

КЪДЕ Е ГРЕШКАТА В РЕШЕНИЕТО МИ? – РАЗГОВОР ПРЕД БЯЛАТА ДЪСКА С ОЛЕГ МУШКАРОВ

Евгения Сендова

Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. На 13 май т.г. се навършиха 70 години от рождението на проф. Олег Мушкарров, член-кореспондент на БАН. Основите му научни интереси и резултати са свързани с комплексния анализ и комплексната диференциална геометрия. Бил е ръководител на секция *Комплексен анализ*, впоследствие *Анализ, геометрия и топология*. Председател е на Научния съвет на ИМИ – БАН. Има огромни заслуги за административното и научно ръководство на Института, както и като ръководител на националния отбор по математика и на УчИМИ. През последните години чл.-кор. Мушкарров работи активно за учредяването и утвърждаването на Международния център по математически науки към Института по математика и информатика, чийто директор е от 2020 година. Лауреат е на Почетния знак „Марин Дринов“ на лента.

Фокусът на статията е върху преподавателския талант на Олег Мушкарров, илюстриран с един разговор пред бялата дъска, в който говорим за любимите му задачи и един конкретен пример, използван от него в курса му по извънкласна математика. В примера той разкрива убеждението си, че в преподаването е съществено да се разглеждат задачи, в които има грешки в доказателството и от студентите се очаква да ги открият. Затова самият процес на представяне на грешна идея за решение на конкретна задача, осъзнаване на грешката и накрая успешното ѝ коригиране е станал неразделна част от работата му със студенти по математика. Този факт говори красноречиво, че споделянето на подводните камъни в творческия процес е съществено приложение на изследователските таланти на учения и в преподаването.

Ключови думи: грешка в доказателството; олимпийски задачи; извънкласни дейности по математика

The road is always better than the inn.

Cervantes

1. Как подходих към една трудна (но нематематическа) задача

Предложиха ми да направя творчески портрет (словесен, естествено) на чл.-кор. Олег Мушкарров във връзка със 70-годишнината му. Първата ми ре-

акция бе: *Моят специалитет е одостихоплетството!* Традиционно пиша оди на близки, колеги и приятели по случай рождението им дни, но не съм сигурна, че въпросният жанр е застъпен в текущия формат на списанието. От друга страна, едва ли в няколко строфи могат да се обхванат приносите на такъв *комплексен математик* в различни области на математиката и ангажираността му с проб-лемите на преподаването в разнообразен контекст – от издирване, насърчаване и подкрепа на математически таланти до *приземяване на математиката* (по заглавието на *Math2Earth*, един от серия европейски образователни проекти, на които Олег Мушкарров бе координатор от страна на ИМИ – БАН).

Ето няколко щрихи от биографията му, които не мога да не споделя.

Роден е в Благоевград. Запалил се по математиката благодарение на брат си Гошо Мушкарров. Класирал се с най-висок резултат за Международната олимпиада по математика през 1969 г. Отблагодарил се на тези, които са го ръководили тогава, с това, че той, на свой ред, подготвял и водил българския отбор по олимпиади. Ръководил Ученическия институт 15 години... И един немаловажен факт – станал е математик, без да „получава мая“ в чужбина. Тук е пораснал и се е утвърдил, а днес е известен по целия свят.

Чувала съм един голям учител по математика да съветва учениците си: *Не бързайте да разкриете всичките си добри качества наведнъж – дайте шанс на останалите и те да открият нещо във вас...* Та и аз ще ви оставя, драги читатели, да откриете това, което най-много ви интересува за математика Олег Мушкарров, в едно кратко негово представяне във Виртуалния музей *Математиката и информатиката в България (ММИБ)* (ММИБ, 2021).

След дългогодишно приятелско и професионално сътрудничество с Олег (не, не ми е бил студент, но по-надолу ще се обръщам към него на малко име) аз самата все още продължавам да откривам различни негови достойнства и таланти. За един от тях обаче (преподавателския) си дадох сметка на собствен гръб сравнително наскоро. Беше получил покана от Алина Андрееску (съавтор на подготвяната за публикуване книга *Awesome Math: Teaching Mathematics with Problem Based Learning* (Andreescu, Cordeiro & Andreescu 2019) да попълни въпросник, свързан със заглавието, т.е. *Страхотната математика: преподаване с проблемно базирано учене*. От сравнително дългия списък той бе избрал само един въпрос:

What are your favorite problems and why? (Кои са любимите Ви задачи и защо?)

