

КОНСТРУИРАНЕ НА ЕДИН ВИД АЛГЕБРИЧНИ КРИВИ В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

Веселин Ненков

Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“

Резюме. Във връзка с обобщението на една задача за определяне на геометрично място са получени два класа криви от степен $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) в равнината на даден триъгълник. Описани са общите точки на тези криви и два правилни многоъгълника, определени от пресечните точки на кривите и описаната около триъгълника окръжност.

Keywords: triangle; circle; hyperbola; regular polygon; curve of $(n+1)$ -th degree

Ако $P(x, y)$ е полином на две променливи x и y , а координатите (x, y) на точките M спрямо равнинна Декартова координатна система удовлетворяват уравнението $P(x, y) = 0$, се казва, че точките M принадлежат на алгебрична крива k от степен $n = \deg P(x, y)$, а уравнението $P(x, y) = 0$ се нарича уравнение на алгебричната крива k . Едни от най-популярните алгебрични криви се описват с уравнения от вида

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Тези криви се наричат криви от втора степен. Кривите от втора степен притежават редица интересни свойства. Две специални криви от този вид са свързани с решението на следната

Задача 1. Дадени са триъгълник ABC и правите p_a и p_b , минаващи съответно през върховете A и B на $\triangle ABC$. Ако $P = p_a \cap p_b$ и $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CBP = \theta$, да се определи геометричното място на точката P , когато p_a описва множеството на всички прави през върха A на $\triangle ABC$.

Оказва се, че търсеното геометрично място се състои от две криви от втора степен, всяка от които зависи от ориентацията на $\sphericalangle PAC = \theta$. Ще разгледаме поотделно двата случая.

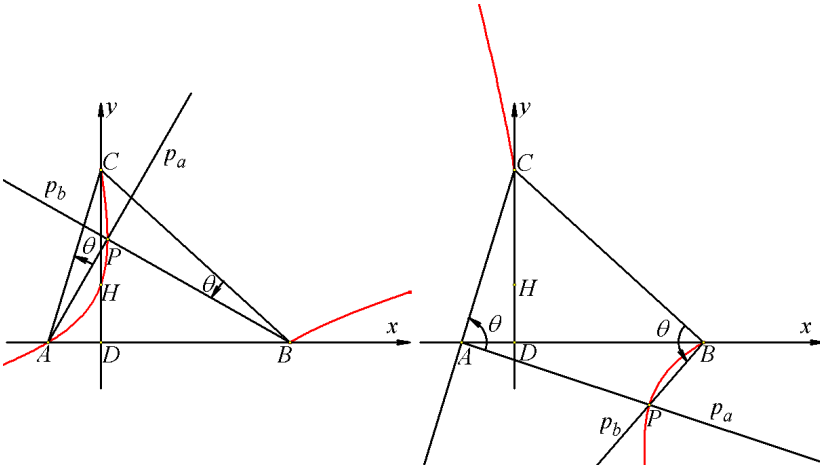
1. Хипербола, определена от положителната ориентация на $\sphericalangle PAC = \theta$. Нека при завъртане на правата p_a около A на ъгъл θ в посока, обратна на часовниковата стрелка, се получава $p_a \equiv AC$, а при завъртане на правата

BC около B на ъгъл θ в посока, обратна на часовниковата стрелка, се получава $BC \equiv p_b$. Въвеждаме означенията $\sphericalangle CAB = \alpha$ и $\sphericalangle CBA = \beta$. За ъгъл θ имаме две възможности: $0 \leq \theta \leq \alpha$ (фиг. 1) и $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$ (фиг. 2). Ще разгледаме по-специално случая, при който $0 \leq \theta \leq \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Нека CD ($D \in AB$) е височината на $\triangle ABC$ към AB . Разглеждаме Декартова координатна система Oxy , спрямо която $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и $C(0, c)$ (фиг. 1). Тогава $\sphericalangle PAB = \alpha - \theta$, а ъгълът, който сключва правата BP с положителната посока на Ox , е $\pi - (\beta - \theta)$. Оттук получаваме, че Декартовите уравнения на правите AP и BP са съответно

$$AP: y = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \cdot x - \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \cdot a, \quad BP: y = -\operatorname{tg}(\beta - \theta) \cdot x + \operatorname{tg}(\beta - \theta) \cdot b.$$

От тези уравнения намираме, че координатите (x, y) на P се изразяват с равенствата

$$x = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \theta) \cdot a + \operatorname{tg}(\beta - \theta) \cdot b}{\operatorname{tg}(\alpha - \theta) + \operatorname{tg}(\beta - \theta)}, \quad y = \frac{(b - a) \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\alpha - \theta) + \operatorname{tg}(\beta - \theta)}.$$



Фигура 1

Фигура 2

От последните равенства намираме $\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{y}{x - a}$, $\operatorname{tg}(\beta - \theta) = -\frac{y}{x - b}$.

Тъй като $\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}$, $\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{c}{a}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b}$, то търсеното геометрично място е част от кривата от втора степен:

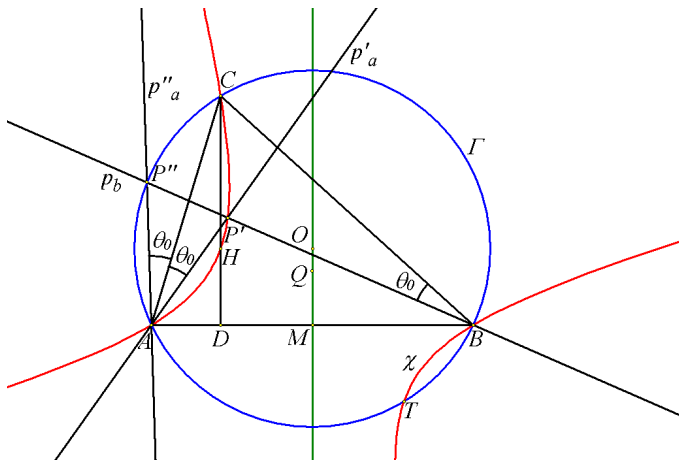
$$(2) \quad \chi: \begin{aligned} &c(a+b)x^2 + 2(ab-c^2)xy - c(a+b)y^2 - \\ &-c(a+b)^2x - (a+b)(ab-c^2)y + abc(a+b) = 0. \end{aligned}$$

Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен, то $a+b=0$ и от (2) следва, че $\chi: xy=0$. В този случай търсеното геометрично място се състои от симетралата на основата AB (тя съвпада с CD) и правата AB . По-нататък, ако крива от втора степен е зададена с уравнение (1), то величините

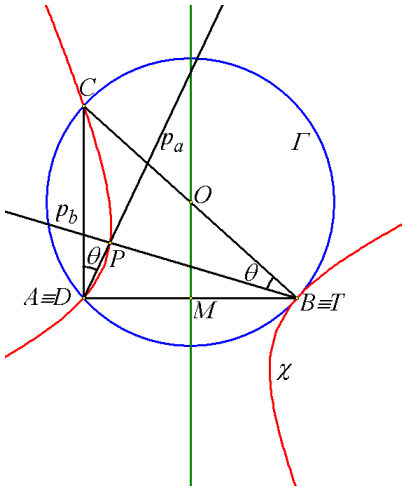
$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ и } I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

са инварианти на кривата. При $a+b \neq 0$ за инвариантите на χ от (2) имаме $I_1 = 0$, $I_2 = -(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) < 0$, $I_3 = \frac{1}{4}c(a+b)(a-b)^2(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \neq 0$. Следователно χ е хипербола.

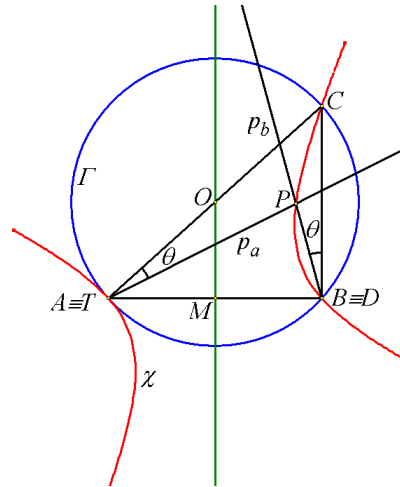
Така получихме, че когато $0 \leq \theta \leq \alpha$, точката P описва част от хипербола χ (фиг. 1). Лесно се вижда, че при $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$ координатите на P отново удовлетворяват уравнението (2). Това означава, че в този случай точката P описва останалата част от хиперболата χ (фиг. 2). Така окончателно получаваме, че при $CA \neq CB$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ точката P описва хиперболата χ , чието уравнение спрямо Dx, y е (2) (фиг. 3).



Фигура 3



Фигура 4



Фигура 5

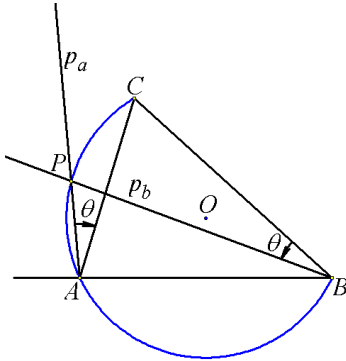
Сега да отбележим, че при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имаме $a = 0$ и $\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{y}$. Оттук, както преди, намираме уравнението $bx^2 - 2cxy - by^2 - b^2x + cby = 0$, което се получава от (2) при $a = 0$ (фиг. 4). Аналогично при $\beta = \frac{\pi}{2}$ имаме $b = 0$ и $\operatorname{tg} \theta = -\frac{x}{y}$, а уравнението на търсената крива е $ax^2 - 2cxy - ay^2 - a^2x + acy = 0$, което се получава от (2) при $b = 0$ (фиг. 5).

Като вземем предвид последните особености, заключаваме, че когато ориентираният $\angle PAC$ се изменя в положителна посока, търсеното геометрично място се състои от две перпендикулярни прави (когато $CA = CB$) или хипербола χ (когато $CA \neq CB$) (фиг. 3).

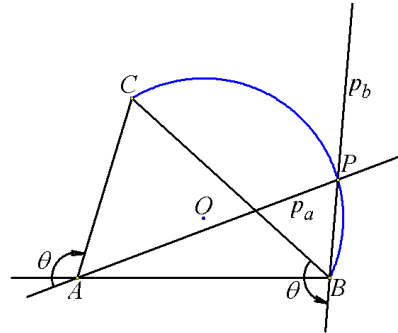
2. Окръжност, определена от отрицателната ориентация на $\angle PAC = \theta$.

Нека при завъртане на правата l_a около A на ъгъл θ по посока на часовниковата стрелка се получава $l_a \equiv AC$, а при завъртане на правата BC около B на ъгъл θ в посока, обратна на часовниковата стрелка, се получава $BC \equiv p_b$. Лесно се вижда, че отсечката PC се вижда под еднакви ъгли. Това означава, че точката P описва дъга от описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ . По-точно, когато $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$, точката P описва дъгата $\widehat{BC}$, съдържаща A (фиг. 6), а когато $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$, точката P описва дъгата $\widehat{BC}$, несъдържаща A (фиг. 7). Следователно, когато ориентираният $\angle PAC$ се изменя в отрицателна посо-

ка, търсеното геометрично място е описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ (фиг. 3).



