

## КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Рубриката се води от д-р Светлозар Дойчев  
и д-р Веселин Ненков

**Задача 1.** Покажете, че кубът на всяко рационално число може да се представи като сума от кубовете на три рационални числа.

*Йонуц Иваненску, Крайова, Румъния*

**Задача 2.** Във вътрешността на триъгълник  $ABC$  е взета точка  $P$  и през нея са построени отсечки  $A_1B_2$ ,  $B_1C_2$  и  $C_1A_2$ , съответно успоредни на  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , като  $A_1, A_2 \in BC$ ,  $B_1, B_2 \in CA$  и  $C_1, C_2 \in AB$ .

а) Да се докаже, че лицата на триъгълниците  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  са равни.

б) Да се определи положението на  $P$  така, че лицата на  $\Delta A_1B_1C_1$  и  $\Delta A_2B_2C_2$  да бъдат максимални.

*Христо Лесов, Казанлък*

**Задача 3.** Нека  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  е редица от точки върху полуокръжността  $k$  с диаметър  $OA_0 = 1$ , дефинирана с равенствата  $A_0A_n = \lambda n \cdot OA_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), където  $\lambda$  е дадено положително число. Да се докаже, че:

а) правите  $A_iA_{n-i} \left( i = 0, 1, \dots, \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right)$  минават през една точка  $T_n$ ;

б) точките  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) лежат на една права.

*Хаим Хаимов, Варна*

Краен срок за изпращане на решения 31 юли 2012 г.

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2010

**Задача 1.** Да се намерят естествените числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , за които са верни равенствата: а)  $x^2 + y^2 + z^4 = 2010$ ; б)  $x^2 + y^4 + z^4 = 2010$ ; в)  $x^4 + y^4 + z^4 = 2010$ .

*Христо Лесов, Казанлък*

*Решение:* Ясно е, че ако намерим всички решения на уравнението от а), ще определим веднага и решенията на уравненията от б) и в). Като използваме, че  $7^4 = 2401 > 2010$ , както и сравнения по модул 3, намираме, че числото  $z$  може да приема стойностите 1; 2; 4 и 5. Остава да намерим представянията на числата  $2010 - 1^4 = 2009$ ,  $2010 - 2^4 = 1994$ ,  $2010 - 4^4 = 1754$  и  $2010 - 5^4 = 1385$  като сбор от два квадрата. По този начин достигаем до решенията (4;37;5), (37;4;5), (19;32;5), (32;19;5), (23;35;4), (35;23;4), (25;37;2), (37;25;2), (28;35;1), (35;28;1). Оттук веднага следва, че уравнението от б) има решения (37;2;5) и (37;5;2), а уравнението от в) няма решение.

**Задача 2.** Корените на уравнението  $f(x) = x^3 + Ax + Bx + C = 0$  са три различни квадрата на естествени числа. Да се докаже, че съществува естествено число  $P$  такова, че  $|f(p)|$  е точен квадрат на цяло число.

*Николай Белухов, студент*

*Решение (Николай Белухов):* Да означим корените на уравнението  $f(x) = 0$  с  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ . Тогава  $f(x) = (x - a^2)(x - b^2)(x - c^2)$ . Нека за определеност  $a$  да е най-голямото измежду трите числа. Полагаме  $p = ab - bc + ca = b(a - c) + ca > 1$ ; очевидно  $p$  е естествено число. След заместване получаваме  $|f(ab - bc + ca)| = |(b - a)(a - c)(a - b)(b + c)(a - c)(b + c)| = [(a - b)(a - c)(b + c)]^2$ , което очевидно е точен квадрат. С това задачата е решена: една възможно стойност за  $p$  е  $p = ab - bc + ca$ .