Понеже беше сигурен в моята привързаност и към математиката, и към информатиката, и най-вече – към проблемите, свързани с преподаването им, Олег използва известния програмистки метод *rubber duck debugging*¹⁾, но ме помоли не само да бъда слушател на споделянето му и да вляза в ролята на

студентите му, а и да документирам разговора ни във вид на илюстриран текст (*Вие педагозите ги умеете тези работи!*).

2. За любимите му задачи

Примерът, който илюстрира какъв тип задачи обича да дискутира Олег със студентите си, е от един негов курс за студенти, свързан с извънкласни дейности по математика. За разлика от традиционните ситуации, в които преподавателят очаква студентите да стигнат до решението на добре дефинирана задача (понякога с негова помощ), той им предлага решение, съдържащо някаква грешка, и им хвърля ръкавицата: *Намерете грешката!*

Олег е срещал лично такива задачи като член на българския отбор, участвал в Балканската математическа олимпиада за студенти и млади изследователи в Букурещ през септември 1971 г. Една от задачите била да се намери грешката в предложено решение към алгебрична задача.

Той споделя убеждението си, че задачи от този вид са съществени, защото всеки математик (дори да е професионалист) прави грешки ежедневно. Същественото обаче е, първо, да почувства, че нещо в разсъжденията му не е наред (да го осъзнае), после да открие къде е грешката, и накрая – да намери вярно решение. Със задачата, която ми представи като илюстрация, се сблъскал преди 30-ина години и първият му опит да я реши, се оказал грешен. Именно самият процес да започне с една невярна идея, да осъзнае къде е грешката в разсъжденията му, и накрая да я поправи, станал съществен елемент от курса му през годините. И този процес той се опита да възпроизведе пред мен, а аз – пред вас.

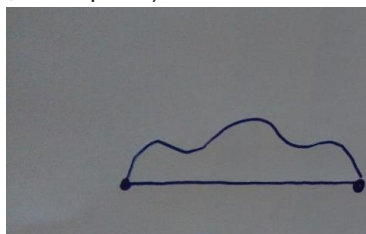
3. Самата задача

Четири града са представени като върхове на квадрат. Постройте най-късата пътна мрежа, която ги свързва.

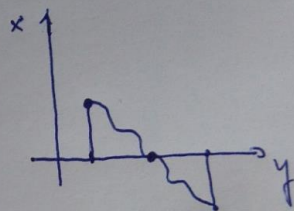
Сега да чуем как Олег представя първоначалното си „решение“ на студентите. Ще използваме два важни математически факта.

Най-късият път между две точки в равнината е отсечката, която ги свързва (фиг. 1).

(2) Ако една непрекъсната функция приема противоположни стойности в краищата на даден интервал, тя се анулира във вътрешността му (Теорема на Болцано², фиг. 2).

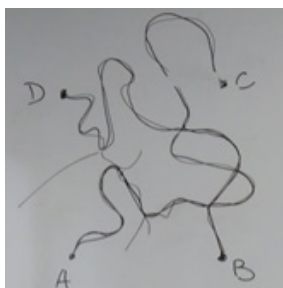


Фигура 1

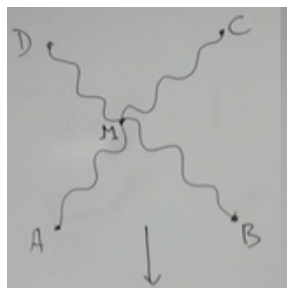


Фигура 2

Да започнем с произволна пътна мрежа — система от пътища, които ще представим като непрекъснати криви, свързващи градовете (в нашия случай — върхове на квадрата $ABCD$, фиг. 3а):

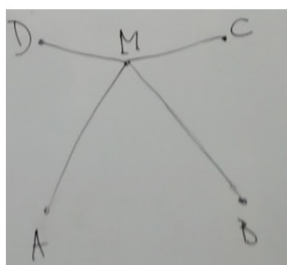


Фигура 3а

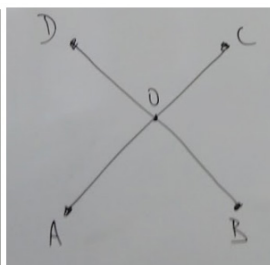


Фигура 3b

Тогава съществува път, свързващ градовете A и C , и път, свързващ градовете B и D . Без загуба на общността можем да приемем, че и двата пътя лежат в квадрата. Според теоремата на Болцано съществува точка M , в която двата пътя се пресичат (фиг. 3b). Новата система пак свързва 4-те града и е по-къса от предишната. По силата на (1) можем да сведем пътищата до отсечки и да скъсим още повече системата, т.е. да я представим като 4 отсечки — AM , BM , CM и DM (фиг. 4а). От неравенството на триъгълника можем да сведем последната пътна мрежа до диагоналите на квадрата (фиг. 4b). Оттук следва, че това е най-късата възможна система от пътища, нали?



Фигура 4а



Фигура 4b

Кимнах утвърдително — кой би посмял да се усъмни?

Да, ама не!!! — тържествуващо ме погледна Олег (както един известен български журналист казваше често²⁾...) И продължи с усмивка:

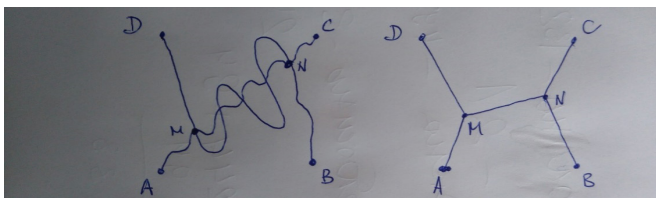
Когато стигнах до това „решение“, почувствах, че нещо не е както трябва — помнех задачата на Щайнер³⁾ за свързване на три селища A , B и C със систе-

ма от пътища с минимална обща дължина. Имах и смътен спомен от няколко фигури в прекрасната книга на Курант и Робинс „Що е математика“ (Kurant & Robins 1985), свързани с обобщения на задачата на Щайнер.

Вместо да се ровя в литературата, реших да разбера „къде е заровено кучето“, т.е. къде грешах (много по-интересно ми беше)!

Да се върнем към нашите математически факти, а именно към теоремата на Болцано. От нея заключихме, че съществува пресечна точка между двата пътя, свързващи противоположните върхове на квадрата. Пресечна точка? Да, но кой казва, че е единствена? Точното твърдение на Болцано е, че съществува **поне една** пресечна точка, значи може и да са повече от една! Това беше моментът на просветление за мен!

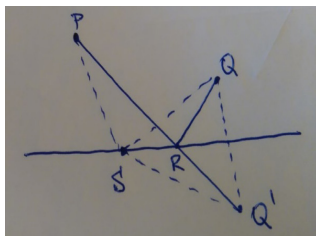
Осъзнаването на грешното допускане, че пресечната точка е **точно една**, ми помогна да заменя системата от фиг. 3а (която редуцирах до системата от фиг. 3b) със системата от фиг. 5а, която може да се редуцира до системата от фиг. 5b. Наистина, ако разгледаме първата и последната от пресечните точки на пътищата, свързващи срещуположните върхове на квадрата, и приложим (1), стигаме до задачата за минимизиране на сумата $|AM| + |DM| + |MN| + |BN| + |CN|$, където М и N са вътре в квадрата ABCD (фиг. 5b).



Фигура 5а

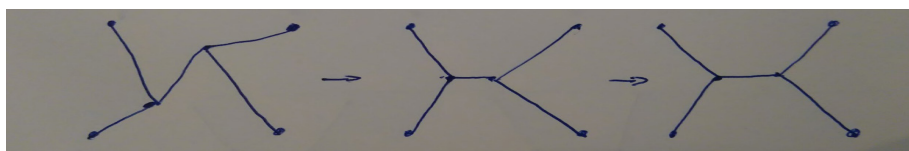
Фигура 5b

Продължаваме със задачата на Херон за най-късото разстояние⁵⁾ (фиг. 6), след това въвеждаме два параметъра (за ъглите между пътищата отсечки и страните на квадрата) и с малко тригонометрия получаваме функция на един параметър.