Фигура 6



Фигура 7

3. Пълно решение на задача 1. Сега да се върнем към решението на задача 1. За всеки фиксиран ъгъл $\theta = \theta_0$ съществува права p'_a , която след завъртане в положителна посока на ъгъл θ_0 около A ще съвпадне с правата AC (фиг. 3). Съществува и единствена права p''_a , която при завъртане на ъгъл θ_0 по посока на часовниковата стрелка около A ще съвпадне с правата AC (фиг. 3). При завъртането си в положителна посока около A правата p_a заема положение p'_a , което сключва ъгъл θ_0 с правата AC и пресича p_b в точка P' . При завъртането си по посока на часовниковата стрелка около A правата p_a заема положение p''_a , което сключва ъгъл θ_0 с правата AC и пресича p_b в точка P'' . Правите p'_a и p''_a са симетрични спрямо правата AC . Следователно при въртенето си около A в която и да е посока правата p_a заема две положения, които пресичат правата p_b в две точки P' и P'' (фиг. 3). Едната от тях описва хиперболатата χ (или двойката прави AB и CD), а другата – описаната за $\triangle ABC$ окръжност Γ (фиг. 3). Така получаваме следния извод. *Когато правата p_a описва снопа прави с център върха A , точката $P = p_a \cap p_b$ описва крива от четвърта степен, която се разпада на две криви от втора степен – хипербола и окръжност (фиг. 3).*

4. Няколко свойства на хиперболатата χ . Лесно се забелязва, че координатите на върховете $A(a,0)$, $B(b,0)$ и $C(0,c)$ удовлетворяват уравнението (2). Следователно хиперболатата χ е описана за $\triangle ABC$ (фиг. 3, 4, 5). Освен това координатите на ортоцентъра $H\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$ на $\triangle ABC$ също удовлетворяват (2), което означава, че ортоцентърът също е точка от χ (фиг. 3, 4, 5). По-нататък лесно се забелязва, че средата M на

страната AB е център на χ (фиг. 3, 4, 5). Затова точката T , която е симетрична на H спрямо M , лежи върху χ . Известно е обаче, че точката T е симетрична на върха C спрямо центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ . Следователно T е четвъртата обща точка на χ и Γ (фиг. 3, 4, 5).

В (Nenkov, 2005) е показано, че когато една точка Q описва права в равнината на $\triangle ABC$, точката P , изогонално спрегната на Q спрямо $\triangle ABC$, описва крива от втора степен, описана за $\triangle ABC$. Обратно, ако P описва χ , то изогонално спрегнатата ѝ точка Q описва права. Тъй като χ минава през ортоцентъра H , то тази права минава през изогоналния ѝ образ O – център на описаната окръжност Γ . Освен това изогоналният образ на правата CT е височината CD . Следователно правата, която ни интересува, е успоредна на CD . От намерените две свойства следва, че изогоналният образ на χ е симетралата на страната AB (фиг. 3, 4, 5).

Да отбележим още, че след известни преобразувания на координатната система Dxy уравнението (2) може да се приведе спрямо подходяща координатна система MXY във вида $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$, където λ_1 и λ_2 са

корените на уравнението $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$. Корените на характеристич-

ното уравнение са $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} = \pm \sqrt{I_2}$. Следователно спря-

мо MXY хиперболата χ има уравнение $X^2 - Y^2 = \frac{I_3}{-I_2 \sqrt{-I_2}}$. Последното

уравнение показва, че χ е равнораменна хипербола. Освен това лесно се забелязва, че $BC = b^2 + c^2$, $AC = a^2 + c^2$, $MD = \frac{|a+b|}{2}$ и $S = \frac{(b-a)c}{2}$ (S е

лицето на $\triangle ABC$). Затова от получените по-рано изрази за I_2 и I_3 получаваме

$\frac{I_3}{-I_2 \sqrt{-I_2}} = \pm \frac{AB \cdot MD}{BC \cdot AC} \cdot S$. Следователно реалната и имагинерната полуос

на χ са равни на $\sqrt{\frac{AB \cdot MD}{BC \cdot AC}} \cdot S$.

5. Геометрични места от по-висок порядък. Следващият етап от изследванията ни, свързани със задача 1, е извършването на едно нейно обобщение. Това обобщение е съдържанието на следващата

Задача 2. Дадени са триъгълник ABC и правите p_a и p_b , минаващи съответно през върховете A и B на ΔABC . Ако $P = p_a \cap p_b$, $\sphericalangle PAC = \theta$ и $\sphericalangle CBP = n\theta$, да се определи геометричното място на точката P , когато p_a описва множеството на всички прави през върха A на ΔABC .

Разглеждаме геометричните фигури в комплексната равнина спрямо Гаусова координатна система, единичната окръжност на която е описаната около ΔABC окръжност Γ . Афиксите на точките, както обикновено, ще означаваме със съответните им малки букви.

Ако векторът $\overrightarrow{AP}$ се завърти в положителна посока около A на ъгъл θ и след това посоката му съвпадне с посоката на AC , то е изпълнено равенството $\frac{p-a}{|p-a|} \cdot e^{i\theta} = \frac{c-a}{|c-a|}$. След повдигане на двете страни на последното равенство в квадрат и известни преобразувания получаваме

$$(3) \quad e^{i.2\theta} = \frac{c(1-a\bar{p})}{p-a}.$$

Аналогично при завъртане на $\overrightarrow{AP}$ в отрицателна посока около A на ъгъл θ и след това посоката му съвпадне с посоката на AC се получава равенството

$$(4) \quad e^{-i.2\theta} = \frac{p-a}{c(1-a\bar{p})}.$$

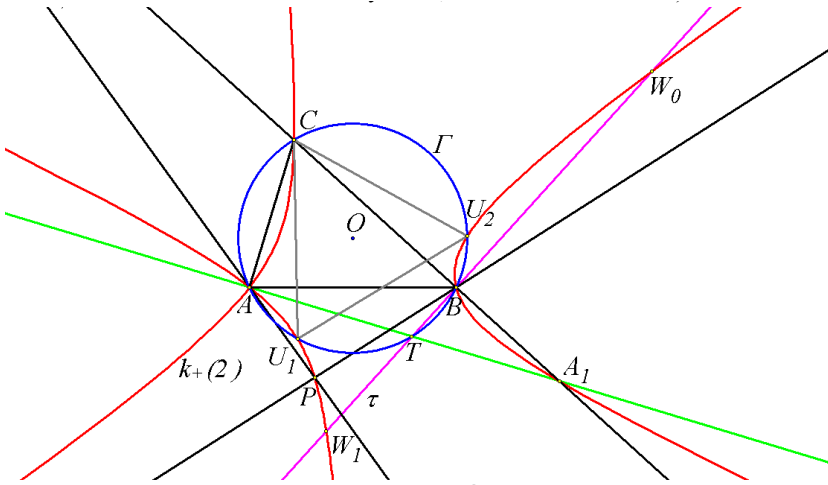
По същия начин завъртането на $\overrightarrow{BC}$ в положителна посока на ъгъл $n\theta$, докато посоката му съвпадне с посоката на BP , води до равенството

$$(5) \quad e^{n(i.2\theta)} = \frac{p-b}{c(1-b\bar{p})}.$$

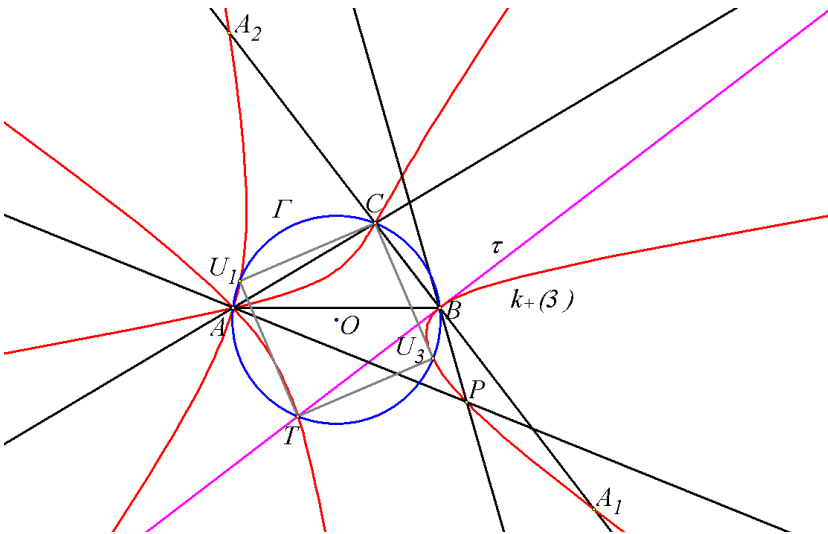
Сега от (3) и (5) получаваме равенството $c^{n+1}(1-a\bar{p})^n(1-b\bar{p}) = (p-a)^n(p-b)$. Следователно точката P принадлежи на крива $k_+(n)$ от $(n+1)$ -ва степен с уравнение

$$(6) \quad k_+(n): c^{n+1}(1-a\bar{z})^n(1-b\bar{z}) - (z-a)^n(z-b) = 0.$$

(На фиг. 8 и 9 са показани съответно случаите, когато $n = 2$ и $n = 3$.)



