

КОМПЕТЕНТНОСТНИ МОДЕЛИ ЗА ИЗУЧАВАНЕ НА ЧИСЛОВИТЕ МНОЖЕСТВА

Десислава Георгиева

Факултет по математика и информатика, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Студията представя изследване, насочено към разширяване на математическата компетентност на учениците при изучаване на понятието число и свързаните с него понятия. Обобщени са методически препоръки относно изучаване на числовите множества и са разработени иновативни технологични модели, приложими в обучението по математика в средното училище. Те се основават на принципите за стимулиране на активно участие на учениците и разкриване практическото приложение на знанията за числовите множества. Някои от моделите интегрират електронни средства в обучението по математика като GeoGebra и MS Excel и са в контекста на дигиталното образование. Методиката на разработване на моделите използва компетентностния, изследователския, игровия и проектно базиран подход в обучението. Ефективността на авторските модели е обоснована с метода на експертна оценка. Изучаването на числови множества се разглежда като съдържателна цел и средство за развиване на аналитично мислене, математическа култура и ключови компетентности, които да подкрепят учениците не само в образователния процес, но и в реалния живот.

Ключови думи: числови множества; дробни; рационални и ирационални числа; модели за обучение; дигитални технологии

1. Въведение

Компетентностният подход в обучението акцентира върху развитието на знания, умения и нагласи, приложими в различни ситуации. При изучаването на числата и разширяването на числовите множества този подход може да се реализира чрез решаване на практически проблеми, използване на реални ситуации като измервания и финансови изчисления, прилагане на дигитални технологии за визуализация и моделиране, свързване с други науки, работа по проекти и обсъждане на различните начини за представяне на числата.

Отделните числови множества се изучават в различни класове, затова знанията са обобщени и систематизирани. Целта е да се разработят методически подходи и модели, приложими в средното училище, които стимулират задълбоченото разбиране и практическото усвояване на понятието *число*.

2. Теоретичен обзор на подходи и методики

2.1. Разширяване на числовите множества – принцип на перманентност

Понятието *число* възниква още в първобитното общество, като резултат от необходимостта да се отчитат и съотнасят множества от предмети. След това преминава дълъг път на историческо развитие докато се утвърди като основен инструмент за изразяване на количествени отношения и абстрактно мислене (Bashmakova et al., 1974; Galabova, 2009; Mincheva, 2023).

В настоящото изследване се разглеждат отделните множества в реда, в който се изучават в училищния курс по математика. При въвеждане на ново множество от числа се спазва *принципът на перманентност* (Ganchev et al., 1998):

- При всяко разширение на едно числово множество A до друго числово множество B , A е същинско подмножество на B .
- Аритметичните операции, които се извършват в A , могат да се извършват и в B , а резултатите, получени по правилата в A и в B , да са еднакви.
- В множеството B е изпълнима операция, която е неизпълнима или невинаги е изпълнима в A .
- Асоциативното, комутативното и дистрибутивното свойство на операциите събиране и умножение да важат и в новото множество B .
- Всички релации в множеството A са валидни и в множеството B .
- При тези условия разширението (множеството B) е минимално (Varbanova, Ganchev, 2002).

2.2. Методика на изучаване на естествените числа ($\mathbb{N}$)

В предучилищна възраст „числовите представи се формират у децата на базата на знанията за множества и под влияние на две основни дейности – броене и измерване“ (Galabova, 2009, 59). В исторически план понятието *число* преминава през следните етапи: сравняване на конкретни множества; сравняване на конкретно множество с друго конкретно множество посредник; използване на материални еталони; абстрактно число (Galabova, 2009; Lalchev, 1997). В предучилищна възраст чрез игрова дейност децата преминават през следните етапи:

- *Конкретно-действен етап* – групират реални предмети (играчки, кубчета, пръсти и др.). По този начин развиват представа за количеството чрез сетивен опит.
- *Конкретно-образен етап* – използват илюстрации, схеми и модели за представяне на числата. Постепенно се преминава от действия към образи.
- *Символен етап* – числата се представят със знаци (1, 2, 3, ..., 10).
- *Усвояване на числов ред, сравняване, събиране и изваждане.*

В математиката се използват два основни подхода за изграждане на понятието *естествено число* – „теоретико-множественият подход на Кантор и аксиоматичният подход на Пеано“ (Lalchev, 1997, 74). З. Лалчев разглежда въпроса как тези два подхода да бъдат съчетани в обучението и с кой от тях да се започне. Той заключава: „Тъй като аксиоматичният подход е абстрактно-дедуктивен, то не е целесъобразно да се започва обучението с него“ (Lalchev, 1997, 74). Ив. Ганчев и колектив описват система от шест аксиоми, като втората аксиома гласи: „Числото 1 не следва след никое естествено число“ (Ganchev et al., 1998), т.е. числото нула не е естествено число.

За теоретико-множествения подход в методическата литература са формулирани следните сходни определения: „Общата количествена характеристика се изразява със съответното число“ (Mincheva, 2023, p152); „Естествено число се нарича мощността на клас крайни равномощни множества“ (Galabova, 2009, 234).

За понятието *естествено число* е формулирано: „Всеки един от класовете на еквивалентност, породени от релацията равномошност на крайни множества, се нарича *естествено число*. Крайните множества се разделят (от релацията равномошност) на следните класове на еквивалентност: класът на празното множество – числото нула, класът на едноелементните множества – числото две...“ (Lalchev, 1997, 57). В науката математика числото нула не е естествено число, но в методиката „Като се изхожда от факта, че естествените числа се възвеждат на теоретико-множествена основа, е целесъобразно числото 0 да се изучава с естествените числа“ (Новакова, 2002).

Аксиоматика не може да се изучава в 1. клас, затова се загатва само нейната идея: „Дава се начинът на образуване на числото 5 (по формулата $n + 1$) – 4 широколистни дървета и 1 иглолистно“ (Manova, Rangelova, 2007). З. Новакова предлага да се полага основа за разбиране принципа за образуване на редицата на естествените числа: „Чрез обединяване на две множества: множество, чийто брой на елементите е предходното число на нововъзведеното, и едноелементното множество, се изяснява начинът на получаването на всяко следващо число от предходното“ (Новакова, 2002).

Във връзка с теоретико-множествения подход М. Богданова и М. Темникова (2016) съветват учителите в 1. клас да използват актуализиране на знания и умения от предучилищната група чрез практическа дейност или чрез илюстрация, като се използват релациите „... по-малко ...“, „... по-голямо ...“ и „... толкова, колкото ...“ (без да се използва броене) между няколко групи от предмети/обекти. „Учителят насочва вниманието на учениците към общото свойство на разглежданите съвкупности от предмети (или техните изображения) – количеството (броя), което в математиката се нарича „число...“ (назовава се конкретното число). Реализират се дейности, при които това общо свойство се свързва с нововъзведеното число. Показва се и цифрата на това число“ (Bogdanova, Temnikova, 2016).

А. Манова и Р. Рангелова акцентират на броенето „чрез броене се установява, че децата са пет, дърветата са пет, листата, които е събрало едното дете, са също 5... Може да се използва и за поредно броене, т.е. да се дадат знания за редното значение на числото“ (Manova, Rangelova, 2007). Илюстрациите на българските учебници позволяват използването както на броенето, така и поелементното сравняване на множества (Angelova, Topalska, 2016; Vitinov et al., 2016; Bogdanova, Temnikova, 2016).

Т. Вълкова и колектив предлагат установяването на наличието или отсъствието на взаимно еднозначно съответствие между елементите на две множества да се осъществи или чрез практически действия по тяхното съпоставяне, или чрез броене: „По този начин може да се установи не само къде обектите са повече (по-малко), но и с колко. Всеки път се обръща внимание върху взаимната връзка между отношенията „повече“ и „по-малко“ (Valkova et al. 2016). Включват и упражнения за преобразуване на неравномошни множества в равномошни.

Правилата за събиране в кръга на числата до 20 и тези при останалите двуцифрени числа са едни и същи, затова трябва да бъдат изградени трайни компетентности в това подмножество, преди те да бъдат разширени в кръга на всички двуцифрени, трицифрени и т.н.

В началните класове е препоръчително да се използва често предметно-образна и символно-образна нагледност.

В 4. клас се изучават *четирицифрените числа* и *многоцифрените числа*. Според учебната програма по математика¹ учениците трябва да представят изучените числа като сбор от единици от различни редове и класове (*клас на единиците, клас на хилядите, клас на милионите*).

Въпросът за позиционните и непозиционните бройни системи е подробно описан: „Преброяване на „многобройни множества“, чрез броене, само до определено число може да се осъществи, ако при броенето множеството многократно се класифицира (структурира) по даденото число в процеса на броенето“ (Lalchev, Vutova, 2023).

2.3. Съпоставка между логическата и историческата схема за разширяване на числовите множества

В науката математика множеството на естествените числа ($\mathbb{N}$) се разширява до множеството на целите числа ($\mathbb{Z}$), а то – до множеството на рационалните числа ($\mathbb{Q}$), защото целите числа са същинско подмножество на рационалните числа. Следва се принципът, че новото множество трябва да е минимално. По тази схема множеството на рационалните числа ($\mathbb{Q}$) се разширява до множеството на реалните числа ($\mathbb{R}$), а то до комплексните ($\mathbb{C}$). Затова схемата $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ се нарича логическа.

Множеството на *целите числа* ($\mathbb{Z}$) се конструира, като се образува декартовото произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и в него се въведе двучленната релация ρ

$$(a_1; b_1)\rho(a_2; b_2) \Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

Релацията ρ е релация на еквивалентност, затова разбива $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на класове на еквивалентност „Множеството от всички класове наричаме *множество на целите числа*, а всеки клас – *цяло число*“ (Ganchev et al., 1998). Класът $(a; a)$ се означава с нула.

Множеството на *рационалните числа* ($\mathbb{Q}$) се конструира, като се образува декартовото произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и в него се въведе двучленната релация ρ

$$(a_1; b_1)\rho(a_2; b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$$

Релацията ρ е релация на еквивалентност, затова разбива декартовото произведение на класове на еквивалентност „Всеки клас на еквивалентност се нарича *рационално число*“. Наредените двойки $(a; b)$ се записват във вида $\frac{a}{b}$. Рационалните числа от вида $\frac{a \cdot b}{b}$, където $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, се отъждествява с целите числа a . Следователно $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ив. Ганчев и колектив мотивират необходимостта от *ирационалните числа* с това, че е необходимо всяка отсечка да има дължина, и определят „*Ирационални числа наричаме всички безкрайни непериодични десетични дроби*“ (Ganchev et al., 1998).

Обединението на множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ и множеството на ирационалните числа $\bar{\mathbb{Q}}$ се нарича множество на реалните числа – $\mathbb{R}$.

В исторически план положителните рационални числа (дроби) са се появили много по-рано от отрицателните числа, затова другият начин

за разширяване на числовите множества се нарича историческа схема. По нея първо се въвеждат естествените числа и нулата, следвани от положителните рационални и чак тогава всички рационални числа.

Проведените експерименти установяват, че учениците от 5. клас много трудно осъзнават отрицателните числа и операциите с тях (Ganchev et al., 1997), затова логическата схема е трудно приложима в училище. При историческата не се разглежда явно множеството на целите числа. Комплексните числа са присъствали в задължителното обучение, но се оказва че са твърде абстрактни и затрудняват повечето ученици, затова в съвременните учебни програми те не присъстват в общообразователната подготовка, по тази причина няма да бъдат обект на нашето разглеждане. Последователността на изучаване на числовите множества в общообразователната подготовка е следната: $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2.4. Изучаване на дробните числа ($\mathbb{Q}^+$)

М. Върбанова и Ив. Ганчев (2002) означават множеството на десетичните и обикновените дроби с D вероятно защото след естествените числа учениците изучават дробните и не са запознати с рационалните. В науката математика е прието те да се означават с $\mathbb{Q}^+$, затова ще използваме това означение.

В изследване, проведено с 939 ученици от немски гимназии, се установява, че значими предпоставки за усвояването и оперирането с дроби са уменията за събиране, изваждане, умножаване на естествени числа, концептуалните знания и разполагане на числата върху числова ос, както и общата когнитивна способност (Wortha et al., 2023).

G. Bobos и A. Sierpinska (2017) провеждат изследване със студенти, бъдещи начални учители, в което установяват, че не всички студенти осмислят същността на понятието *дроб*. Голяма част от тях разчитат на рутинни правила и процедури, без да разбират смисъла зад тях. Авторите на изследването разглеждат различни подходи за разбиране на дробите.

- *Част от цяло* – дробите се представят като част от нещо цяло, което може да се представи визуално (напр. пица, торта, лента).

Този метод е подходящ в началните етапи на обучението и не се прилага при неправилни дроби.

- *Измерване* – извършват се различни измервания – например, ако една лента е дълга $\frac{3}{4}$ метра, това се интерпретира като 3 парчета, всяко по $\frac{1}{4}$ метър. Принципът на нагледност се осъществява най-често чрез разграфяване на отсечки на равни дължини.
- *Съотношение/пропорция* – дробите се представят като сравнение между две различни количества („това е $\frac{2}{3}$ от онова“). Обикновено се задават словесно някакви отношения между различни обекти и се задават въпроси от типа „кое е повече“. Задачите най-често включват елементи на математическо моделиране и често отразяват практически ситуации от реалния свят. При такива задачи обучаваните често изпитват затруднения, защото решението изисква прецизно разбиране на връзката между количествата.

В изследването е установено, че бъдещите учители често възприемат подходите поотделно и не осъзнават пряката връзка между тях. Авторите са предложили методология за подпомагане правенето на връзка и обединяването на подходите (Bobos & Sierpinska, 2017). Целта е преминаването от конкретни визуализации към абстрактно понятие да бъде по-плавно.

В изследване със 132 ученици от средно училище в САЩ е установено, че учениците научават повече чрез по-честата употреба на нагледни представяния на дроби, но само когато от тях се изисква да свързват графичните изображения с числовия запис на дробите (Rau et al., 2024).

В България запознаването с дробите започва в 3. клас, където учебната програма изисква учениците да разпознават *половинка*, *третинка*, *четвъртинка* и *десетинка* като части от цяло². Числителите на този етап са винаги единица – аликвотни (египетски) дроби.

Същинското изучаване на дробни числа се извършва в 5. клас³. По сега действащата учебна програма и в учебните програми от 2010 г.⁴, 2018 г.⁵, 2021 г.⁶ първо се изучават обикновените дроби, а след това и

десетичните. Разделът за дробите се предхожда от подготвителен раздел, в който се изучават необходимите знания за най-голям общ делител и най-малко общо кратно (Ninova et al., 2023; Paskaleva et al., 2023). В книгата „Методика на обучението по математика 5. – 7. клас“ авторите изтъкват аргументите в подкрепа и на двете позиции (Ganchev et al., 1997). Обикновените дроби се изучават преди десетичните дроби, защото „десетичните дроби са частен вид дроби...; за да се формира представа за $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ и т.н., трябва да се има представа за правилни дроби с по-малки знаменатели; въвеждането на десетичните дроби без връзка с обикновените води до впечатлението, че двата вида дроби са съвсем различни обекти; учениците при решаване на задачи за търсене на „част от цялото“ се затрудняват, когато отсъства ясна представа за дробта като част от делението на цялото на равни части и вземане на няколко от тях“ (Ganchev et al., 1997).

В съвременните български учебници се наблюдава методически пропуск – изучава се привеждане на дроби към общ знаменател, без да е мотивирана нуждата от това действие. Също така се прави прекалено дълга пауза между въвеждането на това ново понятие и оперирането с него. Например изученото в урок №31 се използва чак в урок №42 – 43 и №44 (Ninkova et al., 2023); изученото от урок №30 се използва в уроци №36 и №37 (Kolev et al., 2022); от урок №30 в урок №35 и №39 (Vitanov et al., 2022).

На база на изследванията на български методики се обобщават някои важни препоръки:

- „Частите да са с различна форма от цялото“ (фиг. 1).
- „Да се изписват всички възможни дроби, свързани с обекта, включително и едно цяло“ (Ganchev et al., 1997).
- Да се използват примери от дейността на хората.
- Да се използват нагледни опори (материални модели



Фигура 1. Визуализиране на разширяване на дроб

и изображения) за дробите при операциите и при разширяване и съкращаване на дроб.

- Да се използват методите *моделиране* и *експериментиране*.
- Да се използват активно междупредметни връзки, като например проектът „МАТ+Арт – Дробно изкуство“ (Galabova, Georgieva, 2024), връзката между математика и музика (Beleva, 2019), и др.
- Преминването от нагледни примери към абстрактни понятия да става плавно и постепенно.

2.5. Изучаване на целите и рационалните числа ($\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$)

Целите и рационалните числа имат два компонента: знак и абсолютна стойност. С тях се моделират величини, които се характеризират с големина и посока. За мотивиране на въвеждането им се използват сведения от историята на математиката и проблемни практически задачи. Отрицателните числа са използвани за първи път в древен Китай и Индия. Китайците ги обозначаваха с червено, а положителните с черно, за да ги различават визуално. Индийският математик Брахмагупта пръв въвежда правила за тяхното използване, наричайки ги „дълг“. В Европа дълго се смятали за безсмислени и били приети едва през Ренесанса, когато започнали да се записват с червено мастило в счетоводството, символизирайки загуби. Днес тази традиция се запазва в програми като Excel, където отрицателните стойности се формират автоматично в червено за бърза ориентация.

В 6. клас рационалните числа са представени като обединение на: отрицателни числа (цели и дробни); числото нула (не е положително, не е отрицателно) и положителните числа (цели и дробни) (Paskaleva et al., 2023).

2.6. Изучаване на реалните числа ($\mathbb{R}$)

Запознаването с ирационалните числа се предхожда от подходящ преговор: *„Записване на рационалните числа с обикновени дробни и десетични дробни – безкрайни периодични. Приблизителни стойности на рационални числа. Изясняване кои от познатите операции са вътрешни за множеството $\mathbb{Q}$. Съответствие между точките от числовата ос и рационалните числа“* (Ganchev et al., 1998, 48).

В 5. клас за пропеедвтика на реалните числа рационалните числа се представят като: крайни десетични дроби (например, $1/2 = 0,5$); безкрайни, но периодични дроби (например, $1/3 = 0,33333... = 0,(3)$). Необходимостта от въвеждане на *иррационалните числа* се посочва в 8. клас¹⁰ с показване, че $\sqrt{2}$ не може да се представи като рационално число и че на не всяка точка от числовата права съответства рационално число. Така се достига до въвеждане на ново множество, числа, които не са рационални – *иррационални числа*. Рационалните и ирационалните числа се обединяват в множеството на реалните числа. Ирационалните числа се въвеждат като *безкрайни непериодични десетични дроби или числа, които не могат да се представят с отношение на две цели числа $\frac{p}{q}$* (Ganchev et al., 1998, 47). Те са въведени с пример за числото π (Paskaleva et al., 2024).

В Иран са приложени конструктивисткия подход и теорията за активността при изучаване на понятието $\sqrt{2}$ (Rafierpour et al., 2022). Учителят поставя когнитивен конфликт, като пита кое число, като се умножи по себе си, се получава 2. Той ги насърчава да търсят все по-точни приближения. Достигат до десетия знак на числото. Друг когнитивен конфликт е как да определят единадесетата цифра след десетичната запетая, когато калкулаторът не може да изчисли. Учениците изказват извода, че колкото и цифри след десетичната запетая да открият, те няма да получат точно числото две.

В урок за реалните числа, за да упражнят знанията си, учениците залепят стикери с числа на картон с най-малкото подмножество, към което принадлежи числото, например $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ и $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, но $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, затова залепят $\frac{1}{2}$ на картон с изписано $\mathbb{Q}$. След това изработват паралелепипеди с написани множествата и ги поставят един в друг, за да усетят и сетивно понятието подмножество (Magreñán et al., 2020).

Според М. Voskoglou и G. Kosyvas (2012) основната пречка за разбирането на реалните числа се крие именно в трудностите при боравене с техните представяния. Те стигат до извода, че учениците трябва да могат да:

- разпознават еквивалентни представяния (напр. $\frac{1}{2} = 0,5$);

- преобразуват между дробен, десетичен и запис с корен;
- разполагат числата върху числовата ос;
- осмислят връзките между алгебричния и геометричния аспект.

3. Обобщени методически насоки

Проучените подходи, методи и проблеми водят до систематизиране на общи методически препоръки. За да бъдат изучени по-лесно различните множества, трябва да се използва единен подход при изучаването им (Varbanova, Ganchev, 2002). Да се мотивира необходимостта от новите числа. Добре е да се обръща внимание на цялото множество, например да се покаже затвореността на $\mathbb{N}$ спрямо операцията събиране и незатвореността му относно изваждане; да се покаже незатвореността на множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ спрямо операцията деление; да се покаже незатвореността на множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ спрямо операцията коренуване; да се разкрива ясно връзката между различните множества на всеки етап при изучаване на ново множество с диаграми на Ойлер-Вен. Да се сравняват и обсъждат различни представяния на едно и също число. Да се включват исторически и философски елементи, например откриването на несъизмеримите величини и появата на ирационалните числа.

Да се формулират определения за новите операции и на „*тяжна база да се построяват алгоритмите за откриване на съответните резултати*“ (Varbanova, Ganchev, 2002, 50). Да се решават задачи с цел затвърдяване на знанията и формиране на умения за прилагане на алгоритмите. Да се обръща внимание на нулата като неутрален елемент при операцията събиране и единицата като неутрален елемент при операцията умножение. Да се обръща внимание на свойствата на операциите (разместително, съдружително и разпределително) и да се използват за рационални пресмятания. Да се използват симетричността и транзитивността на релацията „равно“ във всяко изучавано множество. Да се решават задачи с цел приложение на новите числа и новите операции (Varbanova, Ganchev, 2002).

Технологиите играят съществена роля за визуализиране на сложни математически понятия. Софтуерни програми като GeoGebra и

WolframAlpha дават възможност на учениците да изследват числовите множества. В GeoGebra учениците въвеждат различни числа и наблюдават тяхното разположение върху числовата ос, с което проверяват отговорите си. Със софтуер като WolframAlpha се демонстрират приблизителни стойности на ирационални числа. С Power Point и квадратната мрежа на Excel лесно се визуализират дроби и действия с тях.

4. Компетентностни модели. Резултати от експертна оценка

В рамките на изследването са разработени новаторски методически модели за изучаване на числовите множества, които са оценени от 28 учители и преподаватели във висши училища по метода на експертна оценка чрез анкетно проучване. Повече от половината от анкетираните са опитни педагози с над 20-годишен стаж. За оценка на предложените модели се използва следната Ликертова скала:

- 5: отлично (категорично „Да“);
- 4: много добро (по-скоро „Да“);
- 3: добро (средно равнище);
- 2: задоволително (по-скоро „Не“);
- 1: незадоволително (категорично „Не“).

4.1. Модел 1. „Система от уроци за изучаване на дроби – нов методически ред“

В разработения модел 1 се определят следната хронологична последователност и времетраене на уроците за изучаване на действия с обикновени дроби:

1. Събиране и изваждане на дроби с еднакви знаменатели – 1 учебен час.
2. Разширяване на дроб. Събиране и изваждане на дроби с кратни знаменатели (n и kn , $k, n \in \mathbb{N}$) и дроби с взаимно прости знаменатели – 1 учебен час.
3. Актуализиране на знанията за намиране на най-малко общо кратно на няколко числа и решаване на задачи от събиране и изваждане на дроби с различни знаменатели – от 3 до 5 учебни часа (един урок за

нови знания и няколко за упражнения). Изясняват се погрешните аналогии при операциите.

Събирането и изваждането на дроби с еднакви знаменатели обикновено не затруднява учениците, затова за тези две действия е достатъчно да се отдели само един учебен час. Повече време се отделя на действията с дроби с различни знаменатели. Необходимо е те да се визуализират и да се наблегне на факта, че няма как да бъдат събирани или изваждани части с различна големина. Подходящо е да се започне с дроби с кратни знаменатели. Необходими са няколко такива задачи от събиране и изваждане, за да осъзнаят достъпно, че единият обект трябва да се раздели на още части, за да станат всички части с еднаква големина, т.е. знаменателите да се изравняват.

Отначало се оперира с дроби с взаимно прости знаменатели, за да се улесни изчисляването на общия знаменател. Актуализират се знанията за намиране на най-малко общо кратно и след това се пристъпва към решаване на задачи за събиране и изваждане на дроби със знаменатели, които не са взаимно прости. Новите знания се дават чрез стъпаловидно надграждане на сложността на задачите и постепенно въвеждане на новите знания.

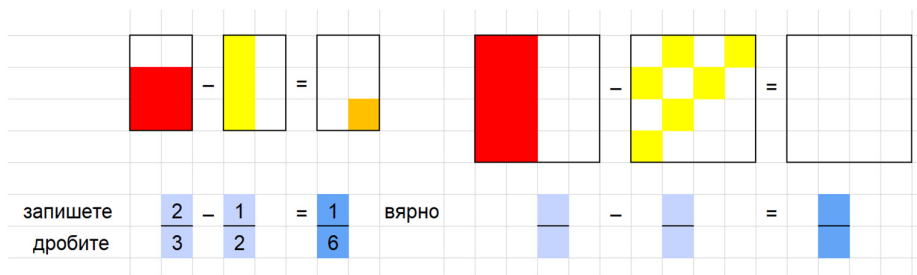
В процеса на обучение се обръща специално внимание на погрешните аналогии. Учениците често събират числителите, събират знаменателите, но $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$. Понякога както съкращават дроб $\frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b}$, така съкращават и сбор $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$ или разлика $\frac{a-c}{b-c} \neq \frac{a}{b}$. Използват правилото за умножение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ и при деление $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:c}$ (Galabova, Georgieva, 2024).

Резултатите от анкетното проучване показват средна оценка 4,54 на този модел. Мнението на учителите е, че дадената хронологична последователност е по-удачна от тази, която се използва в настоящите български учебници. В по-горе цитираните учебници първо се изучава разширяване на дроб, без да се използва в няколко урока. Събират и се изваждат дроби с равни знаменатели в два отделни урока. Изучават се смесени числа и преобразувания с тях. Чак след това се събират дроби с произволни различни знаменатели в един урок и в един урок се

изваждат, което е крайно недостатъчно за тези трудни за учениците действия.

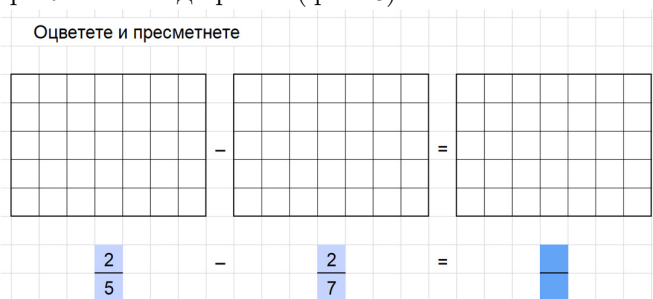
4.2. Модел 2. „Визуализиране на дроби с Excel“

В Excel учителят може бързо да разработи интерактивни работни листове, които да се използват за визуализиране на дробите и да се осъществи незабавна проверка на всеки резултат. На работен лист учителят е визуализирал различни дроби, маркирал е полета, в които учениците да въвеждат своите отговори като несъкратима дроб, и в съседна клетка използва формула (IF), която оценява въведеното от ученика и дава отговор „вярно“ или „невярно“. Работният лист се заключава така, че учениците да могат да въвеждат данни (маркират клетки) само в точно определените за отговор клетки. Пример за такъв работен лист е показан на фиг. 2. Първата задача е записана с решението. При втората задача са дадени само маркирани умаляемото и умалителят, а в третия квадрат ученикът трябва да оцвети оставащите квадратчета. След това преценява и записва трите дроби под съответните квадрати в сините квадратчета ($\frac{1}{2}$ или $\frac{8}{16}$ под първия квадрат и $\frac{6}{16}$ под втория квадрат), като отговорът трябва да е записан с несъкратима дроб ($\frac{1}{8}$), за да излезе надпис „вярно“. В тези две задачи от изображение учениците записват дробите.



Фигура 2. Две задачи от изображение към дроби

След това се решава и „обратната“ задача – от числов израз трябва да се оцвети съответно количество клетки в трите правоъгълника и да се запише разликата под третия (фиг. 3).



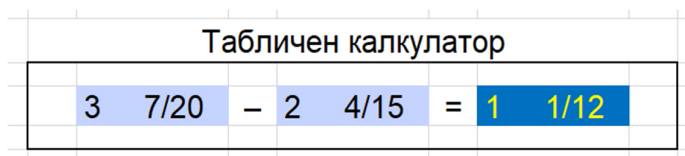
Фигура 3. Преход от числов израз към изображение

Модел 1 също е оценен с висока средна оценка – 4,18.

В друго изследване се предлагат начини за визуализиране на умножение и работа със смесени числа (Georgieva, 2022, 101, 103).

4.3. Модел 2. „Калкулатор за обикновени дробни“

За проверка на решените задачи учениците използват предварително подготвен от учителя калкулатор в електронна таблица (фиг. 4). В двата светли правоъгълника (вляво) се въвеждат дробни, а резултатът от изваждането им се визуализира в тъмния правоъгълник (вдясно). Този калкулатор се разработва лесно. Учителят маркира три клетки, в третата въвежда знак „=“ и разликата на другите две. Клетките са форматиран така, че да показват смесени числа.



Фигура 4. Авторски табличен калкулатор в Excel за изваждане на смесени числа

Моделът е оценен от експертите с оценка 4,18.

4.4. Модел 4. „Методика на въвеждане на операциите с десетични дробѝ“

След като първо са изучени обикновените дробѝ и действията с тях, въведени са десетичните дробѝ, в урок за нови знания за операциите събиране и изваждане на десетични дробѝ е подходящо да се използва по-долу описаният модел. Алгоритъмът за събиране на десетични дробѝ не се дава догматично, а се използва следната последователност за убеждаване в това защо са приети тези правила. Ще разгледаме показване на верността на действие събиране, а последователността е същата за действие изваждане.

1. Десетичните дробѝ се преобразуват в познатите обикновени дробѝ/смесени числа ($0,75 + 2,4 = \frac{3}{4} + 2\frac{2}{5}$).

2. По известния алгоритъм за събиране на обикновени дробѝ се извършва операцията събиране ($\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5} = \frac{15}{20} + 2\frac{8}{20} = 3\frac{3}{20}$).

3. Резултатът – обикновена дроб се превръща в десетична ($3\frac{3}{20} = 3,15$).

4. Въвежда се алгоритъмът за събиране на десетични дробѝ – събират се стотни със стотни, десети с десети, събират се целите части, като ако е необходимо, се прехвърля към следващия десетичен разряд (фиг. 5).

5. Сравняват се резултатите от двата начина на събиране ($3,15 = 3,15$). От равенството на резултатите се достига до заключението, че нововъведеният алгоритъм е валиден.

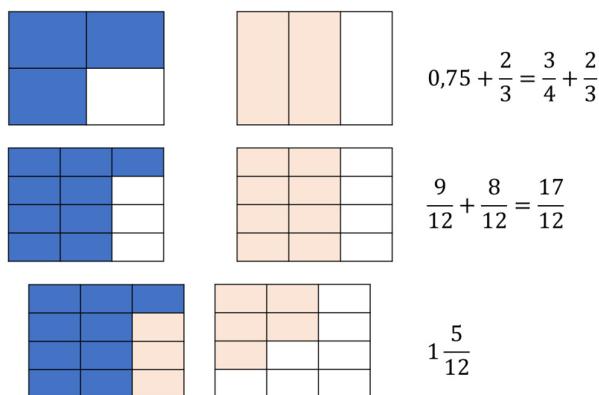
	Цяла част,	десети	стотни
+	0,	7	5
	2,	4	0
	2,	11	5
	3,	1	5

Фигура 5. Въвеждане на правилата за събиране на десетични дробѝ

Трябва да се обърне внимание на аналогията на този алгоритъм със събирането на естествени числа.

В същата последователност се въвеждат и останалите операции с дробни.

В урок за упражнение е добре да се предложат задачи с числови изрази, в които едното число е обикновена дроб, а другото е в десетичен вид, и да се преобразуват до еднакъв запис (фиг. 6).



Фигура 6. Визуализиране на събиране на десетични и обикновени дробни и смесени числа

В някои случаи, когато обикновената дроб е равна на безкрайна периодични десетични дроб, се получава приближена стойност. Затова е по-целесъобразно десетичната дроб да се запише като обикновена дроб.

Модел 4 е оценен от експертите със средна оценка 3,78, вероятно защото в учебниците направо се показват правилата за събиране на десетични дробни (Ninova et al., 2023; Vitanov et al., 2022). Позитивът е, че операциите не се въвеждат догматично, а има разбиране и убеждаване във верността на използваните правила.

4.5. Модели за изучаване на рационалните числа ($\mathbb{Q}$)

Моделите за изучаване на рационални числа са изведени от принципа за историцизма в математиката, похватите за мотивиране на новото знание, методите за изучаването на числата, практическото значение на знанието.

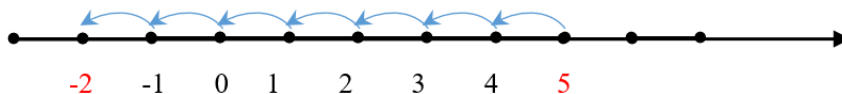
Необходимостта от въвеждане на новото множество⁷ се мотивира с проблемна ситуация: „През деня температурата била 4°C . През нощта спаднала с 10 градуса. Колко е температурата на сутринта?“. Необходимо е да се въведе друго числово множество, в което проблемът има решение.

Учениците могат да си представят положителните числа, като парите, които имат, а отрицателните – като тези, които дължат. В дидактическата ролева игра „Връщам кредит“ кредитополучателят връща на части кредита (назовава/записва по-малки по модул числа), а банкерът записва с отрицателно число оставащия дълг. Този подход е оценен с оценка 4,11. Подходяща е и играта „Пазарувам“.

Докато усвояват действията с отрицателните числа, е добре да се използват само цели числа, защото учениците, които не владеят достатъчно добре операциите с дробни числа, няма да се справят и с отрицателните рационални числа.

Друг проблем е разбирането на понятието *модул / абсолютна стойност*, което се въвежда след понятието *противоположни числа*. Добре е да се използва следният пример: „От В. Търново едновременно тръгват два автобуса – единият към София, а другият към Варна. За да изчисли разходите за гориво, счетоводителят се интересува от изминатото разстояние, без да взема под внимание посоката, т.е. знака на числото“.

След въвеждане на понятието модул се въвежда събиране и изваждане на цели числа. Още в началното училище върху числовия лъч, когато се изваждат две числа, учениците преместват показалеца с толкова деления наляво, колкото показва умалителят. Аналогично, когато събират с отрицателно число, е необходимо да преместят толкова деления наляво, колкото показва второто събираемо, взето без знак. Например $5 + (-7) = -2$ (фиг. 7).



Фигура 7. Преместване по числов лъч – събиране с отрицателно число

В авторския модел учителят изисква от учениците да направят термометър от картон с подвижна лента, оцветена наполовина, и да проверяват решенията си, като местят лентата нагоре или надолу.

На въпроса със свободен отговор „Как вие обяснявате умножение на отрицателно по отрицателно число на учениците?“ почти всички отговори се отнасят към догматичния начин – изказва се правилото. Само един отговор е по-различен: „Минусът има нужда от другарче, за да се превърне в плюс. По-късно обобщавам, че ако минусите са нечетен брой, резултатът е отрицателен“. Изводът е, че трябва да се измислят още примери за изясняване на умножението. Обяснението на умножението на отрицателно по отрицателно число може да се направи чрез ситуация, свързана с отмяна на дългове, която е интуитивна за учениците. Например: „Иван има дълг към Петър от 10 лв., но Петър решава да му го опрости (или да го „анулира“). Това означава, че дългът (–10 лв.) се отнема (друга „отрицателна“ операция). Така Иван вече няма дълг, а вместо това се оказва „на плюс“ с 10 лв. Резултатът е: $(-1) \cdot (-10) = +10$ лв. Това показва, че „отмяната на отрицателно“ е с положителен ефект. Тази ситуация в експертната карта е оценена с 3.86, т.е. не всички биха я използвали.

Учениците записват с различен цвят правилата: „Когато умножаваме две числа с еднакви знаци, се получава положително число, а когато умножаваме с различни знаци, се получава отрицателно число“. Тези мнемонични кратки правила осигуряват трайно запомняне.

За затвърждаване на знанията в LearningApps.org в игрова форма учениците усъвършенстват уменията си за поддръждане на рационалните числа по големина⁸ и извършване на аритметични действия с рационални числа, като свързват израз с число⁹. Чрез

упражняване се развиват трайни умения за опериране с рационални числа.

Можем да обобщим, че модел 5 „**Въвеждане и усвояване на отрицателните числа**“ включва следните дейности:

- използване на сведения от история на математиката
- разрешаване на практическа ситуация
- използване на примери от живота
- организиране на дидактически ролеви игри
- визуализиране на числовата ос и на термометър
- изобразяване на релациите между множествата
- затвърдяване чрез онлайн игри.

Този модел е оценен с 4,54.

Модел 6. „**Система от уроци за изучаване на рационалните числа – нов методически ред**“ включва следната последователност на изучаване:

- Първо да се изучат *целите отрицателни числа* и понятието *модул* – 1 учебен час.
- Да се извършват действията събиране и изваждане с цели числа – 4 учебни часа.
- Да се извършват действията умножение и деление с цели числа – 4 учебни часа.
- След това да се извършват действия с рационални числа – 4 часа.

Въпреки че уроците в учебниците за 6. клас не са подредени в този ред, учителят може да организира дейността на учениците си съгласно модел 6 – на отделни елементарни дейности, за да намали трудността на изучаване на отрицателните числа, когато голяма част от учениците имат пропуски и изпитват затруднения при работа с дробни числа.

Този модел е оценен от експертите с оценка 4,07, което показва, че опитните учители отчитат трудностите за работа с дробни отрицателни числа.

4.6. Модели за изучаване на реалните числа ($\mathbb{R}$)

4.6.1. Модел 7. „Практически задачи“

С цел мотивиране на новите знания за ирационалните числа е подходящо да се решат следните практически задачи (авторски).

Задача 1. За изработването на рамка за квадратна картина с дължина на страната 1 m са необходими допълнителни летви, закрепени по диагоналите, за да не се огъва рамката. Намерете дължината на двете допълнителни летви.

Задача 2. Два перпендикулярни тротоара са с дължина 100 m и 200 m . Хората често не минавали по тях, а вървели през тревата напъряко. От общината решили да покрият тази пътека с плочки. Намерете дължината на пътеката.

Задача 3. Кръгла табуретка има обиколка 80 cm . Диаметърът ѝ е $25,46\text{ cm}$. Намерете частното на обиколката и диаметъра. Каква дроб се получава? Измерете чаша и нейния диаметър. Частното същото ли е като при табуретката?

Всяка от тези задачи е оценена от експертите, като задачите са получили оценки съответно 3,79 за първата; 4,07 за втората и 3,85 за третата.

4.6.2. Модел 8. „Къде срещаме реалните числа в природата и в живота?“ (изследователски проект)

Този проект помага на учениците да свържат абстрактните понятия за рационалните и ирационалните числа с реалния свят. Учениците работят по двама или в малки екипи. Целта е те да открият и обяснят случаи, в които реалните числа се появяват в природата, науката и технологиите. Установяват, че числото π (3,14159265...) се среща: в съотношението между дължината на обиколката и диаметъра на кръгли обекти като планетите, пръстените на дърветата, кашките; вълновите движения на океаните. Златното сечение ϕ (1,618...) се среща: при подреждането на листа и цветове (спиралата на слънчогледа, ананаса); съотношението между различни части на тялото, на морските раковини и някои риби. Неперовото число e (2,718...) се среща: в биологията – експоненциалният растеж на бактерии; икономиката – изчисляване на сложна лихва; физиката – разпад на радиоактивни вещества. Учениците измерват естествени обекти (листа, цветя) и проверяват дали пропорциите, образувани от

размерите на техни части, са подобни на златното сечение. Изследват изображения на човешки лица. От интернет се запознават как банките изчисляват лихвите върху депозити и кредити. Всяка група подготвя презентация или постер, с които обяснява получените резултати чрез реални измервания или експерименти.

На въпроса „Доколко този модел показва връзката на математиката с реалния свят“ експертите дават висока оценка 4,17. Но не всички учители използват този подход при изучаване на числовите множества – 3,52.

4.6.3. Игрови модел 7. „Ирационалните числа“

Игровизацията навлиза все повече в обучението по математика. Чехларова и Сендова в книгата „Необикновено за обикновените дробни“ (Chehlarova, Sendova, 2012) предлагат игровия и изследователския подход за изучаване на дроби и проценти. С разработените динамични проекти на GeoGebra във „Виртуален училищен кабинет по математика“¹¹ учениците изследват, експериментират, допускат хипотези, потвърждават ги или ги отхвърлят и активно конструират своите знания и умения.

В авторския модел за изучаване на ирационални числа обучаваните играят играта „Търсачи на ирационални числа“, целта на която е те да откриват ирационални числа в различни математически, природни и реални ситуации. Необходимо е учениците да имат достъп до устройства (таблети, смартфони и др.) с интернет. Класът се разделя на отбори (2 – 4 души в отбор). Всеки отбор получава карта със задачи и дневник (електронен или хартиен) за записване на резултатите. Изпълняват „мисии“, за да събират точки. В края представят своите „открити“ ирационални числа и доказателствата защо са такива. Отборът с най-много точки печели.

Игровите правила са следните.

Първа игрова серия: Разграничаване на рационални и ирационални числа

Учениците получават списък с числа (например: $3; 2,5; \sqrt{5}; \pi; \frac{4}{7}; 0,333; \dots e$) и трябва да ги разделят в две категории: рационални и ирационални. Получават по една точка за всяко правилно

класифицирано число или две точки, ако представител на отбора може да обясни защо дадено число е рационално (записано е като обикновена дроб или крайна десетична или безкрайна периодична дроб) или е ирационално (записано е с безкрайна непериодична десетична дроб с многоточие).

Втора игрова серия: Приблизителни стойности на ирационални числа

Учениците трябва да открият рационални числа, приближения на ирационалните числа със зададена точност. След което трябва да обяснят защо тези приближения не са точни. Получават по три точки за правилно намерено приближение и по още 2 точки за обяснение защо числото е ирационално.

По време на играта всеки отбор записва в своя дневник (хартиен или електронен): намерени ирационални числа; къде са ги открили; кратко обяснение защо числото е ирационално (не е записано с обикновена дроб, нито е крайна или безкрайна периодична дроб); снимки, чертежи или доказателства. Учителят (или жури от ученици) проверява дневниците и присъжда допълнителни точки за най-креативни находки. Може да има „тайно число“ (например число, което прилича на ирационално, но всъщност е рационално – като $\frac{22}{7}$), което носи бонус точки на отбора, който го открие. В края на играта се сумират точките и се определя победителят.

Особено внимание трябва да се обърне на обяснението, което учениците да усвоят – ирационалните числа не са „десетични дроби, чиито цифри не се повтарят“, а неизразими с обикновена дроб числа, които не притежават период и техни приближения са рационални числа.

Половината от експертите са дали максималната оценка (5) за тази игра, а 26% оценка – 4. Не са дадени конкретни предложения за подобрене. Има два противоположни отговора: „Учениците са големи и гледат с насмешка на игрите“, а другият отговор е „Прекрасно и сполучливо е!“.

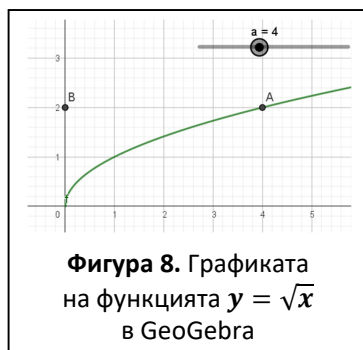
На въпроса „Доколко във вашата практика използвате игровия подход за изучаване на числовите множества?“ експертите се

самооценяват с 3,63, т.е. не всички използват този подход. Съгласно различни проучвания този подход е ефективен, защото: учениците са активни; те трябва да анализират и обясняват; откриват приложението на числата. Състезателният елемент прави ученето забавно и мотивиращо. Следователно е необходимо разработването и прилагането на подобни игри при изучаване на числовите множества.

4.6.4. Модел 8. „Визуализиране на непрекъснатостта на реалните числа“

В 8. клас при изучаване на реалните числа учителят започва от обсъждане на дискретността на множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Показва числова права с изобразени целите числа. Пита дали между две съседни естествени числа има друго естествено число, дали между две съседни цели числа има друго цяло число (отговорът е „не“). Достигат до извода, че точките, които изобразяват целите числа, са отделни (дискретни) и не запълват цялата права. Задава въпрос дали между две съседни цели числа има друг вид число и как се нарича то (рационално число). Разсъждават и дават примери, че между кои да е две рационални числа има друго рационално число. Достигат до въпроса дали те плътно покриват цялата права. Припомня задачата за намиране на диагонал на квадрат с дължина на страната 1 мерна единица и че няма рационално число, което да е равно на дължината на този диагонал.

В GeoGebra учителят показва Декартовата координатна система. По ординатната ос се виждат само целите числа. Увеличава изгледа, деленията стават по-малки и се виждат и десетичните дробни (рационалните числа). Визуализира графиката на функцията $y = \sqrt{x}, x > 0$ (фиг. 8), без да назовава термините, тъй като те се въвеждат в 9. клас. Обяснява, че GeoGebra изчертава множеството от точки с координати $(x, \sqrt{x})$ при $x > 0$. Добавя плъзгач a от 0 до 10, в командния ред дефинира точки $A(a, \sqrt{a})$ и $B(0, \sqrt{a})$. Задава въпроси къде се движат точките, колко е приблизителната стойност на $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}...$ Обяснява, че ирационалните числа



запълват „празнините“ между рационалните числа, създавайки непрекъсната плътна числова ос (в случая ординатната ос). Необходимостта всяка отсечка да има дължина, е една от причините за разширяване на множеството на рационалните числа чрез добавяне на ирационални числа. Обяснява, че на всяка точка от числовия лъч съответства число от множеството на реалните числа $\mathbb{R}$.

5. Заключение

От подложените на експертна оценка модели достигаме до някои изводи.

Необходима е промяна в реда и времетраенето на уроците за изучаване на операциите с обикновени дроби. В един урок да се изучава разширяването на дроб и веднага да се показва приложението – събиране и изваждане на дроби с различни знаменатели. Да се подредят по сложност дейностите за събиране и изваждане на дроби: 1 час за дроби с равни знаменатели; събиране и изваждане на дроби с кратни знаменатели и дроби с взаимно прости знаменатели – 1 учебен час; и чак тогава да се премине към дроби с произволни знаменатели.

Подходящо е да се използват квадратната мрежа и възможностите на Excel за визуализиране на дробите, за създаване на интерактивни работни листове и за изработване на калкулатори за дроби.

Поради не достатъчно високата оценка на модел 4 „Методика на въвеждане на операциите с десетични дроби“ е необходимо експериментално да се провери в реалната учебна практика неговата ефективност.

При въвеждането и усвояването на отрицателните числа да се включат дейностите: използване на сведения от история на математиката; разрешаване на практическа ситуация; използване на примери от живота; организиране на дидактически ролеви игри; визуализиране на числовата ос и на термометър; изобразяване на релациите между множествата; затвърдяване чрез онлайн игри.

Налага се промяна в реда на изучаване рационалните числа: изучават се целите отрицателни числа и понятието модул; извършват се действията събиране и изваждане с цели числа; усвояват се

действията умножение и деление с цели числа; упражняват се действията с рационални числа.

По-подходящо е за въвеждане на ирационалните числа да се използва подходът, при който се поставят практически ситуации, които са неразрешими в изученото до момента множество. Добре е да се възложи изследователски проект за дообогатяване на знанията за реалните числа. Необходимо е да се разработят дидактически игри и да се въведат в учебната практика.

Дигиталните технологии биха могли да се използват и при изучаване на понятието *число*.

Предложените модели и дейности са подходящи както за традиционно обучение в класната стая, така и за дистанционна или хибридна среда.

С гореописаните модели и подходи за въвеждане и затвърдяване на знанията на база експертната оценка се очаква да се формират трайни компетенции за разбиране множествата от числа и техните подмножества, за свойствата на операциите с тези числа и умения за прилагане на знанията в реални ситуации. Изучаването на числовите множества чрез разширяване на познатите множества до нови, като се използват разработените модели, вероятно ще спомогне за осъзнаване на математиката като система от знания.

Благодарности

Авторските модели са разработени във връзка с проект № ФСД-31-328-17/23.04.2025 г. „Иновативни модели за математическо образование в съвременното общество“ на ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“.

Благодаря на проф. д-р Даринка Гълъбова за оказаната подкрепа и обективно мнение.

Благодаря на всички учители, преподаватели и образователни експерти за тяхната експертна оценка.

БЕЛЕЖКИ

1. МОН, *Учебна програма по математика за 4. клас.*
2. МОН, *Учебна програма по математика за 3. клас.*

3. МОН, *Учебна програма по математика за 5. клас.*
4. МОН, *Учебна програма по математика за 5. клас от 2010 г.*
<https://teacher.bg/library/2863/>
5. МОН, *Учебна програма по математика за 5. клас от 2018 г.*
https://www.mon.bg/nfs/2018/01/up_v_maths.pdf
6. МОН, *Учебна програма по математика за 5. клас от 2021 г.*
https://www.mon.bg/nfs/2021/01/up_5kl_maths-200121.pdf
7. МОН, *Учебна програма по математика за 6. клас.*
8. <https://learningapps.org/23497275>
9. <https://learningapps.org/23497275>
10. МОН, *Учебна програма по математика за 8. клас.*
11. Виртуален училищен кабинет по математика
<https://cabinet.bg/index.php?status=applet&appletid=14&page=1>

ЛИТЕРАТУРА

- Ангелова, В., Топалска, Р., 2016. *Математика за 1. клас.* София: Просвета Плюс ЕАД. ISBN 978-619-222-020-04.
- Башмакова, И., Беръзкина, Е., Володарски, А., Розенфелд, Б., Юшкевич, А., 1974. *История на математиката от най-древни времена до началото на новото време, втори и трети том.* София: Наука и изкуство.
- Белева, П., 2019. STEM технологии за повишаване на интереса на учениците към математиката, *Образование и квалификация*, Университетско издателство „Св. св. Кирил и Методий“, 104 – 115.
- Богданова, М., Темникова, М., 2016. *Математика за 1. клас.* София: Булвест 2000, КЛЕТ България. ISBN 978-954-18-1012-5.
- Богданова, М., Темникова, М., 2016. *Книга за учителя. Математика за 1. клас.* София: Булвест 2000, КЛЕТ България. ISBN 978-954-18-09853.
- Витанов, Т. Кирова, Г. Шаркова, З., Пушкарлова, И. Парушева, Д., 2016. *Математика за 1. клас.* София: Анубис, КЛЕТ България. ISBN 978-619-215-0563.

- Витанов, Т., Лозанов, Ч., Дилкина, Л. Джонджорова, И., Тодорова, П., Караджова, Р., 2022. Математика за 5. клас. Първа част, Клет България ООД, ISBN 978-619-215-634-3.
- Вълкова, Т., Момчева, Т., Стоянова, Д., и др. 2016. Книга за учителя математика за първи клас, Варна: „Бит и техника“ ООД.
- Върбанова, М., Ганчев, И., 2002. *Методика на обучението по математика. Специална част*. Пловдив: Астарта., ISBN 954-91070-6-X.
- Ганчев, И., Портев, Л., Баев, Б., Тодорова, П., 1997. *Методика на обучението по математика 5. – 7. клас*. Пловдив: Макрос 2000.
- Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю., 1998. *Методика на обучението по математика от 8. до 11. клас, част 2*. София: Модул.
- Георгиева, Д., 2022. *Формиране и развиване на математически умения чрез мултимедийно обучение и генериране на задачи*. Русе: Дема Прес ООД, ISBN 978-619-7546-67-5.
- Гълъбова, Д., 2009. *Теория и методика на формиране на математическите представи у децата в детската градина*. В. Търново: Слово, ISBN 978-954-439-913-9.
- Гълъбова, Д., Георгиева, Д., 2024. *Методика на обучението по математика – традиции и съвременност*. Русе: Дема Прес ООД, ISBN 978-619-7767-04-9.
- Колев, Е., Данова, Д., Тодорова, М., Събева-Колева, Н., 2022. Математика – учебник за 5. клас, Клет България ООД, ISBN 978-654-18-1722-3.
- Лалчев, З. 1997. *Преходът множество – число и неговата проекция в обучението по математика в предучилищна и начална училищна степен*, София: Веда Словена – ЖГ, ISBN 954-8510-37-5.
- Лалчев, З., Вутова, И. 2023. *Математика. Избрани теми. Математическо моделиране в прехода аритметика-алгебра*, София: Веда Словена – ЖГ, ISBN 978-954-8846-84-4.
- Манова, А., Рангелова, Р. 2007. Книга за учителя по математика за 1. клас, София: Просвета – София АД, ISBN 978-954-01-1967-0.

- Минчева, И., 2023. *Методика на обучението по математика в началното училище*. Пловдив: Астарта. ISBN 978-954-350-333-9.
- Нинкова, П., Ликлова, М., Стоева, Т., Ставрева-Нейчева, С., Шаркова, И., 2023. *Математика за 5. клас*. София: Просвета – София АД, ISBN 978-954-01-4282-1.
- Нинкова, П., Ликлова, М., Стоева, Т., Шаркова, И., Ставрева-Нейчева, С., 2023. *Математика за 6. клас*. София: Просвета – София АД, ISBN 978-954-01-4284-5.
- Нинова, Ю., Матакиева, С., Райков, Н. 2023. *Математика за 5. клас*. София: Просвета плюс – ЕАД, ISBN 978-619-222-7.
- Новакова, З., 2002. Книга по математика за учителя – 1. клас. София: Просвета труд, ISBN 954-01-1395-4.
- Паскалева, З., Алашка, М., Алашка, Р., 2023. *Математика 5. клас*. Архимед 2 ЕООД, ISBN 978-954-779-308-8.
- Паскалева, З., Алашка, М., Алашка, Р., 2023. *Математика 6. клас*. Архимед 2 ЕООД, ISBN 978-954-779-310-1.
- Паскалева, З., Алашка, М., Паскалев, П., Алашка, Р., 2024. *Математика 8. клас*. Архимед 2 ЕООД, ISBN 978-954-779-337-8.
- Чехларова, Т., Сендова, Е. 2012. *Необикновено за обикновените дроби. Изследвания с динамични конструкции*, Макрос, ISBN 978-954-5612824.

REFERENCES

- Angelova, V., Topalska, R., 2016. *Mathematics for 1st grade*. Sofia: Prosveta Plus EAD. ISBN 978-619-222-020-04. (in Bulgarian).
- Bashmakova, I., Berezkina, E., Volodarsky, A., Rosenfeld, B., Yushkevich, A., 1974. *History of Mathematics from the Most Ancient Times to the Beginning of Modern Times*, Volumes Two and Three. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian).
- Beleva, P., 2019. STEM technologies to increase the interest of students in mathematics, *Education and qualification*, University Publishing House “St. Cyril and St. Methodius”, 104 – 115 (in Bulgarian).
- Bobos, G., Sierpinska, A., 2017. Measurement Approach to Teaching Fractions: A Design Experiment in a Pre-service Course for

- Elementary Teachers, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18.2, 203 – 239, ISSN: 1473-0111.
- Bogdanova, M., Temnikova, M., 2016. *Mathematics for 1st grade*. Sofia: Bulvest 2000, KLET Bulgaria. ISBN 978-954-18-1012-5. (in Bulgarian).
- Chehlarova, T., Sendova, E., 2012. *Unusual for ordinary fractions. Studies with dynamic constructions*, Macros. ISBN 978-954-561-282-4. (in Bulgarian).
- Ganchev, I., Portev, L., Baev, B., Todorova, P., 1997. *Methodology of teaching mathematics 5th – 7th grade*. Plovdiv: Macros 2000 (in Bulgarian).
- Ganchev, I., Kolyagin, Yu., Kuchinov, Y., Portev, L., Sidorov, Yu., 1998. *Methodology of teaching mathematics from 8th to 11th grade*, part 2. Sofia: Modul, 289 p. (in Bulgarian).
- Georgieva, D., 2022. *Formation and development of mathematical skills through multimedia training and task generation*. Ruse: Dema Press OOD, 192 p. ISBN 978-619-7546-67-5. (in Bulgarian).
- Galabova, D., 2009., *Theory and methodology of forming mathematical concepts in children in kindergarten*. V. Tarnovo: Slovo, 270 p. ISBN 978-954-439-913-9. (in Bulgarian).
- GALABOVA, D., GEORGIEVA, D., 2024. *Mathematics Teaching Methodology – Traditions and Modernity*. Ruse: Dema Press OOD, 315 p. ISBN 978-619-7767-04-9. (in Bulgarian).
- Kolev, E., Danova, D., Todorova, M., Sabeva-Koleva, N., 2022. *Mathematics textbook for grade 5*. Klet Bulgaria Ltd. ISBN 978-654-18-1722-3. (in Bulgarian).
- Lalchev, Z., 1997. *The set-number transition and its projection in mathematics education at preschool and primary school levels*, Sofia: Veda Slovena – ŽG, ISBN 954-8510-37-5
- Lalchev, Z., Vutova, I. 2023. *Mathematics. Selected topics. Mathematical modeling in the arithmetic-algebra transition*, Sofia: Veda Slovena – ŽG, ISBN 978-954-8846-84-4.
- Magreñán, A., Jiménez, C., Orcos, L., Sarriá, I., 2020. Didactic proposal for the learning of numerical sets. *ICERI2020, Proceedings, 13th*

- annual *International Conference of Education, Research and Innovation*, ISBN: 978-84-09-24232-0, doi: 10.21125/ iceri.2020.2024.
- Manova, A., Rangelova, R. 2007. Book for the 1st grade mathematics teacher, Sofia: Prosveta – Sofia AD, ISBN 978–954–01–1967–0.
- Mincheva, I., 2023. *Methodology of teaching mathematics in primary school*. Plovdiv: Astarta. ISBN 978-954-350-333-9. (in Bulgarian).
- Ninkova, P., Liklova, M., Stoeva, T., Stavreva-Neycheva, S., SHARKOVA, I., 2023. *Mathematics for 5th grade*. Sofia: Prosveta – Sofia AD. ISBN 978-954-01-4282-1. (in Bulgarian).
- Ninkova, P., Liklova, M., Stoeva, T., Sharkova, I., Stavreva-Neycheva, S., 2023. *Mathematics for 6th grade*. Sofia: Prosveta – Sofia AD. ISBN 978-954-01-4284-5. (in Bulgarian).
- Ninova, Y., Matakieva, S., Raikov, N. 2023. *Mathematics for 5th grade*. Sofia: Prosveta Plus – EAD, ISBN 978-619-222-7. (in Bulgarian).
- Novakova, Z., 2002. *Mathematics book for the teacher – 1st grade*. Sofia: Prosveta Trud, ISBN 954–01–1395–4.
- Paskaleva, Z., Alashka, M., Alashka, R., 2023. *Mathematics 5th grade*. Archimedes 2 Ltd. ISBN 978-954-779-308-8. (in Bulgarian).
- Paskaleva, Z., Alashka, M., Alashka, R., 2023. *Mathematics 6th grade*. Archimedes 2 Ltd. (in Bulgarian).
- Paskaleva, Z., Alashka, M., Paskalev, P., Alashka, R., 2024. *Mathematics 8th grade*. Archimedes 2 Ltd. ISBN 978-954-779-337-8. (in Bulgarian).
- Rafiepour, A., Abdolahpour, K., Farsani, D., 2022, Developing Conceptual Understanding of Irrational Numbers Based on Technology through Activity System, *Mathematics teaching research journal*, 14 (1), 114-137.
- Rau, M., Aleven, V., Rummel, N., 2024. Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Volume 200: Artificial Intelligence in Education*, 441 – 448, ISSN 1879-8314.
- Varbanova, M., Ganchev, I., 2002. *Methodology of Mathematics Teaching. Special Part*. Plovdiv: Astarta. ISBN 954-91070-6-X. (in Bulgarian).

- Valkova, T., Momcheva, T., Stoyanova, D., et al. 2016. Book for the first grade mathematics teacher, Varna: “Bit i Tekhnika” OOD. (in Bulgarian).
- Vitanov, T., Kirova, G. Sharkova, Z., Pushkarova, I. Paruseva, D., 2016. *Mathematics for 1st grade*. Sofia: Anubis, KLET Bulgaria. ISBN 978-619-215-0563. (in Bulgarian).
- Vitanov, T., Lozanov, Ch., Dilkina, L. Dzhonjorova, I., Todorova, P., Karadjova, R., 2022. *Mathematics for 5th grade. Part One*. Klet Bulgaria Ltd. ISBN 978-619-215-634-3. (in Bulgarian).
- Voskoglou, M., Kosyvas, G., 2012. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1 (3), 301 – 336. Hipatia press. DOI: <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.16>.
- Wortha, S., Klein, E., Lambert, K., Dackermann, T., Moeller, K., 2023. The relevance of basic numerical skills for fraction processing: Evidence from cross-sectional data, *PLoS ONE* 18 (1). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0281241>

COMPETENCY MODELS FOR STUDYING NUMERICAL SETS

Abstract. The study presents a study aimed at expanding students' mathematical competence in studying the concept of number and related concepts. Methodological recommendations on studying numerical sets are summarized and innovative technological models applicable to teaching mathematics in secondary school are developed. They are based on the principles of stimulating active participation of students and revealing the practical application of knowledge about numerical sets. Some of the models integrate electronic tools in mathematics teaching such as GeoGebra and MS Excel and are in the context of digital education. The methodology of developing the models uses the competency-based, research, game and project-based approach to teaching. The effectiveness of the author's models is justified by the method of expert evaluation. The study of numerical sets is considered as a meaningful goal and a means of developing analytical thinking, mathematical culture and key competencies that will support students not only in the educational process, but also in real life.

Keywords: numerical sets; fractions; rational and irrational numbers; learning models; digital technologies

✉ **Dr. Desislava Georgieva, Senior Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-3506-662X

„St. Cyril and St. Methodius“ University of Veliko Tarnovo

Faculty of Mathematics and Informatics

Veliko Tarnovo, Bulgaria

E-mail: d.georgieva@ts.uni-vt.bg