**Задача 3.** Да се докаже, че за произволни реални положителни числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  е вярно неравенството:

$$(b+c)^2 a^4 - 2(b+c)(b^2+c^2)a^3 + (b+c)^2(b^2+c^2)a^2 - 2bc(b+c)(b-c)^2 a + b^2 c^2 (b-c)^2 > 0.$$

*Веселин Ненков, Бели Осъм*

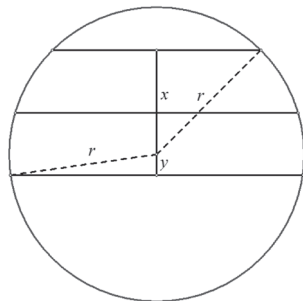
*Решение (Веселин Ненков):* Лесно се проверява, че разглежданото неравенство е еквивалентно с неравенството

$$\left[ (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + \frac{bc(b+c)(b-c)^2}{b^2+c^2} \right]^2 + \frac{8b^3c^3}{b^2+c^2}a^2 + \frac{4b^4c^4(b-c)^2}{(b^2+c^2)^2} > 0.$$

Последното неравенство е очевидно.

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2010

**Задача 1.** В окръжност са построени две успоредни хорди с дължини съответно 10 и 14. Разстоянието между хордите е 6. Да се намери дължината на хордата в окръжността, която е успоредна на двете дадени и се намира на разстояние 3 от всяка от тях.



*Решение:* Нека разстоянията от центъра на окръжността до хордите с дължини 10 и 14 са съответно  $x$  и  $y$ . Нека  $r$  е радиусът на окръжността. От Питагоровата теорема следват равенствата  $x^2 + 25 = r^2$  и  $y^2 + 49 = r^2$ , откъдето получаваме, че  $x^2 - y^2 = 24$ . Ако двете хорди се намират от една и съща страна спрямо центъра на окръжността, то  $x - y = 6$ . Но тогава  $x + y = 4$ , което е невъзможно. Следователно центърът на окръжността се намира между двете хорди, откъдето получаваме, че  $x + y = 6$  и  $x - y = 4$ . Следователно  $x = 5$ ,  $y = 1$  и  $r = 5\sqrt{2}$ . Оттук лесно следва, че дължината на търсената хорда е  $2\sqrt{46}$ .

**Задача 2.** Нека  $x$  и  $y$  са реални числа такива, че  $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$ . Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на израза  $3x + 4y$ .

*Решение:* Нека  $a$  е произволна стойност на израза  $3x + 4y$ . Тогава системата 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6 \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$
 има поне едно решение в реални числа  $(x; y)$ . Като използваме теоремата за заместване, получаваме, че  $y$  е решение на уравнението

$25z^2 + (114 - 8a)z + a^2 - 42a - 54 = 0$ , чиято дискриминанта е неотрицателна при  $a \in [-7; 73]$ . Полученият интервал се състои от всички стойности, които приема изразът  $3x + 4y$ . Следователно най-малката и най-голямата стойност на израза са съответно  $-7$  и  $73$ .

**Задача 3.** Едно положително реално число ще наричаме *специално*, ако в записа му като десетична дроб не участват други цифри, освен 0 и 7. Например числата  $\frac{700}{99} = 7,(07)$  и  $77,007$  са *специални*. Да се намери най-малкото естествено число  $n$ , за което числото 1 може да се представи като сбор на  $n$  *специални* числа.

*Решение:* Да отбележим, че числата  $\frac{700}{999} = 0,(700)$ ,  $\frac{7}{99} = 0,(07)$ ,  $\frac{11111}{142857} = 0,(077777)$  и  $\frac{1}{1287} = 0,(000777)$  са *специални*. Равенството

$\frac{700}{999} + \frac{7}{99} + \frac{7}{99} + \frac{11111}{142857} + \frac{11111}{142857} + \frac{1}{1287} + \frac{1}{1287} + \frac{1}{1287} = 1$  показва, че търсеното  $n$  е не повече от 8. Да допуснем сега, че за някое  $n < 8$  е изпълнено равенството  $1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , където  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са *специални* числа. Нека за всяко естествено  $k$  с  $a_k$  да означим броя на числата от множеството  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , чиято  $k$ -та цифра е 7. Тогава е вярно равенството  $1 = \frac{7a_1}{10} + \frac{7a_2}{10^2} + \frac{7a_3}{10^3} + \dots$ . Но оттук следва, че  $\frac{1}{7} = 0,(142857) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$ . В частност  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 8, \dots$ . Но равенството  $a_4 = 8$  противоречи на  $n < 8$ . Ето защо търсеното  $n$  е 8.