Фигура 8

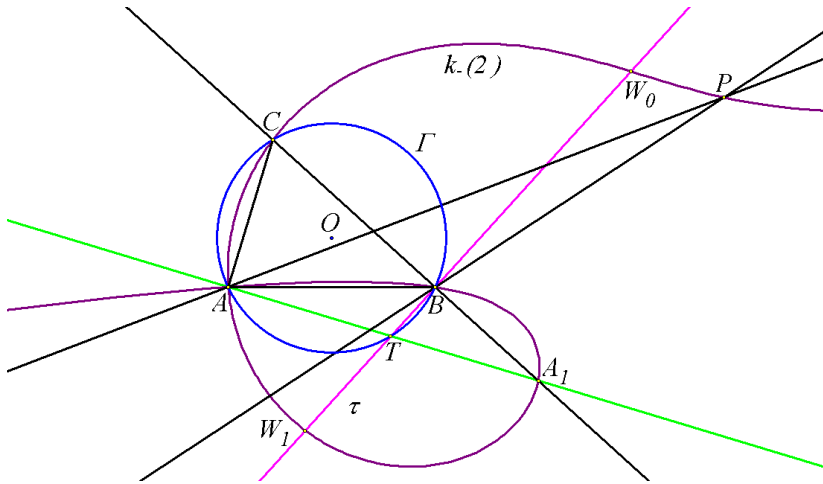


Фигура 9

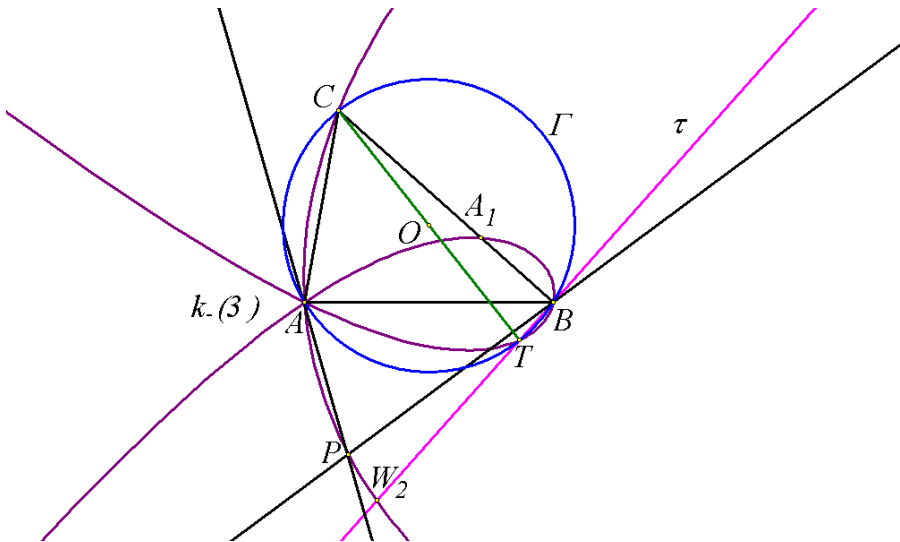
Аналогично от (4) и (5) получаваме, че P принадлежи на крива $k_-(n)$ от $(n+1)$ -ва степен с уравнение

$$(7) \quad k_-(n): c^{n-1}(1-a\bar{z})^n(z-b)-(z-a)^n(1-b\bar{z})=0.$$

(На фиг. 10 и 11 са показани съответно случаите, когато $n=2$ и $n=3$).



Фигура 10



Фигура 11

От получените резултати следва: Когато правата p_a описва снопа прави с център върха A , точката $P = p_a \cap p_b$ описва крива $k(n) = k_+(n+1) \cup k_-(n+1)$ от степен $2n+2$, която се разпада на две криви от $(n+1)$ -ва степен.

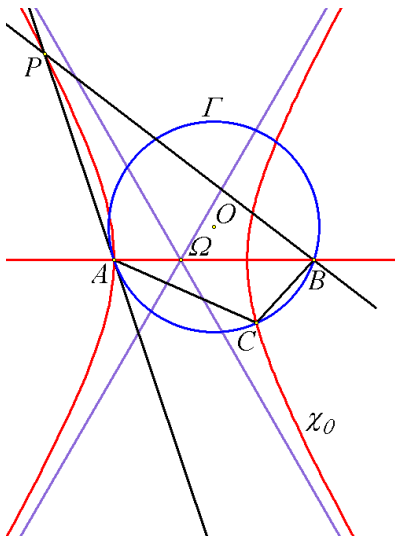
При $n = 1$ получаваме, че кривите $k_+(1)$ и $k_-(1)$ имат следните уравнения

$$k_+(1): z^2 - abc^2\bar{z}^2 - (a+b)z + c^2(a+b)\bar{z} + ab - c^2 = 0, \quad k_-(1): z\bar{z} = 1.$$

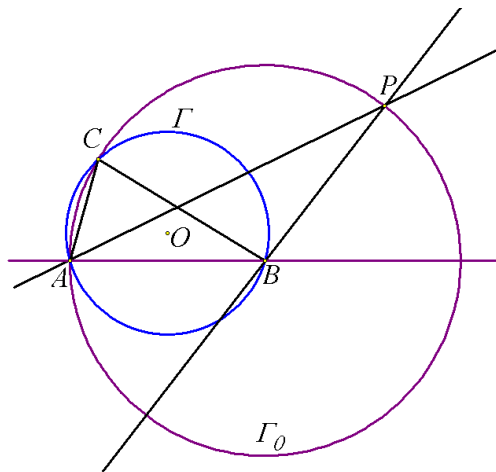
Кривата $k_{-}(1)$ съвпада с Γ . Ако $BC = AC$, изпълнено е равенството $c^2 = ab$, при което за кривата $k_{+}(1)$ получаваме уравнението $(z + ab\bar{z} - a - b)(z - ab\bar{z}) = 0$. Първият множител съответства на правата AB , а вторият – на симетралата на AB . Така получаваме, че при $BC = AC$ кривата $k_{+}(1)$ се състои от две прави. Когато $BC \neq AC$, т.е. $c^2 \neq ab$, $k_{+}(1)$ е хипербола (както е показано по-рано).

6. Някои свойства на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$. Оказва се, че намерените криви $k_+(n)$ и $k_-(n)$ притежават някои интересни свойства. За да определим някои от тях, в началото ще намерим пресечните точки на $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с правите AB , AC и BC . Уравненията на тези прави са следните: $AB: z + ab\bar{z} - a - b = 0$, $AC: z + ac\bar{z} - a - c = 0$ и $BC: z + bc\bar{z} - b - c = 0$. От уравненията на $k_+(n)$ и AB намираме, че общите им точки удовлетворяват условието

$$(8) \quad (c^{n+1} - ab^n)(1 - a\bar{z})^n(1 - b\bar{z}) = 0.$$



Фигура 12



Фигура 13

Ако за ΔABC не е изпълнено $c^{n+1} - ab^n = 0$, от равенството (8) следва, че кривата $k_+(n)$ минава n пъти през върха A и един път през върха B . Гео-

метричният смисъл на равенството $c^{n+1} - ab^n = 0$ е следният. Ако точките A и B са фиксирани върху окръжността Γ с център O , то върхът C на $\triangle ABC$ се получава чрез завъртане на точката A около O в положителна посока на ъгъл, равен на $\frac{n}{n+1} \angle BOA$. Ако за $\triangle ABC$ е изпълнено $c^{n+1} - ab^n = 0$, от равенството (8) следва, че за този специален триъгълник кривата $k_+(n)$ се състои от правата AB и крива от n -та степен. В случая, в който $n = 2$, кривата $k_+(2)$ се състои от правата AB и хипербола χ_0 , минаваща през върховете A и C (фиг. 12). Хиперболовата χ_0 има за център точката Ω , за която е изпълнено равенството $\Omega B : \Omega A = -2$. Един от върховете на χ_0 е върхът A на $\triangle ABC$, а върхът B е единият от фокусите на χ_0 (фиг. 12).

От уравненията на $k_+(n)$ и AB намираме, че общите им точки удовлетворяват условието

$$(9) \quad (b^n - ac^{n-1})(1 - a\bar{z})^n (1 - b\bar{z}) = 0.$$

Ако за $\triangle ABC$ не е изпълнено $b^n - ac^{n-1} = 0$, от равенството (9) следва, че кривата $k_+(n)$ минава n пъти през върха A и един път през върха B . Геометричният смисъл на равенството $b^n - ac^{n-1} = 0$ е следният. Ако точките A и B са фиксирани върху окръжността Γ с център O , то върхът C на $\triangle ABC$ се получава чрез завъртане на точката A около O в положителна посока на ъгъл, равен на $\frac{n}{n-1} \angle BOA$. Ако за $\triangle ABC$ е изпълнено $b^n - ac^{n-1} = 0$ ($n \geq 2$), от равенството (9) следва, че за такъв специален триъгълник кривата $k_-(n)$ се състои от правата AB и крива от n -та степен. В случая, в който $n = 2$, кривата $k_-(2)$ се състои от правата AB и окръжност Γ_0 , минаваща през върховете A и C на $\triangle ABC$ (фиг. 13). Освен това $BA = BC$, което означава, че окръжността Γ_0 има за център точката B (фиг. 12).

По-нататък от уравненията на $k_-(n)$ и AC намираме, че общите им точки удовлетворяват условието $c^n (a - b)(1 - a\bar{z})^n (1 - c\bar{z}) = 0$. Оттук се вижда, че $k_-(n)$ минава n пъти през върха A и един път през върха C . От уравненията на $k_-(n)$ и AC намираме, че общите им точки удовлетворяват условието $c^{n-1} (a - b)(1 - a\bar{z})^n (1 - c\bar{z}) = 0$. Следователно $k_-(n)$ минава n пъти през върха A и един път през върха C .

От получените дотук резултати стигаме до следните изводи.

1) Всяка от кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ минава през върха A по n пъти (фиг. 8 – 16).

2) Всяка от кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ минава през върховете B и C точно по един път (фиг. 8 – 16).

3) Съществуват специални триъгълници, при които кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ от $(n+1)$ -ва степен се разпадат на крива от n -та степен и правата AB (фиг. 12, 13).

Общите точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ и правата BC удовлетворяват равенството $(1 - b\bar{z})[c^n(1 - a\bar{z})^n - (b + c - a - bc\bar{z})^n] = 0$. Това равенство показва, че двете криви $k_+(n)$ и $k_-(n)$ имат едни и същи общи точки с правата BC . Първият множител потвърждава вече установения факт, че кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ минават през върха B . След приравняване на нула на втория множител получаваме равенството $\left[\frac{b + c - a - ba_m}{c(1 - aa_m)}\right]^n = 1$. Последното е уравнение на деление на единичната окръжност на n еднакви части.

Затова афиксите a_m на пресечните точки A_m на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с правата BC удовлетворяват равенството $\frac{b + c - a - bc\bar{z}_m}{c(1 - a\bar{z}_m)} = e^{i\frac{2m\pi}{n}}$, където $m = 0, 1, \dots, n-1$. Оттук получаваме

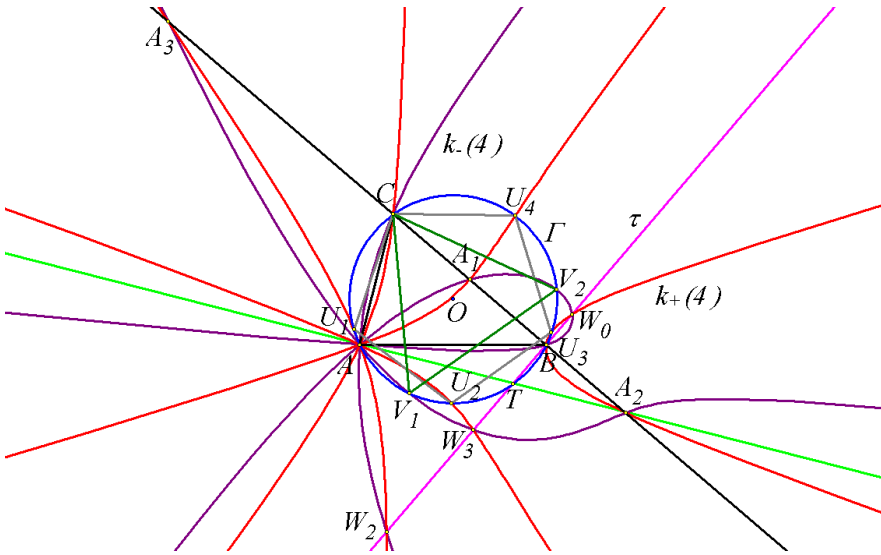
$$(10) \quad \bar{a}_m = \frac{c.e^{i\frac{2m\pi}{n}} + a - b - c}{a.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - b}, \quad a_m = \frac{(ab - bc + ca)c.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - ab}{c(a.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - b)}.$$

Сега да определим на какъв ъгъл φ трябва да се завърти правата AC около A , така че да се получи правата AA_m . За целта е необходимо да е изпълнено равенството $\frac{c - a}{|c - a|}.e^{-i\varphi} = \frac{a_m - a}{|a_m - a|}$. След повдигане в квадрат имаме

$$e^{-i2\varphi} = \frac{a_m - a}{c(1 - a\bar{a}_m)}. \text{ Оттук, като използваме (10), намираме } e^{-i2\varphi} = e^{i\frac{2m\pi}{n}}.$$

Следователно $\varphi = -\frac{m\pi}{n}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$). Така стигаме до следния извод.

