

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Да се докаже, че при $x \neq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ са изпълнени равенствата:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}; \\ \text{б) } \sum_{k=1}^n (2k-1)x^{k-1} &= \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + x + 1}{(1-x)^2}; \\ \text{в) } \sum_{k=1}^n k^2x^{k-1} &= \frac{-n^2x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + x + 1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Слави Харалампиев и Румяна Несторова, Враца

Задача 2. В остроъгълния триъгълник ABC точката O е такава, че $\angle OAB = \angle OCA$ и $\angle OBA = \angle OCB$. Ако D е пресечната точка на симетралата на отсечката OC и правата през B , успоредна на OC , да се докаже, че ортогоналните проекции на O върху правите CA , AB , BD и DC са върхове на равнобедрен трапец или правоъгълник.

Хаим Хаимов, Варна

Задача 3. Точките O , A , A_1 и A_2 в този ред лежат на права l_1 , а точките O , B , B_1 , B_2 в този ред лежат на права l_2 . Нека $OA > OB$, $AA_1 = BB_1$ и $A_1A_2 = B_1B_2$.

а) Да се докаже, че описаните окръжности k , k_1 и k_2 съответно на триъгълниците OAB , OA_1B_1 и OA_2B_2 имат втора обща точка M .

б) Ако C , C_1 и C_2 са средите съответно на отсечките AB , A_1B_1 и A_2B_2 , да се докаже, че C , C_1 и C_2 лежат на една права l .

в) Ако $l \cap l_1 = P$, да се определи ъгълът между правите l_1 и MP .

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Краен срок за изпращане на решения 31 март 2018 г.

Конкурсът е традиционен и победителите ще бъдат наградени. В края на 2017 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии в списанието. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2018 г.

Решенията трябва да бъдат представени ясно, като е задължително всяка задача да е на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg и vnenkov@mail.bg.