^2)^{\frac{1}{2} \log_{a^2} 4} \Leftrightarrow x^2 - x = (a^2)^{\log_{a^2} \sqrt{4}} \Leftrightarrow x^2 - x = 2.$$

Получаваме, че $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$, но само $x_2 = 2$ е решение на даденото уравнение.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie. [Бородуля, И. (1968). *Показателни и логаритмични уравнения и неравенства*. Москва: Просвещение].
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В., и др. (1987). *Задачи по математика*. Москва: Наука].
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров (1996). *Математика X клас*. София: Просвета].
- Zapryanov, Z. & N. Raikov (2012). *How to solve difficult problems easily* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З. & Н. Райков (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета].
- Mavrova, R. & D. Boikina (2011). Using extremal values of transcendental functions in solving algebra problems (in Bulgarian). *Mathematics Plus*, 19 (74), 2, 43 – 46. [Маврова, Р. & Д. Бойкина (2011). Използване на екстремалните стойности на трансцендентни функции при решаване на задачи по алгебра. *Математика плюс*, 19 (74), 2, 43 – 46].
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения. *Математика и информатика*, 59, 2, 170 – 182].
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 5, 368 – 380. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Ексел в помощ при решаване на някои показателни уравнения. *Математика и информатика*, 59, 5, 368 – 380].
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Some groups of logarithmic equations by means of Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 6, 599 – 613. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Някои групи логаритмични уравнения с помощта на Ексел. *Математика и информатика*, 59, 6, 599 – 613].
- Stefanova, D. (2017). Exponential and trigonometric functions in transcendental equations (Part I). *Mathematics and Informatics*, 60, 1 57 – 63. [Стефанова, Д. (2017). Показателни и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (I част). *Математика и информатика*, 60, 1, 57 – 63].
- Stefanova, D. (2017). Logarithmic and trigonometric functions in transcendental equations (Part II). *Mathematics and Informatics*, 60, 4, 351 – 363. [Стефанова, Д. (2017). Логаритмични и тригонометрични

функции в трансцендентни уравнения (II част). *Математика и информатика*, 60, 4, 351 – 363].
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

LOGARITHMIC AND EXPONENTIAL FUNCTIONS IN TRANSCENDENTAL EQUATIONS (PART III)

Abstract. The paper is a continuation of the first parts on the topic of transcendental equations by the same author in issues 1/2017 and 4/2017 of the “Mathematics and Informatics” journal. Presently, combinations of exponential and logarithmic functions are considered. Different approaches for the solutions are proposed.

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Teacher in Mathematics
116, Tsar Ivan Asen II St.
4230 Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg