

Конкурсни задачи

Рубриката се води от д-р Светлозар Дойчев

и д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. В множеството на реалните числа е дефинирана бинарна операция $\otimes: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$), която условно ще наричаме умножение. Умножението е такова, че за всеки три реални числа a , $b \neq 0$ и c е в сила равенството $a \otimes (b \otimes c) = \frac{a \cdot c}{b}$. Ако е известно, че $2012 \otimes 2012 = 1$, да се пресметне $(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012)$.

Живко Желев, Стара Загора

Задача 2. Нека $ABCD$ е правоъгълник, за който $AB \geq CD$, а M е такава вътрешна точка за $ABCD$, че $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = 30^\circ$. Да се докаже, че $ABCD$ е квадрат тогава и само тогава, когато $MA \cdot MC = 2(2 - \sqrt{3}) AB \cdot BC$.

Каталин Кристеа, Крайова, Румъния

Задача 3. Нека α_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) са вътрешните ъгли на изпъкнал седмоъгълник. Каква зависимост съществува между коефициентите на уравнението $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$ ($abcdefgh \neq 0$), ако корените му са равни на $\operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{20}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$)? Как би изглеждала зависимостта, ако корените на уравнението са $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{20}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$)?

Милен Найденов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 30 септември 2012 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2011

Задача 1. Да се реши системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = n^3 + 1, \end{cases}$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални положителни числа.

Решение: От неравенствата между средните следва, че

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = n^2 \text{ и } \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{1}{\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n} = n^n.$$

Така получаваме $n^3 + 1 \geq n^n + n^2$, което води до $n \leq 2$. Ако $n = 1$, стигаме до

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = 2. \end{cases}$$

Нейните решения са $(n, x_1) \in \{(1, 1)\}$. При $n = 2$ получаваме системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = 9, \end{cases}$$

решенията на която са $(n, x_1, x_2) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$.

Задача 2. Във вътрешността на равностранный триъгълник ABC е взета точка P . Правите AP , BP и CP пресичат съответно страните BC , CA и AB в точките A' , B' и C' . Да се докаже, че ако $A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = AB'^2 + BC'^2 + CA'^2$, то точката P лежи върху някоя от медианите на триъгълника ABC .

Решение: Нека $AB = BC = CA = a$, а лицата на триъгълниците BPC , APB и

APC съответно x , y и z . Имаме $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{BPA'}}{S_{CPA'}} = \frac{S_{AA'B} - S_{BPA'}}{S_{AA'C} - S_{CPA'}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{y}{z}$.

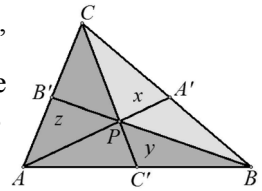
Оттук следва, че $BA' = \frac{ay}{y+z}$ и $A'C = \frac{az}{y+z}$. По подобен начин се получават равенства за останалите четири отсечки. След заместване в даденото равенство стигаме до

$$\frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{z^2}{(y+z)^2} + \frac{x^2}{(z+x)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2},$$

което е еквивалентно с $\frac{y^2 - z^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2 - x^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2} = 0$. Оттук намираме, че

$$\frac{(x-y)(z-x)(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0. \text{ Следователно } x = y \text{ или } y = z,$$

или $z = x$. Затова P е такава, че поне два от триъгълниците BPC , APB и APC са равнолицеви. Това означава, че P лежи върху някоя от медианите на $\triangle ABC$.



Задача 3. Да се докаже, че за всяко цяло положително число k уравнението $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 + x_{k+1}^3 = x_{k+2}^4$ има безброй много решения в цели положителни числа $x_1, x_2, \dots, x_{k+2}$ такива, че $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$.

Решение: Тъй като $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = (1+2+\dots+k)^2$, то след заместване в уравнението на $x_1 = x$, $x_2 = 2x, \dots, x_k = kx$, $x_{k+1} = (1+2+\dots+k)y^2$ и $x_{k+2} = (1+2+\dots+k)y$ получаваме

$$(1^3 + 2^3 + \dots + k^3)x^3 + (1+2+\dots+k)^2 y^4 = (1+2+\dots+k)^4 y^4 \Leftrightarrow x^3 = ay^4,$$

където $a = (1+2+\dots+k)^2 - 1 = \frac{(k-1)(k+1)(k^2+k+2)}{4}$. Сега $x = a^7 n^4$ и $y = a^5 n^3$ образуват решение на уравнението $x^3 = ay^4$ при произволно цяло положително n . Следователно $x_1 = a^7 n^4$, $x_2 = 2a^7 n^4$, $\dots$, $x_k = ka^7 n^4$, $x_{k+1} = (1+2+\dots+k)a^{10} n^6$, $x_{k+2} = (1+2+\dots+k)a^5 n^3$ образуват решение на даденото уравнението при произволно цяло положително n . Неравенствата $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$ са очевидно изпълнени.