4) Ако правата l_m се получава чрез ротация на правата AC около точката A в отрицателна посока на ъгъл $\frac{m\pi}{n}$, то $A_m = l_m \cap BC$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) (фиг. 8 – 16).



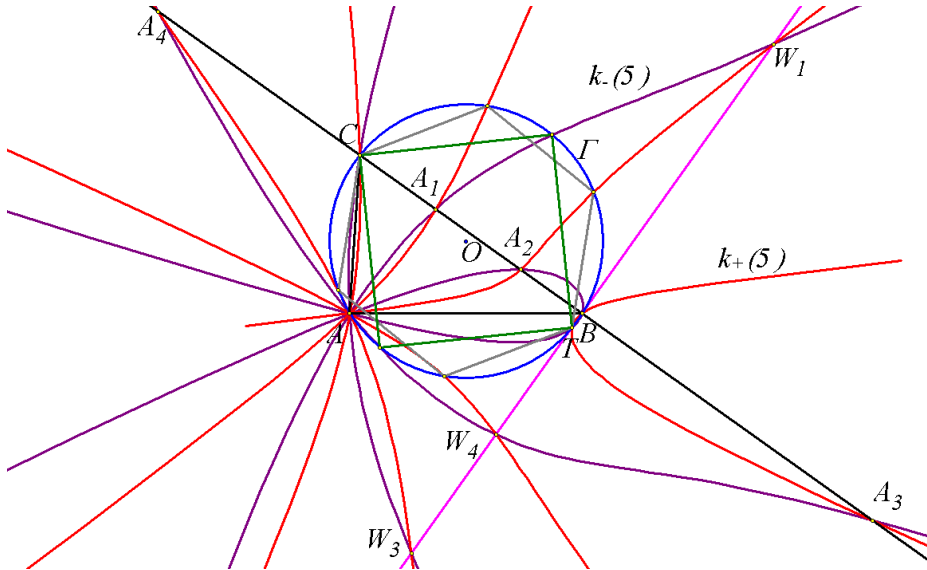
Фигура 14

Получихме, че кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ имат общи точки върху правата BC . Затова възниква въпросът за определяне на всички общи точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$. За да отговорим на този въпрос, решаваме системата уравнения, определена от (6) и (7). Получаваме, че общите точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ удовлетворяват равенството $(z + b\bar{c}z - b - c)(z - b\bar{c}z - b + c) = 0$. Първият множител води към вече изучените общи точки на кривите с правата BC . Вторият множител води към общите точки на кривите с правата τ , определена с уравнението $z - b\bar{c}z - b + c = 0$, която е перпендикулярна на BC . Остава да опишем общите точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с правата τ . Преди това обаче да отбележим, че правата τ минава през разгледаната по-рано точка T , която е симетрична на C спрямо центъра O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ . При $n=1$ установихме, че $k_+(1) = \chi$ минава през точката T . Затова е интересно да се установи дали това свойство се запазва за всяко $n \geq 2$. Като заместим афикса $t = -c$ на точката T в уравненията (6) и (7), стигаме до извода, че точката T принадлежи и на двете криви, когато е изпълнено равенството $(c+a)^n(b+c)[1+(-1)^n] = 0$. Последното е изпълнено само когато n е нечетно число. Така получихме

5) Точката T принадлежи на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ тогава и само тогава, когато n е нечетно число (фиг. 9, 11, 15).

Когато n е четно, точката T притежава следното свойство.

б) Ако n е четно число, точките A , T и $A_{n/2}$ лежат на една права (фиг. 8, 10, 14, 16).



Фигура 15

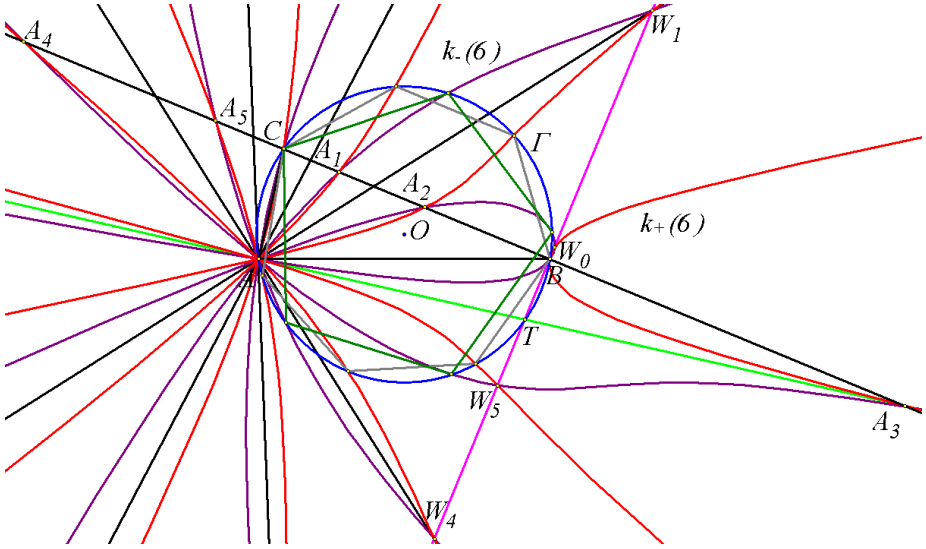
Сега преминаваме към определяне на общите точки на $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с правата τ . След заместване на $\bar{z} = \frac{z+c-b}{bc}$ в (6) (или (7)) получаваме

$(z-b)[b^n(z-a)^n + (ab+bc-ca-az)^n] = 0$. Първият множител води до вече добре известната обща точка B на τ с двете криви. Вторият множител води до две възможности: $\left[\frac{b(z-a)}{az-bc+ca-ab}\right]^n = 1$ при нечетно n и

