

КОНКУРЕНТНИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ, ОПРЕДЕЛЕНИ ОТ ПРАВИЛНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

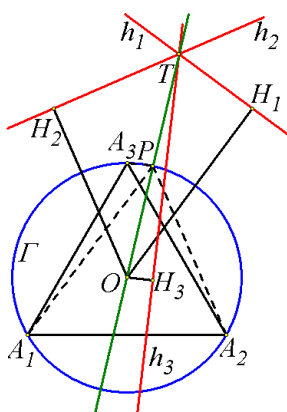
Йоана Христова, Геновева Маринова, Никола Кушев,
Светослав Апостолов, Цветомир Иванов

Профилирана природо-математическа гимназия – Ловеч

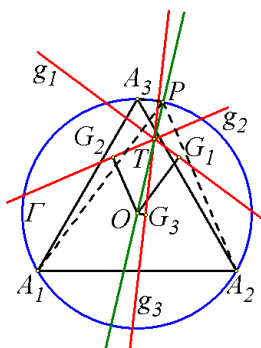
Резюме. Статията е ученическа разработка под ръководството на доц. д-р Веселин Ненков. Тя съдържа нови резултати по темата, които донесоха първа награда на авторите по време на националния етап на Международния конкурс МИТЕ (Методология и информационни технологии в образованието) през м. февруари 2020 г. Разработката е посветена на пресичащи се в една точка прави, породени от точки върху Ойлеровите прави на вписани многоъгълници.

Ключови думи: многоъгълник; кръг; Ойлерова права, Ойлерова окръжност; перпендикуляр; изогонални точки

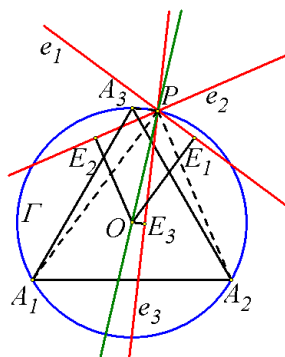
1. Конкурентни прави, определени от равностранен триъгълник. Много конструкции в равнината на равностранен триъгълник водят до забелязване на интересни геометрични закономерности. За да получим една такава закономерност, разглеждаме равностранен триъгълник $A_1A_2A_3$ с описана окръжност Γ , която има център O .



Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

Разглеждаме произволна точка P от Γ . Нека H_1 , H_2 и H_3 са ортоцентровете съответно на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P . С помощта на Geometer's Sketchpad (GSP) построяваме правите h_1 , h_2 и h_3 , които минават съответно през H_1 , H_2 и H_3 и са перпендикулярни на OH_1 , OH_2 и OH_3 . Забелязваме, че правите h_1 , h_2 и h_3 се пресичат в една точка (фиг. 1). Ако правите g_1 , g_2 и g_3 минават през медицентровете G_1 , G_2 и G_3 съответно на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P и са перпендикулярни съответно на OG_1 , OG_2 и OG_3 , забелязваме, че тези прави също се пресичат в една точка (фиг. 2). След това през центровете E_1 , E_2 и E_3 на Ойлеровата окръжност за триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P построяваме прави e_1 , e_2 и e_3 , които са перпендикулярни съответно на OE_1 , OE_2 и OE_3 . Този път забелязваме, че правите e_1 , e_2 и e_3 се пресичат в точката P (фиг. 3). В разгледаните три случая са построени перпендикуляри през едноименни точки от Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P към съответните Ойлерови прави. Затова можем да предположим, че ако три точки са разположени по един и същи начин върху Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P , то перпендикулярите през тези точки, построени към съответните Ойлерови прави, се пресичат в една точка. Как обаче да определим понятието еднакво разположени точки? Един начин за определяне на еднакво разположени точки върху Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P е като разглеждането на точки, които делят в едно и също отношение отсечките OH_1 , OH_2 и OH_3 (те лежат върху съответните Ойлерови прави).

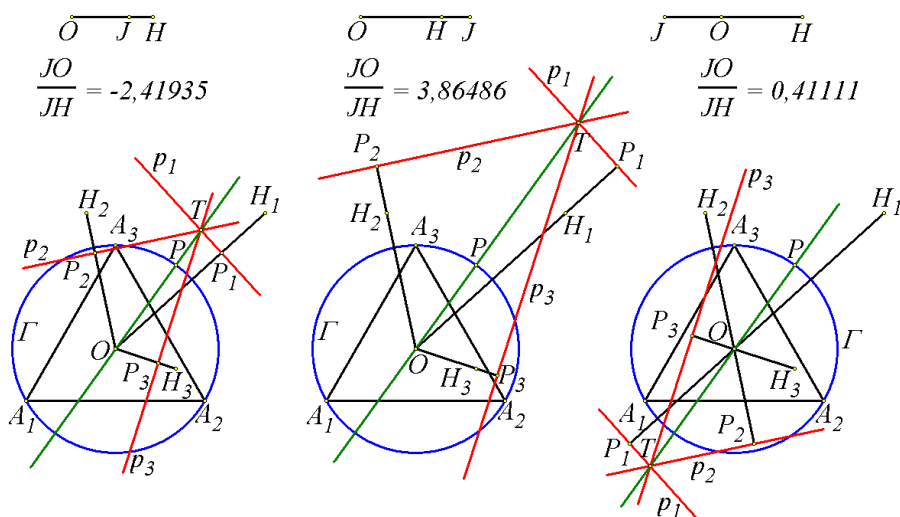
Нека λ е произволно реално число, точките P_1 , P_2 и P_3 лежат върху Ойлеровите прави съответно на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P и са изпълнени равенствата $\frac{P_1O}{P_1H_1} = \frac{P_2O}{P_2H_2} = \frac{P_3O}{P_3H_3} = \lambda$. През точките P_1 , P_2 и P_3

построяваме съответно прави p_1 , p_2 и p_3 , които са перпендикулярни на Ойлеровите прави съответно на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P . Наблюденията с GSP показват, че можем да формулираме следното

Твърдение 1. При всяка реална стойност на λ правите p_1 , p_2 и p_3 се пресичат в една точка T (фиг. 4).

Формулираното твърдение 1 обобщава първоначалните наблюдения, направени при $\lambda = \infty$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $\lambda = -1$. Очевидният случай, при който правите p_1 , p_2 и p_3 минават през O се получава при $\lambda = 0$. На фиг. 4 са показани случаи при други три стойности, на λ . Освен свойството на правите, изразено чрез твърдение 1, наблюденията с GSP ни дават основание да формулираме и следното

Твърдение 2. Ако P е фиксирана точка от Γ и числото λ описва множеството на реалните числа, точката T описва правата OP (фиг. 4).



Фигура 4

По естествен начин възниква въпросът за разглеждане на подобни конфигурации, свързани правилни n – ъгълници, когато $n \geq 4$. За разгледаме този въпрос е необходимо да се запознаем с понятието Ойлерова права на вписан многоъгълник.

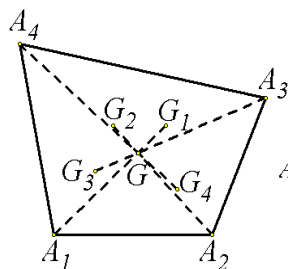
2. Медицентър и ортоцентър на вписан многоъгълник. Преди да покажем по какъв начин се получават Ойлеровата права и Ойлеровата окръжност, е необходимо да определим понятията център на тежестта и ортоцентър на вписан многоъгълник като аналози на съответните понятия от геометрията на триъгълника.

2.1. Център на тежестта. Центърът на тежестта G на $\Delta A_1 A_2 A_3$ е пресечната точка на правите, свързващи върховете A_1 , A_2 и A_3 с центровете на тежестта на съответните им срещуположни страни $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$. За G е изпълнено равенството

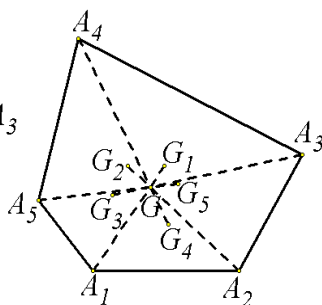
$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}).$$

Аналогично с помощта на GSP, можем да свържем върховете A_1 , A_2 , A_3 и A_4 на четириъгълника $A_1 A_2 A_3 A_4$ с центровете на тежестта G_1 , G_2 , G_3 и G_4 съответно на триъгълниците $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ и $A_1 A_2 A_3$ (фиг. 5). Установяваме, че правите $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, $A_3 G_3$ и $A_4 G_4$ минават през една точка G . С помощта на (1) получаваме и векторното равенство $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$, при произволна точка O в пространство-

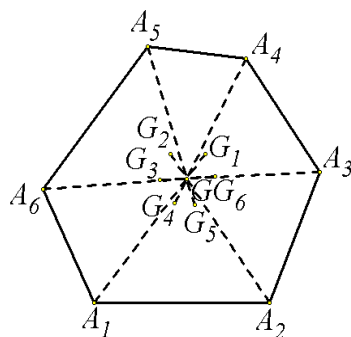
то. Получената по този начин точка G наричаме *център на тежестта (медицентър)* на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 5).



Фигура 5



Фигура 6



Фигура 7

След това, с помощта на GSP свързваме върховете A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 на петъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центровете на тежестта G_1, G_2, G_3, G_4 и G_5 съответно на четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5, A_3A_4A_5A_1, A_4A_5A_2A_1, A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 6). Установяваме, че правите $A_1G_1, A_2G_2, A_3G_3, A_4G_4$ и A_5G_5 минава през една точка G , за която е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5})$, при произволна точка O в пространството. Точката G наричаме *център на тежестта (медицентър)* на петъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5$ (фиг. 6). До подобни изводи стигаме и при разглеждането на шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (фиг. 7). Така по индукция стигаме до извода, че ако $A_1A_2 \dots A_n$ е произволен n -ъгълник, правата, свързваща върха A_i с центъра на тежестта G_i ($i=1, \dots, n$) за $n-1$ -ъгълника, образуван от останалите върхове, минават през една точка G , за която е изпълнено векторното равенство

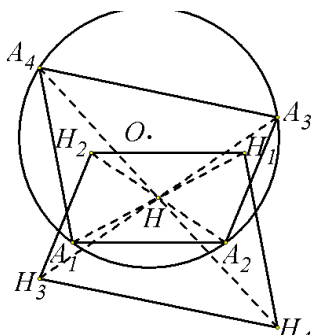
$$() \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}),$$

при произволна точка O в пространството.

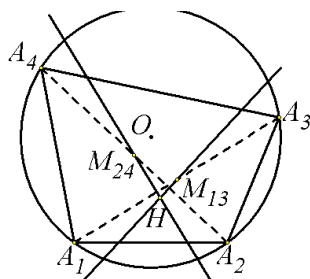
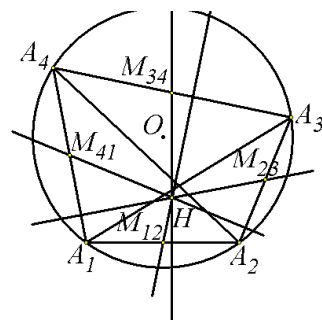
Равенството (2) по естествен начин обобщава (1) и еднозначно определя точка G , която се нарича *център на тежестта (медицентър)* за n -ъгълника $A_1A_2 \dots A_n$. Така за центъра на тежестта на n -ъгълника $A_1A_2 \dots A_n$ имаме индуктивна конструкция за построяване и аналитично представяне с (2).

2.2. Ортоцентър. За определяне на ортоцентър на вписан в окръжност многоъгълник можем да приложим два подхода, основани на аналогии с по-

строяването на центъра на тежестта. Първо разглеждаме вписан в окръжност четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$. Аналогично на конструирането на центъра на тежестта G на $A_1A_2A_3A_4$ построяваме ортоцентровете H_1, H_2, H_3 и H_4 съответно на триъгълниците $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_2A_1$ и $A_1A_2A_3$. След това построяваме правите A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 и A_4H_4 . Забелязваме, че тези прави се пресичат в една точка H (фиг. 8). Нещо повече, четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ са симетрични спрямо точката H (фиг. 8). Това наблюдение можем да изразим с векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). По-нататък да обърнем внимание, че ортоцентърът на $\Delta A_1A_2A_3$ лежи върху правата, която минава през центъра на тежестта на върха A_i (който съвпада с A_i), и е перпендикулярна на правата, определена от останалите два върха на $\Delta A_1A_2A_3$. Това ни дава основание при $A_1A_2A_3A_4$ да построим през центъра на тежестта на всяка от шестте двойки върхове (средите на свързващите ги отсечки) перпендикуляр към правата, определена от другата двойка върхове (фиг. 9). Оказва се, че получените шест прави се пресичат в същата точка H , получена при предишната конструкция (четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ на фиг. 8 и 9 са еднакви). Получената по този начин точка H наричаме *ортоцентър на четириъгълника* $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 8, 9).



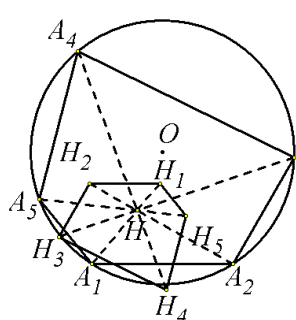
Фигура 8



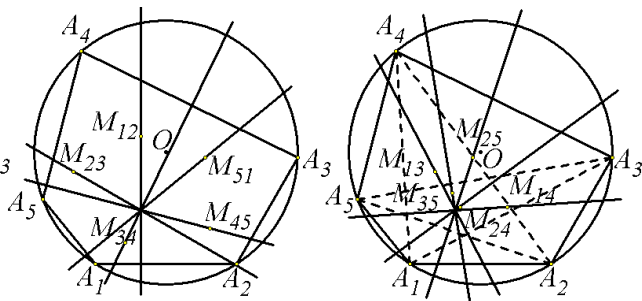
Фигура 9

По-нататък, следвайки опита от изследванията върху четириъгълника, разглеждаме вписан в окръжност петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Построяваме ортоцентровете H_1, H_2, H_3, H_4 и H_5 съответно на четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5, A_3A_4A_5A_1, A_4A_5A_1A_2, A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$. Забелязваме, че правите $A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4$ и A_5H_5 минават през една точка H (фиг. 10). Освен това H е център на хомотетия за петоъгълниците $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $H_1H_2H_3H_4H_5$, като са изпълнени векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA_i}$

($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Подходът с центровете на тежестта се състои в следното: построяваме през центъра на тежестта на всеки от десетте триъгълника, образувани от върховете на $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, права, перпендикулярна на страната, съдържаща останалите два върха на $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Тези десет прави се пресичат в същата точка H (фиг. 11). Точката H наричаме *ортоцентър* на $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (фиг. 10, 11).



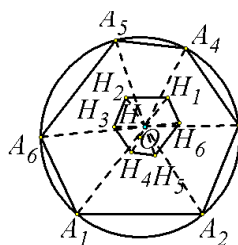
Фигура 10



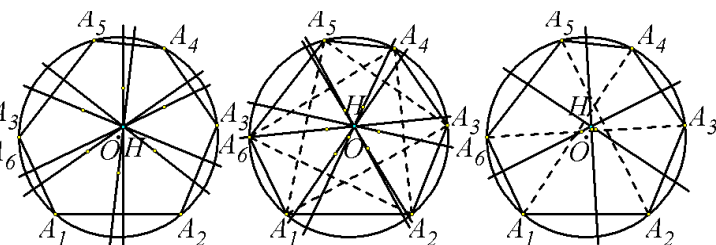
Фигура 11

По подобен начин разглеждаме и вписан в окръжност шестоъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Ако H_i е ортоцентърът на петъгълника, образуван от върховете на $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ без A_i , правите $A_i H_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) се пресичат в точка H (фиг. 12), която е център на хомететия за шестоъгълниците $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ и $H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6$. Изпълнени са векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Освен това всяка от петна-

десетте прави, минаваща през центъра на тежестта на четириъгълник, върховете на който са измежду точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 , и перпендикулярна на страната, определена от останалите два върха, минава през същата точка H (фиг. 13). Точката H наричаме *ортоцентър* на $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (фиг. 12, 13).



Фигура 12



Фигура 13

Така по индукция получаваме, че за вписания в окръжност n -ъгълник $A_1 A_2 \dots A_n$ съществува точка H , която притежава следните свойства:

1) Правите, минаващи през центровете на тежестта за $n-2$ -ъгълниците, образувани от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$, които са перпендикулярни на правите, свързващи останалите два върха, се пресичат в една точка.

2) Ако H_i е ортоцентъра на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i , то правите $A_i H_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) се пресичат в H .

3) Изпълнени са векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{n-3} \overrightarrow{HA_i}$.

4) Многоъгълникът $H_1 H_2 \dots H_n$ е хомотетичен на $A_1 A_2 \dots A_n$.

Ясно е, че 2) и 4) следват от 3).

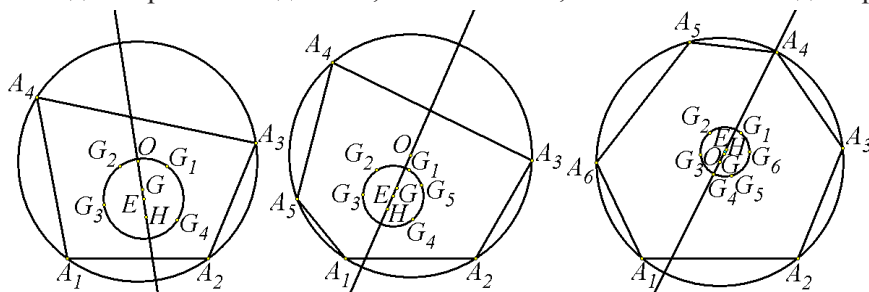
2.3. Ойлерова права и Ойлерова окръжност. Ако $A_1 A_2 \dots A_n$ е многоъгълник, вписан в окръжност с център O , наблюденията с GSP показват, че точките H , G и O лежат на една права, която се нарича *права на Ойлер* за $A_1 A_2 \dots A_n$. На фиг. 14 са показани случаите при $n=4, 5, 6$. По индукция се получава равенството

$$(3) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{1}{n-2} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}).$$

От това равенство и (2) следва, че

$$(4) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{n}{n-2} \overrightarrow{OG},$$

Последното равенство доказва, че точките H , G и O лежат на една права.



Фигура 14

Нека G_i е центърът на тежестта на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Наблюденията с GSP показват, че точките G_i ($i=1, 2, \dots, n$) лежат на окръжност, която се нарича *окръжност на Ойлер* за $A_1 A_2 \dots A_n$. На фиг. 14 са показани случаите при $n=4, 5, 6$. За центъра E на Ойлеровата окръжност е изпълнено векторното

равенство $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{n-1}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$. Оттук векторното равенство

(3) за H и векторното равенство (2) за G следват:

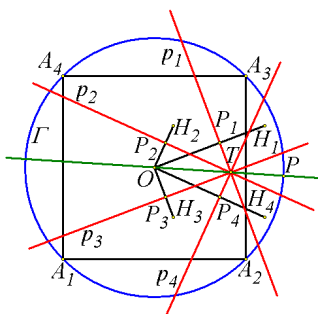
$$(5) \quad \overrightarrow{HE} = \frac{1}{n-1} \overrightarrow{HO},$$

$$(6) \quad \overrightarrow{GE} = -\frac{1}{n-1} \overrightarrow{GO}.$$

Равенствата (5) и (6) показват, че H и G са центрове на хомотетия за описаната и Ойлеровата окръжност.

3. Конкурентни прави, определени от правилен многоъгълник. След като сме запознати с понятията медицентър, ортоцентър и Ойлерова права на вписан в окръжност многоъгълник, можем да продължим изследванията си върху перпендикуляри, минаващи през точки от Ойлеровите прави на многоъгълници, породени от върховете на правилен многоъгълник, и точка от описаната му окръжност.

$$\overline{O \quad J \quad H} \quad \frac{JO}{JH} = -1,46154$$



Фигура 15

Нека $A_1A_2A_3A_4$ е квадрат, вписан в окръжност Γ с център O и P е точка от Γ . Ако точките H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортоцентровете, съответно на четириъгълниците $A_2A_3A_4P, A_3A_4A_1P, A_4A_1A_2P$ и $A_1A_2A_3P$, а точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат върху Ойлеровите прави съответно на $A_2A_3A_4P, A_3A_4A_1P, A_4A_1A_2P$ и $A_1A_2A_3P$, така че

$$\frac{\overline{P_1O}}{P_1H_1} = \frac{\overline{P_2O}}{P_2H_2} = \frac{\overline{P_3O}}{P_3H_3} = \frac{\overline{P_4O}}{P_4H_4} = \lambda \quad (\lambda \text{ е произволно реално число}),$$

построяваме правите p_1, p_2, p_3 , и p_4 , през точките P_1, P_2, P_3 и P_4 , които са перпендикулярни на Ойлеровите прави съответно на $A_2A_3A_4P, A_3A_4A_1P, A_4A_1A_2P$ и $A_1A_2A_3P$. Наблюденията с GSP показват, че

при произволна стойност на λ правите p_1, p_2, p_3 и p_4 се пресичат в една точка T (фиг. 15). Освен това, когато λ описва реалната права, точката T описва правата OP (фиг. 15).

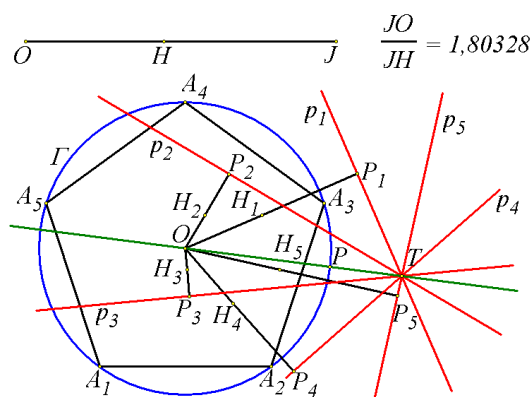
Експериментите с GSP върху съответните конструкции, определени от правилни петоъгълници и правилни шестоъгълници, показват, че и в тези случаи се наблюдават такива конкурентни перпедикуляри (фиг. 16 – 17). Така индуктивно стигаме до идеята, че извършените наблюдения могат да се обобщят за произволен правилен n – ъгълник.

Нека $A_1A_2 \dots A_n$ е правилен n – ъгълник, вписан в окръжност Γ с център O и P е произволна точка от Γ . С $H_1, H_2, \dots, H_n$ означаваме ортоцентровете съответно на n – ъгълниците $A_2A_3 \dots A_nP, A_3A_4 \dots A_1P, \dots, A_1A_2 \dots A_{n-1}P$. Ако λ е реално число, точките $P_1, P_2, \dots, P_n$ определяме върху Ойлеровите прави съответно на n – ъгълниците $A_2A_3 \dots A_nP, A_3A_4 \dots A_1P, \dots, A_1A_2 \dots A_{n-1}P$, така че да са изпълнени равенствата $\frac{\overline{P_1O}}{\overline{P_1H_1}} = \frac{\overline{P_2O}}{\overline{P_2H_2}} = \dots = \frac{\overline{P_nO}}{\overline{P_nH_n}} = \lambda$. Правите, които минават съответно през точките $P_1, P_2, \dots, P_n$ и са перпендикулярни на Ойлеровите прави съответно на n – ъгълниците $A_2A_3 \dots A_nP, A_3A_4 \dots A_1P, \dots, A_1A_2 \dots A_{n-1}P$, означаваме с $p_1, p_2, \dots, p_n$. Изпълнени са следните твърдения.

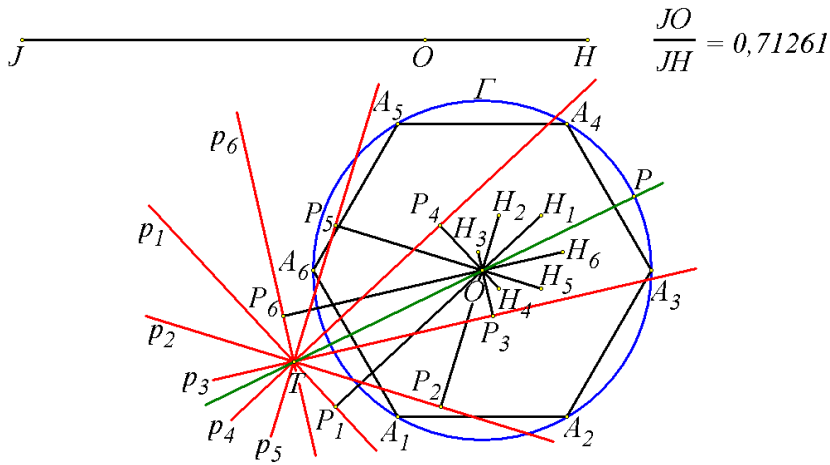
Твърдение 3. При всяка реална стойност на λ правите $p_1, p_2, \dots, p_n$ се пресичат в една точка T (фиг. 4, 15, 16, 17).

Твърдение 4. Ако P е фиксирана точка от Γ и числото λ описва множеството на реалните числа, точката T описва правата OP (фиг. 4, 15, 16, 17).

Твърдения 1 и 2 се получават от последните при $n = 3$. По този начин откриваме техни обобщения.



Фигура 16



Фигура 17

4. Доказателство на твърдения 3 и 4. След като твърдения 3 и 4 са формулирани благодарение на експериментите с GSP, следва те да бъдат строго доказани. От равенството $\frac{\overrightarrow{P_k O}}{\overrightarrow{P_k H_k}} = \lambda$ ($k = 1, 2, \dots, n$) следва $\overrightarrow{OP_k} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \overrightarrow{OH_k}$. Освен това, когато $A_1 A_2 \dots A_n$ е правилен n -ъгълник и O е неговият център, е изпълнено равенството $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. Оттук и (3) следва, че $\overrightarrow{OH_k} = \frac{1}{n-2} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_k})$.

Разглеждаме точката T , за която е изпълнено векторното равенство

$$(7) \quad \overrightarrow{OT} = \frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} \overrightarrow{OP}.$$

От последните равенства получаваме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_k T} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP_k} = \frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} \overrightarrow{OP} - \frac{\lambda}{\lambda-1} \overrightarrow{OH_k} = \\ &= \frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} \overrightarrow{OP} - \frac{\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_k}) = \frac{\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_k}). \end{aligned}$$

Сега за скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{P_k T}$ и $\overrightarrow{OH_k}$ получаваме $\overrightarrow{P_k T} \cdot \overrightarrow{OH_k} = \frac{\lambda}{(n-2)(-1)} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_k}) \cdot \frac{1}{n-2} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_k}) = \frac{\lambda}{(-2)(-1)} (\overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OA_k}^2)$.

Тъй като точките P и A_k лежат върху Γ , то $\overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OA_k}^2$ ($k=1,2,\dots,n$). Следователно $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{OH_k} = 0$. Това означава, че за всяко $k=1,2,\dots,n$ е изпълнено $\overrightarrow{PT} \perp \overrightarrow{OH_k}$, т.е. $p_k \perp OH_k$. С това твърдение 3 е доказано. Освен това, като вземем предвид равенството (7), забелязваме, че точката T винаги лежи върху правата OP . С това е доказано и твърдение 4.

Като използваме равенството (7), можем да установим кои са точките P_k , при които съответните прави p_k ($k=1,2,\dots,n$) минават през точката P .

Това се случва точно когато $\frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)} = 1$, т.е. $\lambda = \frac{n-2}{n-4}$. От (5) следва,

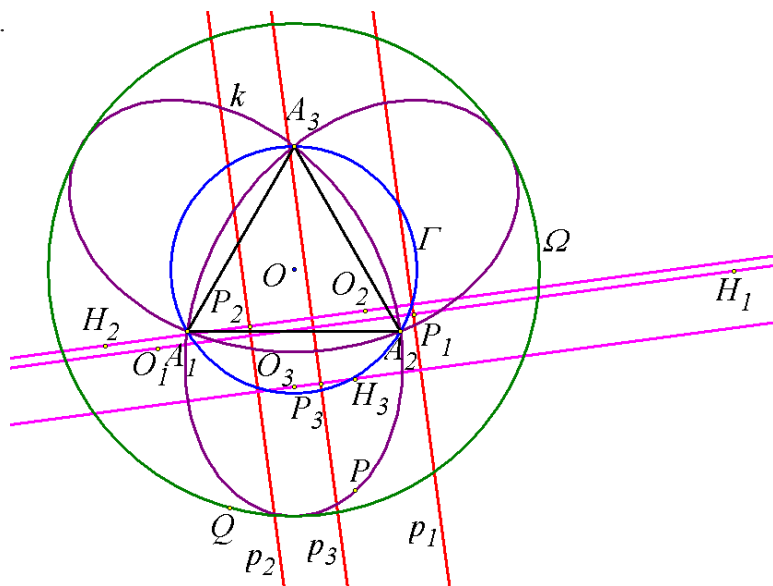
че за центровете E_k ($k=1,2,\dots,n$) на Ойлеровите окръжности съответно на $A_2A_3\dots A_nP$, $A_3A_4\dots A_1P$, ..., $A_1A_2\dots A_{n-1}P$ са изпълнени равенствата

$\overrightarrow{OE_k} = -(n-2)\overrightarrow{HE_k}$, т.е. $\frac{\overrightarrow{E_kO}}{\overrightarrow{E_kH_k}} = -(n-2)$. Следователно перпендикулярите

те през точките E_k ($k=1,2,\dots,n$) се пресичат в точката P тогава и само тогава, когато $\frac{n-2}{n-4} = -(n-2)$, т.е. $n=3$. Това означава, че случаят, показан

на фиг. 3, е единственият, при който перпендикулярите през центровете на Ойлеровите окръжности се пресичат в точката P .

5. Успоредни прави в равнината на равностраничен триъгълник. От твърдение 3 и неговото доказателство (по-точно от равенството (7)) следва, че не съществува точка P от Γ , за която правите p_1 , p_2 , ..., p_n са успоредни. Следователно, ако съществуват точки в равнината на правилния многоъгълник $A_1A_2\dots A_n$, за които перпендикулярите към Ойлеровите прави на многоъгълниците $A_2A_3\dots A_nP$, $A_3A_4\dots A_1P$, ..., $A_1A_2\dots A_{n-1}P$ са успоредни, те не лежат върху Γ . Тъй като за точките P , нележащи върху Γ , нито една от Ойлеровите прави на многоъгълниците $A_2A_3\dots A_nP$, $A_3A_4\dots A_1P$, ..., $A_1A_2\dots A_{n-1}P$ не съществува при $n \geq 4$, то въпросът за успоредност на перпендикулярите към Ойлеровите прави има смисъл само когато $n=3$, т.е. за равностраничен триъгълник. Така стигаме до търсенето на точките P в равнината на равностраничен триъгълник $A_1A_2A_3$, за които перпендикулярите p_1 , p_2 и p_3 към Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P през точките P_1 , P_2 и P_3 , разположени по един и същи начин върху тези прави, са успоредни.



Фигура 18

Множеството на тези точки се открива, ако се вземе предвид, че когато точката Q описва окръжността Ω с център O и радиус два пъти по-голям от този на Γ , изогоналната точка P на Q спрямо $A_1A_2A_3$ описва крива k от четвърта степен (фиг. 18). Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P , когато $P \in k$, са успоредни (фиг. 18). Следователно всяка тройка прави, които са перпендикулярни на Ойлеровите прави на триъгълниците A_2A_3P , A_3A_1P и A_1A_2P , когато $P \in k$, са успоредни (фиг. 18).

ЛИТЕРАТУРА

- Паскалев, Г. & П. Пенчев (1983). *Задачи за подготовка за математически олимпиади*. София: Народна просвета.
- Гроздев, С. & В. Ненков (2011). Ортоцентър на вписан четириъгълник, *Математика плюс*, 4, 63 – 69, ISSN 0861-8321.
- Ненков, В., & Д. Ангелов (2017). Ойлерова права и Ойлерова крива на вписан многоъгълник в конично сечение, *Математика и информатика*, 1, 64 – 80, ISSN 1310-2230.
- Ненков, В. (2005). Четири Ойлерови прави в равнината на триъгълник, *Математика и информатика*, 2, 68 – 80, ISSN 1310-2230.

- Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентра в равнината и пространството*. София: Архимед.
- Гроздев, С. & В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.
- Георгиева, М. & С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад, 987-619-152-869-1, 327 стр.
- Ненков, В. (2020). *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*. София: Архимед 2000, ISBN 978-954-779-291-3.

REFERENCES

- Paskalev, G. & Penchev, P. (1983). *Preparation problems for mathematical Olympiads*. Sofia: Narodna Prosveta
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2011). Orthocenter of in-quadrilateral, *Mathematics Plus*, 4, 63 – 69, ISSN 0861-8321.
- Nenkov, V. & Angelov, D. (2017). Euler line and Euler curve of in-polygon of a conic. *Mathematics and Informatics*, 1, 64 – 80, ISSN 1310-2230.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).
- Nenkov, V. (2005). Four Euler lines in the plane of a triangle. *Mathematics and Informatics*, 2, 68 – 80, ISSN 1310-2230.
- Sergeeva, T., Shabanova, M. & Grozdev, S. (2014). *Foundations of dynamic geometry*. Moscow: ASOU.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *About the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes 2000.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Three notable points on the median of a triangle*. Sofia: Archimedes 2000.
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.), Sofia: Publ. Hous “Iztok-Zapad”, ISBN 987-619-152-869-1, 327 pages
- Nenkov, V. (2020). *Mathematical competence increase through dynamic geometry*. Sofia: Archimedes 2000, ISBN 978-954-779-291-3.

CONCURRENT PERPENDICULARS, DETERMINED BY REGULAR POLYGONS

Abstract. The paper is a secondary student elaboration under the guidance of Assoc. Prof. Veselin Nenkov. It contains new results on the topic, which brought the first award to the authors during the national round of the International competition MITE (Methodology and information technologies in education) in February, 2020. The elaboration is dedicated to concurrent lines generated by points on Euler lines of in-polygons.

Keywords: polygon; circle; Euler line; Euler circle; perpendicular; isogonal points

✉ **Ms. Yoana Hristova, student**
Ms. Genoveva Marinova, student
Mr. Nikola Kushev, student
Mr. Svetoslav Apostolov, student
Mr. Tsvetomir Ivanov, student
Mathematical High School – Lovech
1, Akad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: yoana2910@abv.bg
E-mail: geviC2@abv.bg
E-mail: nikola.kushev2002@gmail.com
E-mail: svetoslav.k.602@gmail.com
E-mail: darkbrotherhood@abv.bg