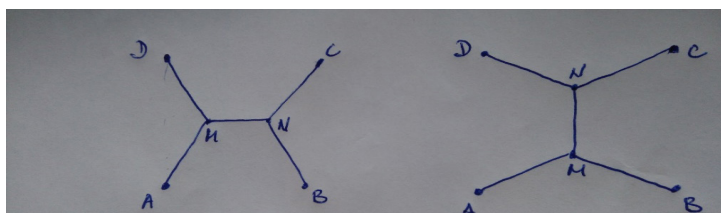
Фигура 6

Като минимизираме тази функция, стигаме до вярното решение (фиг. 7).



Фигура 7

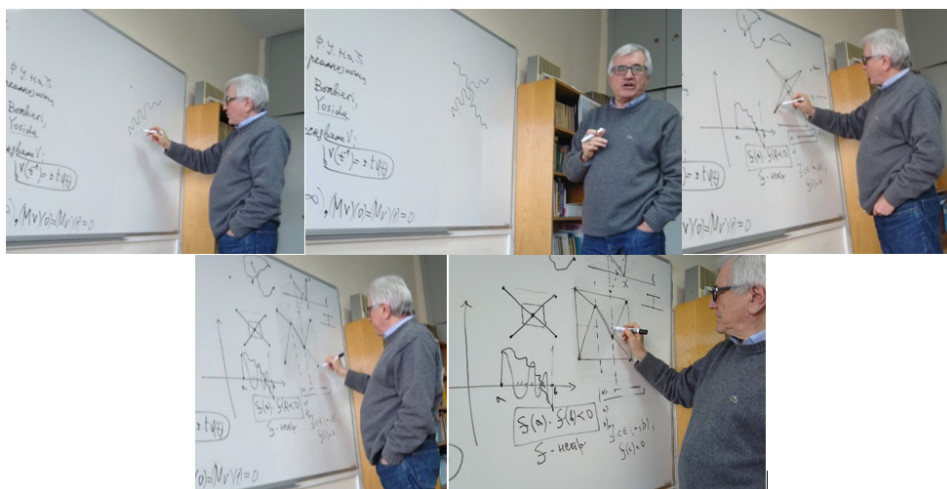
Да отбележим, че задачата има две решения с точност до симетрия (фиг. 8a и 8b).



Фигура 8a

Фигура 8b

Ако парафразирам известна сентенция, биха казала, че една серия от снимки (фиг. 9) е по-красноречива от цяла статия.



Фигура 9

4. Рефлексии след споделеното на дъската

Разбира се, че след като разбрахме *къде е заровено кучето*, с нови очи се поровихме и в литературата. Всъщност (както отбелязват и авторите

на „Що е математика“) задачата на Щайнер за 4 точки би имала първоначалното („грешно“ според Олег) решение, ако бе формулирана по следния начин:

Нека A, B, C, D са различни точки в равнината. Търсим точка M в същата равнина, за която сумата $|AM| + |BM| + |CM| + |DM|$ е минимална.

Ако 4-те точки са върхове на четириъгълник, търсената точка M наистина е пресечната точка на диагоналите на четириъгълника. Но такова обобщение Курант и Робинс окачествяват като „повърхностно“, каквито често се срещат в математическата литература (Kurant & Robins 1985, 349). **Едно действително обобщение** според тях е да се откажем от търсенето на единствена точка M и да търсим „улична мрежа с минимална дължина“ (което вече е задачата, атакувана от Олег).

Що се отнася до историята на задачата, намерихме редица източници (Gander, Santugini & Steiner 2008; Brazil, Graham, Thomas & Zachariasen 2014; Du, Hwang, Song & Ting 1987; Du, Yao & Hwang 1982). В (Gander, Santugini & Steiner 2008) прочетохме, че задачата за намиране на най-късата пътна мрежа, свързваща няколко града, може да бъде открита още в кореспонденцията между Шумахер и Гаус през 1836 г.

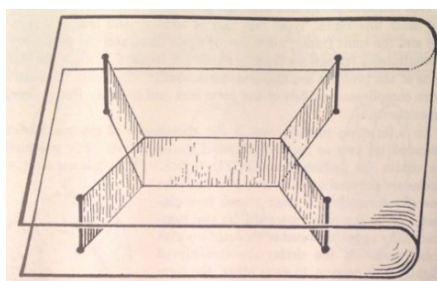
Задачата, от която Шумахер първоначално се интересува, а именно — да се намери точка, която свързва дадено множество от точки с най-късата мрежа, датира още от 1638 г., когато Декарт помолил Ферма да изследва криви, за които сумата от разстояния от точките им до четири дадени точки е постоянна. Мотивиран от този въпрос, Ферма поставил през 1643 г. следната задача: *Ако са дадени 3 точки, коя точка ще минимизира сумата от разстоянията.* Първият, който решил задачата на Ферма за трите точки, бил Торичели — затова тя носи техните имена (задача на Ферма-Торичели).

Фаняно решил случая за 4 точки. Струва си да се отбележи, че докато конструкцията за 3 и 4 точки може да се направи с линейка и пергел, това не е възможно за повече точки в общо положение (резултат, получен с помощта на теорията на Галоа) [ibid.].

Разбира се — сподели по-късно Олег — ако бях атакувал задачата, след като бях прочел всички тези източници, може би никога не бих тръгнал по този път. И това е проблемът на днешните студенти, които първо проучват какво се знае по даден въпрос или задача, търсят в Google FAQ (често задавани въпроси), преди дори да почнат да мислят за възможни подходи. А за мен истинският проблем бе да намеря грешката в първата си идея за решение (до която стигнах въз основа на интуицията си и на привидно добре известни математически факти).

Намерихме и картинката, която Олег смътно си спомняше (фиг. 11). Тя отразява експеримент с две успоредни стъклени плаки, съединени с

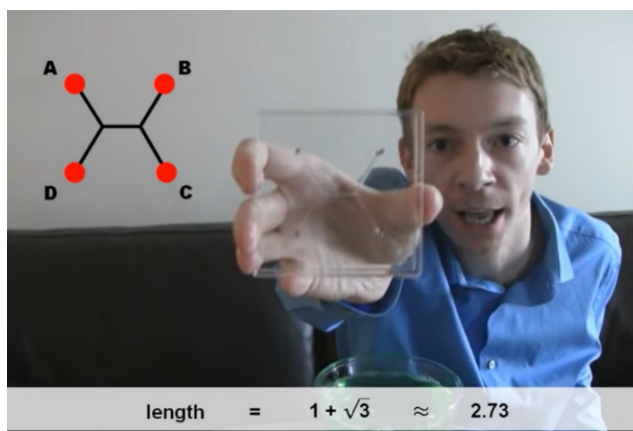
перпендикулярни към тях игли и потопени в сапунен разтвор. След изваждането на системата сапунената ципа образува вертикални равнини, свързващи закрепените игли. Проекцията им върху равнината на едно от стъклата дава решението на разглежданата задача. (Поради действието на повърхностното напрежение една сапунена ципа се намира в устойчиво равновесие само ако лицето ѝ е минимално.)



Фигура 10. Демонстрация на най-късата връзка между 4 точки (Kurant & Robins 1985, 378)

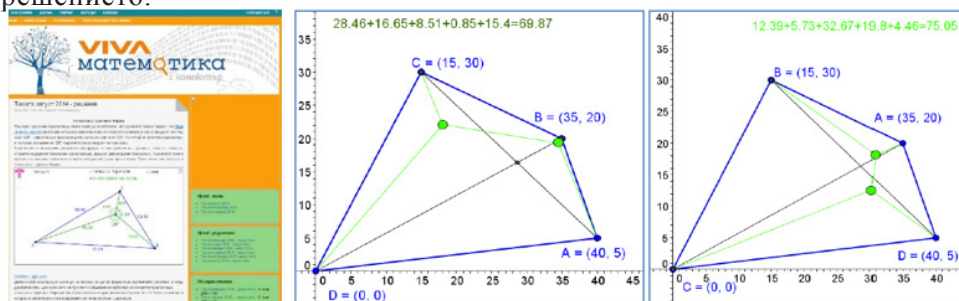
В този момент Олег възкликна: *Какъв късмет, че бях забравил въпросната картинка, но не и що е това математика!*

Интересно как биха реагирали студентите, ако задачата бе дадена за домашно – може би биха попаднали на едно „естествено“ доказателство (фиг. 10), в което пак се използва сапунен разтвор (разбира се, клипчето (MP 2021) в YouTube няма нищо общо със сапунените опери).



Фигура 10

Или пък сякаш да намерят една от най-интересните *математически теми на месеца* (Kenderov, Chehlarova & Sendova 2015) (август 2014, фиг. 11), свързана с намирането на оптималното разположение на антена до няколко къщи (*стълбищата* от задачи от темата е с нарастваща сложност, като се стига до задачата, решавана от Олег, но в случая за произволен четириъгълник). На участниците се предлага динамичен файл, с който те експериментално могат да получат достатъчно точно приближение на решението.



Фигура 11

Може би прочутият експериментален физик Едингтън⁶⁾ е прав да мисли, че *доказателството е идол, пред който чистите математици се самоизтезават*⁷⁾, но той забравя, че именно мъките и успешният процес на откриване на грешките в разсъжденията ни позволяват да изпитахме чистата радост на края...

А аз бих добавила, че целта може да се постигне по различни пътища, но именно пътуването показва кой наистина е математик и как разкрива на студентите що е математика.

P.S. Накрая на разговора Олег скромно заяви: *Ако ти е интересно, след Нова година може да обсъдим въпроса за евентуална статия, посветена на „Основни принципи при решаване на екстремални геометрични задачи“.*

Все още ми е интересно, предполагам и на вас, драги читатели? Да не чакаме следващия юбилей!

Acknowledgements. Статията е написана по повод 70-годишнината на чл.-кор. проф. Олег Мушкарров. Сп. „Математика и информатика“ пожелава на чл.-кор. Мушкарров, който е и член на Редакционната колегия на научното списание, дълголетие и нови творчески успехи!

Е.С.

БЕЛЕЖКИ

1. Метод за откриване на грешки в програмата, при който програмистът обяснява програмата си ред по ред на гуглено патенце.
2. <http://mathworld.wolfram.com/BolzanosTheorem.html>
3. Петко Бочаров, Да, ама не!, Сборник коментари 1988 – 1994.
4. Якоб Щайнер – знаменит представител на геометрията в Берлинския университет в началото на XVIII век
5. Една от първите нетривиални оптимизационни задачи е решена от Херон Александрийски (10 – 75 г. от н.е.). Тя гласи: Ако са дадени две точки Р и Q, лежащи от едната страна на права, да се намери точка R върху правата, за която сумата $|PR|+|RQ|$ е минимална.
6. Arthur Stanley Eddington, Quotes, Available on: <https://goo.gl/B1TJF2> (последно посещение 7 юни 2021 г.).
7. (В оригинал: Proof is the idol before whom the pure mathematician tortures himself)

ЛИТЕРАТУРА

- ММИБ, 2021. Кратка справка за Олег Мушкарров, *Виртуален музей на Математиката и информатиката в България*, http://mmib.math.bas.bg/?page_id=11660 (последно посещение 7 юни 2021 г.)
- Andreescu, T., Cordeiro, K. & Andreescu, A., 2019. *Awesome Math: Teaching Mathematics with Problem Based Learning*.
- Курант, Р. & Робинс, Х., 1985. *Що е математика?* София: Наука и изкуство, 344 – 350.
- Gander M. J., Santugini K. & Steiner A., 2008. Shortest Road network connecting cities. *Bollettino dei docenti di matematica* (56), 9-19, <https://www.unige.ch/~gander/Preprints/BDM56-GanderE.pdf> (последно посещение 7 юни 2021 г.)
- Brazil, M., Graham, R., Thomas, D. & Zachariasen, M., 2014. *On the history of the Euclidean Steiner tree problem*, https://www.researchgate.net/publication/262300152_On_the_history_of_the_Euclidean_Steiner_tree_problem (последно посещение 7 юни 2021 г.)
- Du, D. Z., Hwang, F. K., Song, G. D. & Ting, G. Y., 1987. Steiner Minimal Trees on Sets of Four Points, *Discrete Comput Geom* (2), 401-414 <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02187892.pdf> (последно посещение 7 юни 2021 г.)
- Du, D. Z., Yao, E. Y. & Hwang, F. K., 1982. A Short Proof of a Result of Pollak on Steiner Minimal Trees, *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 32, 3966400

MP 2021. *Maths Problem: Connect the towns solution (Motorway Problem)*
<https://www.youtube.com/watch?v=dAyDi1aa40E> (последно посещение 7 юни 2021 г.)

Kenderov, P., Chehlarova, T. & Sendova, E., 2015. A Web-based Mathematical Theme of the Month, *Mathematics Today* **51**(6), 305-309
ISSN 1361-2042

REFERENCES

MMIB, 2021. Kratka справка za Oleg Mushkarov, *Virtualen muzey na Matematikata i informatikata v Bulgaria*, available on: http://mmib.math.bas.bg/?page_id=11660 , Last visited on June 7, 2021 [in Bulgarian].

Andreescu, T., Cordeiro, K. & Andreescu, A., 2019. *Awesome Math: Teaching Mathematics with Problem Based Learning*.

Kurant, R. & Robins, H., 1985. *Shto e matematika?* Sofia: Nauka i izkustvo, 344 – 350 [in Bulgarian].

Gander, M. J., Santugini, K. & Steiner, A., 2008. Shortest Road network connecting cities. *Bollettino dei docent di matematica* (56), 9-19, available on: <https://www.unige.ch/~gander/Preprints/BDM56-GanderE.pdf> , last visited on June 7, 2021.

Brazil, M., Graham, R. & Thomas, D., Zachariasen, M., 2014. *On the history of the Euclidean Steiner tree problem*, available on: https://www.researchgate.net/publication/262300152_On_the_history_of_the_Euclidean_Steiner_tree_problem , last visited on June 7, 2021.

Du, D. Z., Hwang, F. K., Song, G. D. & Ting, G. Y., 1987. Steiner Minimal Trees on Sets of Four Points, *Discrete Comput Geom* (2), 401 – 414 Available on: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02187892.pdf> , last visited on June 7, 2021.

Du, D. Z., Yao, E. Y. & Hwang, F. K., 1982. A Short Proof of a Result of Pollak on Steiner Minimal Trees, *Journal of Combinatorial Theory. Series A* 32, 3966400

MP 2021. *Maths Problem: Connect the towns solution (Motorway Problem)*. Available on: <https://www.youtube.com/watch?v=dAyDi1aa40E> , last visited on June 7, 2021.

Kenderov, P., Chehlarova, T. & Sendova, E., 2015. A Web-based Mathematical Theme of the Month, *Mathematics Today* **51**(6), 305-309.
ISSN 1361-2042

WHERE IS THE ERROR IN MY SOLUTION? – A TALK WITH OLEG MUSHKAROV IN FRONT OF THE WHITE BOARD

Abstract. The article is dedicated to the 70th anniversary of Prof. Oleg Mushkarov – a full professor at the Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences (IMI-BAS) and a corresponding member of BAS. Currently, he is the Head of the Analysis, Geometry and Topology Department and Deputy Director of IMI-BAS. His main research interests are in the areas of Complex Analysis, Complex Differential Geometry, and Twistor theory. Another important aspect of Oleg’s professional involvements is his work with mathematically gifted high school students. He himself benefited from the Bulgarian system of identifying mathematical talents at an early age leading to his participation in IMO’1969, Romania. Since then, he has been involved in numerous activities dealing with nurturing and developing young mathematical talents.

We present a conversation with him illustrating what his favorite problems are and why. Unlike the traditional situations in which the professor expects the students to come to a solution (possibly with his help), he presents a solution containing mistakes to a well-defined problem and “throw the gauntlet down” for them: *Find the mistakes in the solution!* We provide a specific example in support of his conviction that such problems are crucial in math education (since everyone, even a professional mathematician, makes errors on an everyday basis). The phases the talk in front of the white board went through were:

To feel that something is wrong in his original solution.

To discover where the mistake is.

Finally, to find a correct solution to the problem.

The very process of starting with a wrong idea, becoming aware of the error in reasoning, and finally, succeeding to correct it, which Oleg Mushkarov has kept reproducing when teaching a course on extracurricular math activities to his undergraduate students, reveals his dedication and talents to teaching in addition to his research achievements.

Keywords: errors in the proof; Olympic problems; extracurricular math activities

✉ **Dr. Evgenia Sendova, Assoc. Prof.**

SCOPUS ID: 6508343252

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: jenny@math.bas.bg