$\left[\frac{b(z-a)}{az-bc+ca-ab}\right]^n = -1$ при четно n . Затова афиксите w_m на пресечните точки W_m на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с правата τ удовлетворяват едно от равенствата $\frac{b(w_m-a)}{a_m-bc+ca-ab} = e^{i\frac{2m\pi}{n}}$ (нечетно n) или $\frac{b(w_m-a)}{a_m-bc+ca-ab} = e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}}$ (четно n), където $m = 0, 1, \dots, n-1$. Оттук получаваме

$$w_m = \frac{(bc - ca + ab)c.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - ab}{a.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - b}, \quad \bar{w}_m = \frac{c.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - a + b - c}{c(a.e^{i\frac{2m\pi}{n}} - b)} \text{ (нечетно } n),$$

$$w_m = \frac{(bc - ca + ab)c.e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} - ab}{a.e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} - b}, \quad \bar{w}_m = \frac{c.e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} - a + b - c}{c(a.e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} - b)} \text{ (четно } n).$$



Фигура 16

Сега да определим на какъв ъгъл ψ трябва да се завърти правата AC около A , така че да се получи правата AW_m . За целта е необходимо да е изпълнено равенството $\frac{c-a}{|c-a|}e^{-i\psi} = \frac{w_m-a}{|w_m-a|}$. Оттук, като използваме горните равенства, намираме $e^{i2\psi} = -e^{i\frac{2m\pi}{n}} = e^{i(\frac{2m\pi}{n} + \pi)}$ (нечетно n) и $e^{i2\psi} = -e^{i\frac{(2m+1)\pi}{n}} = e^{i(\frac{(2m+1)\pi}{n} + \pi)}$ (четно n). Следователно $\psi = \frac{m\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$ (нечетно n) и $\psi = \frac{(2m+1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}$ (четно n) ($m = 0, 1, \dots, n-1$). Така стигаме до следните изводи.

7) Ако n е нечетно и правата q_m се получава чрез ротация на правата AC около точката A в положителна посока на ъгъл $\frac{m\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$, то $W_m = q_m \cap \tau$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) (фиг. 9, 11, 15).

8) Ако n е четно и правата q_m се получава чрез ротация на правата AC около точката A в положителна посока на ъгъл $\frac{(2m+1)\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}$, то $W_m = q_m \cap \tau$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) (фиг. 8, 10, 14, 16).

От всички изследвания следва, че общите точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ са A , $A_0 \equiv C$, $A_1, \dots, A_{n-1}$, B , $W_0 (\equiv T)$, $W_1, \dots, W_{n-1}$. Следователно кривите имат $2n+2$ общи точки.

В свойство 5) установихме, че точката T от описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ принадлежи на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$. Върховете A , B и C също са общи точки на тези криви с Γ . Затова е любопитно да се определят всички общи точки на кривите $k_+(n)$ и $k_-(n)$ с окръжността Γ . От $z\bar{z} = 1$ и (6) получаваме, че общите точки на $k_+(n)$ и Γ удовлетворяват равенството $(z-a)^n(z-b)(z^{n+1}-c^{n+1}) = 0$. Първите два множителя водят до вече известните решения. Остава да разгледаме уравнението $z^{n+1}-c^{n+1} = 0$. Това уравнение записваме във вида $\left(\frac{z}{c}\right)^{n+1} = 1$. Последното е уравнение на деление на окръжността на $n+1$ равни части. Следователно неговите решения са

$u_m = c \cdot e^{i \cdot \frac{2m\pi}{n+1}}$, които са върхове на правилен $n+1$ -ъгълник, един от върховете на който е точката C . Аналогично се намират общите точки $v_m = c \cdot e^{i \cdot \frac{2m\pi}{n-1}}$ на $k_-(n)$ и Γ , които са върхове на правилен $n-1$ ъгълник, един от върховете на който е C . Така установихме следното:

9) Общите точки на $k_+(n)$ с Γ са A , B и върховете на правилен $n+1$ ъгълник, един от върховете на който е точката C (фиг. 8, 9, 14, 15, 16).

10) Общите точки на $k_-(n)$ с Γ са A , B и върховете на правилен $n-1$ ъгълник, един от върховете на който е точката C (фиг. 14, 15, 16).

Накрая ще добавим още две свойства, свързани с точката T .

11) Ако n е нечетно число, правилните многоъгълници имат общ връх в точката T , който е противоположен на C (фиг. 15).

12) Ако n е четно число, правилните многоъгълници имат страни, които са успоредни на допирателната към Γ в точката T (фиг. 14, 16).

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjanskaja Shkola. [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Grozdev, S. V. & Nenkov (2012). *About the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентра в равнината и пространството*. София: Архимед.]
- Martinov, N. (1989). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Modenov, P. (1969). *Analytical Geometry*. Moscow: Moscow University. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Московский университет.]
- Nenkov, V. (2005). Some loci in the plane of a triangle, *Mathematics Plus*, 1, 53 – 59 (ISSN 0861-8321). [Ненков, В. (2005). Някои геометрични места в равнината на триъгълника, *Математика плюс*, 1, 53 – 59 (ISSN 0861-8321).]
- Stanilov, G. (1979). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka I Izkustvo. [Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).
- Sergeeva, T., M. Shabanova, & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian). [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]

CONSTRUCTION OF A TYPE OF ALGEBRAIC CURVES IN THE PLANE OF A TRIANGLE

Abstract: Two classes of curves of $(n+1)$ -th degree ($n \in \mathbb{N}$) are obtained in the plane of a given triangle in connection with the generalization of a problem on locus determination. What are described are the common points of those curves and two regular polygons determined by the points of intersection of the curves and the circumcircle of the triangle.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg