

ИЗПОЛЗВАНЕ НА МАТРИЦИ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС НА ОБУЧЕНИЕ

Борислава Кирилова

Резюме. Настоящата статия е посветена на използването на *матрици* в училищния курс на обучение по математика във връзка предимно с решаване и изследване броя на решенията на системи линейни уравнения. В един от примерите е използвано приложението Microsoft Excel.

Keywords: IB, assessment, matrix, determinant, system of equations, parameter, vector

Статията е предназначена за учители и предимно за онези ученици, които имат интерес към математиката, за да могат да направят сравнение с това как връстниците им по света (а в няколко училища вече и у нас) използват матрици за решаване на системи линейни уравнения с помощта на технологиите.

От години насам учениците са свикнали със стандартните задачи, които получават за домашна работа в края на часа по математика. С желание или без те подготвят домашното си за следващия час, преподавателите проверяват написаното, отговарят на възникналите въпроси и така до следващото домашно...

В международен аспект обаче нещата отдавна не стоят така. В една доказала се международна образователна институция, която започва да става популярна и у нас, учебният предмет “Математика“ предоставя възможност на учениците да придобиват математически знания като инструмент за разрешаване на реални житейски проблеми. Става дума за т. нар. IB програма. Какво представлява тя?

IB (International Baccalaureate) е международна образователна организация, създадена през 1968 г. в Швейцария по инициатива на училището на ООН в Ню Йорк и Международното училище в Женева. Тя предлага три програми за обучение – IB Primary Years Programme (за ученици на възраст от 3 до 12 години); IB Middle Years Programme (за ученици на възраст от 11 до 16 години) и IB Diploma Programme (за ученици на възраст от 16 до 19 години). Вече повече от 40 години IB е признат лидер в сферата на международното образование. Към този момент в International Baccalaureate членуват над 3000 училища от над 100 държави. Това

е една универсална система за обучение, успешно компенсираща различията в множеството образователни системи по света; модерно международно образование, съобразено и непрестанно адаптиращо се към промените в глобализиращия се свят. Носителите на IB диплома успешно продължават обучението си в едни от най-престижните университети в света.

Тук ще бъде разгледано по-конкретно обучението по математика в Дипломната програма на IB за последните две години на гимназиалното образование. Обучението в Дипломната програма приключва с вътрешно и външно оценяване по шест предмета в края на втората година. Външното оценяване, формиращо 80% от крайната оценка по математика, се състои от два изпита, които се изпращат за проверка и оценка на оторизирани от IB преподаватели в чужбина. Това от своя страна гарантира уеднаквени стандарти за всички кандидати по света. На първия изпит използването на графични калкулатори не се допуска, докато на втория то е силно препоръчително.

По-интересно в случая е вътрешното оценяване, което формира останалите 20% от крайната оценка. То се базира на курсова работа (портфолио) от две задачи, предварително оценени от преподавателя и повторно проверени от екзаминатори на IB в чужбина. Задачите се избират от сборник, изготвен от специалисти на IB и утвърден от IB. По-долу е представена първата част на една такава задача и нейното решение:

Пример. Разгледайте матрицата $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$.

а) Изчислете M^n за $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50$.

б) Обяснете с думи какво е общото и различното при всеки от наблюдаваните модели.

Решение:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = 2^2 I$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix} = 2^3 I$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix} = 2^4 I$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{bmatrix} = 2^5 I$$

$$M^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} = 2^{10} I$$

$$M^{20} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{20} = \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 2^{20} \end{bmatrix} = 2^{20} I$$

$$M^{50} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{50} = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 2^{50} \end{bmatrix} = 2^{50} I.$$

От изчисленията по-горе може да се направи извод, че в началото фигурира единичната матрица, умножена по две. Промените, които настъпват, са в степените на двойката, но винаги има двойка на степен, съвпадаща със степента на матрицата, като двойката е умножена по единичната матрица:

$$M^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = 2^n I.$$

За един среднестатистически ученик в 11. клас на българското училище тази елементарна задача определено изглежда трудна и неразбираема по няколко причини:

1. В училищния курс по математика не се изучават матрици, въпреки че биха били много полезни както в математиката, така и във физиката или информатиката.

2. Българските ученици не са привикнали на задачи от подобно естество, при които първо трябва да се осъществят няколко опита, след което да се опишат резултатите и да се направят изводи.

3. В българската система на обучение все по-често се прибегва до обяснение на дадена задача и след това се дава подобна на нея за домашна работа. Тази традиционна практика отнема правото на учениците да достигат до самостоятелни изводи и да развиват изследователските си способности.

За сравнение, IB учебникът по математика включва над 300 различни теми, разработени на над 800 страници. Въпреки това многообразие, IB екзаминаторите нерядко поставят на IB учениците именно задача от “Матрици” за тяхното портфолио поради възможностите, които този тип задачи дават за развитие на творческото и аналитично мислене.

На практика матрици се използват всеки ден, без голяма част от хората да осъзнават това. Всеки е виждал годишен календар, където месеците се представят с

матрици. Такива са също списъкът за пазаруване, готварската рецепта, описанието на инвентара в даден магазин, резултатите от срещите на любимия отбор и т.н.. Тези примери от ежедневието са само една малка част от практическото приложение на матриците. Следващите няколко примера показват колко полезни могат да бъдат матриците при решаването на различни типове задачи.

Пример 1.

Ноември 2012						
П	В	С	Ч	П	С	Н
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Пример 2. Нека е даден следният *Списък за пазаруване*: Хляб –2, Мляко –1, Яйца –10, Сирене –1, Сок –3. Да запишем този списък с помощта на матрица.

Самата матрица изглежда по следния начин:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Резултатната матрица има 5 реда и 1 стълб, затова се казва, че тя е с размер 5×1 и се нарича **вектор-стълб**. За прецизиране на аотирането трябва да се посочи, че е прието около матрица да се поставят квадратни скоби.

Пример 3. Да се опише инвентарът на веригата хотели “Банско” с матрица.

Инвентар на веригата хотели “Банско”			
	столове	маси	легла
Х-л 1	100	25	60
Х-л 2	80	20	50
Х-л 3	88	22	40

Резултатната матрица изглежда по следния начин:

$$\begin{bmatrix} 100 & 25 & 60 \\ 80 & 20 & 50 \\ 88 & 22 & 40 \end{bmatrix}.$$

Тази матрица се **състои от 3 реда и 3 стълба**, затова се казва, че е с **размер 3×3** .

От горните 3 примера може да се направи извод, че матрицата представлява правоъгълен (в частните случаи квадратен) масив от числа, подредени в редове и стълбове. Матрица с размер $m \times n$ представлява масив от m реда и n стълба.

За целите на настоящата работа трябва също да се изясни какво представляват: детерминанта на матрица, обратна матрица и как се умножават матрици. Ако вземем например матрицата, с която по-горе бяха описани необходимите продукти за 1 ден и се постави задачата да се пресметне какво количество от тях ще са необходими за 2 дни, ще достигнем до следния резултат:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*2 \\ 2*1 \\ 2*10 \\ 2*1 \\ 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 20 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Тук със звездичка $*$ е означено умножение. При умножаване на матрицата A с числото t се получава произведението tA , което означава, че всеки елемент на A е умножен по t .

Ако сега примерът бъде допълнен с условието, че в магазина Х един хляб струва 1 лв., млякото – 1,50 лв., яйцата – 0,20 лв., сиренето – 5 лв. и сокът – 2 лв., докато в магазина У един хляб струва 1,20 лв., млякото – 1,80 лв., яйцата – 0,25 лв., сиренето – 8 лв. и сокът – 2,50 лв., то решението на задачата колко биха стрували всички тези продукти в различните магазини изглежда по следния начин:

$$\text{Означаваме } A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0,2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1,2 & 1,8 & 0,25 & 8 & 2,5 \end{bmatrix}$$

За пресмятане на необходимата сума в магазина X трябва да се умножат B и A :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0,2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (1*2) + (1,5*1) + (0,2*10) + (5*1) + (2*3) = 16,50 \text{ лв.}$$

В това решение е важно да се отбележи последователността на записа: първо е записана матрицата, представена като ред, а след това тази, представена като стълб, т.е. умножението е **ред по стълб**.

По аналогичен начин се пресмята:

$$CA = \begin{bmatrix} 1,2 & 1,8 & 0,25 & 8 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1,2*2 + 1,8*1 + 0,25*10 + 8*1 + 2,5*3 = 22,20 \text{ лв.}$$

Нека сега матриците B и C бъдат обединени в една матрица D . Тогава

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1,2 \\ 1,5 & 1,8 \\ 0,2 & 0,25 \\ 5 & 8 \\ 2 & 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,50 & 22,20 \end{bmatrix}.$$

Оттук следва, че резултатът от умножението на матриците 1×5 и 5×2 е матрица 1×2 , а елементите на резултантната матрица се получават като суми от произведенията ред по стълб.

Представените до момента знания са достатъчна основа, за да започне решаването на следващия пример. Останалото може да бъде въведено "в движение".

Пример 4. Решете системата
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 4y = 17 \end{cases}$$

В училищния курс по математика се изучават линейни системи уравнения, които според българската образователна система се решават чрез последователно изключване на неизвестните до получаване на уравнение само за едно от неизвестните. Според IB програмата обаче, системи се решават много по-бързо с помощта

на матрици. Като начало системата линейни уравнения може да бъде представена в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Матричните уравнения имат следната форма: $AX = B$, където A е матрица, съставена от коефициентите пред x и y , X е матрица-стълб, съставена от неизвестните, а B е матрица-стълб, съставена от свободните членове-константи. За да се реши матричното уравнение, трябва да се умножат двете страни на равенството с матрица C , за която $CA = I$, където $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ се нарича единична матрица и притежава свойството $IX = XI = X$. Тогава

$$CAX = CB \Rightarrow IX = CB \Rightarrow X = CB.$$

Матрицата C се нарича обратна на A и се бележи с A^{-1} , което от своя страна означава, че

$$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ т.е. ако } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

В такъв случай, дали A^{-1} съществува се определя (determines) от условието $ad - bc \neq 0$. Поради тази причина стойността на лявата страна на израза се нарича **детерминанта** (determinant) на A и се означава с $|A|$ или с $\det A$. В случаите, когато $|A| = 0$, системата или няма решение, или има безброй много решения.

В пример 4 наличието на решение се проверява така: Нека $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Тъй като $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то обратната матрица A^{-1} съществува и задачата има точно едно решение. Това означава, че можем да намерим x и y , което се извършва по следния начин: Нека $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$. Тогава от $AX = B$ следва $A^{-1}AX = A^{-1}B$, т.е.

$$IX = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad X = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -35 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Последното се интерпретира като $x = 5$ $y = -2$.

Може да се случи една задача да няма точно едно решение.

Пример 5. Да се реши системата
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

Най-напред системата линейни уравнения се представя в матричен вид и се изследва дали тази система има решение.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и нека } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Тъй като } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то обратната}$$

матрица A^{-1} не съществува и следователно системата или няма решение, или има безброй много решения. В този случай се изравняват коефициентите пред x или y : първото уравнение се умножава по 2 и ако двете уравнения са еднакви (коефициентите пред всяка от променливите са равни, включително и свободните членове), то заключението е, че системата има безброй решения. В противен случай системата няма решение. В конкретния случай стигаме до следната система:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}, \text{ но } 8 \neq 1 \Rightarrow \text{системата няма решение.}$$

За незапознатите с матричния метод обаче ще се наложи първо да решат системата, за да стигнат до извода, че тя всъщност няма решение.

Ето как би изглеждало решението на пример 5 по стандартния за българското училище начин:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 2(4 - 3y) + 6y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 8 + 0y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 0y = -7 \end{cases}$$

и от последното следва, че системата няма решение.

Друг случай е наличието на безброй много решения на задачата:

Пример 6. Да се реши системата
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$$

Отново първо записваме системата в матричен вид и проверяваме дали тя има решение:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ и нека } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Тъй като } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то обратна-}$$

та матрица A^{-1} не съществува и следователно системата или няма решение, или има безброй много решения. Както и в предишния пример, умножаваме първото уравнение по 2 и стигаме до

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}, \text{ откъдето следва, че системата има безброй много решения}$$

Повечето ученици срещат сериозни затруднения при решаване на уравнения с параметър. Една елементарна матрица 2×2 би решила донякъде този проблем и това може да се види върху следния пример от учебника за 8 клас на издателство “Анубис”:

Пример 7. Дадена е системата
$$\begin{cases} (a+1)x - y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

За кои стойности на параметъра a системата няма решение?

Матрицата на системата изглежда така: $A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, а решението се свежда до прилагане на общия принцип да се намери детерминантата и да се установи за кои стойности на a тя е различна от нула и съответно равна на нула, при което системата или няма решение, или има безброй много решения:

$$\det A = \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (a+1) \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2a + 5 = 0 \Rightarrow a = -2,5.$$

Така, с едно съвсем просто пресмятане на ниво начално обучение се елиминира така “страшният” за повечето ученици параметър, като системата вече придобива

много “по- нормален вид”, а именно:
$$\begin{cases} -1.5x - y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$
. Остава да се извърши стандарт-

ната проверка и след умножение на първия ред по (-2) се достига до
$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$
 но $-2 \neq 0$, откъдето следва, че при $a = -2,5$ системата няма решение.

Без използване на матричния метод решението на задачата би изглеждало така: Най-напред се изразява y от първото уравнение и се замества във второто:

$$\begin{cases} (a+1)x - 1 = y \\ 3x + 2[(a+1)x - 1] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+1)x - 1 = y \\ (5+2a)x = 2 \end{cases}$$

След това се изследва второто уравнение:

$$\begin{aligned} \text{I случай: } 5 + 2a = 0 &\Rightarrow a = -2.5 \\ 0x = 2 &\Rightarrow \text{уравнението няма реални корени.} \end{aligned}$$

$$\text{II случай: } 5 + 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq -2.5, \quad x = \frac{2}{5+2a}$$

По този начин стигаме до отговора, че **при $a = -2.5$ уравнението няма реални корени.**

Следващият пример е за това, как матриците биха помогнали доста по-бързо в сравнение със стандартния подход при решаването на една задача за 12 клас.

Пример 8. Да се реши системата

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y + 3z = 7 \\ 9x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

Принципът и идеята в тази задача са абсолютно същите, както при системите уравнения с две неизвестни и това е едно от основните отличия на матричния метод. Трудността идва от това, че намирането на детерминанта и обратна матрица на матрица с размер 3×3 е значително по-трудоемко. Затова е силно препоръчително да се използва графичен калкулатор, който директно намира обратната матрица, умножава я по матрицата-стълб от свободните членове и връща стойностите на матрицата X . Освен всичко друго, тази методика на използване на помощни средства изгражда у учениците връзка с реалния свят, където подпомагащите ги средства са навсякъде и е важно правилното им и своевременно използване. Към настоящия момент този тип калкулатори не са масово разпространени в България, а и българската система на обучение реферира основно към използването на лист и молив. И все пак, доколкото почти всяко училище разполага с компютри и Microsoft Office, подходът е добре познат на повечето ученици в 12 клас. Пример 8 е посветен именно на този инструмент за решаване на задачата.

Матричната форма на системата се изразява по следния начин:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ и се преобразува до } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$

1. Матрицата A се въвежда в Excel (A1;C3)
2. Пресмята се обратната матрица A^{-1} с формулата MINVERCE(A1;C3)

A5		fx {=MINVERCE(A1;C3)}				
	A	B	C	D	E	F
1	1	-1	-1			
2	1	1	3			
3	9	-1	-3			
4						
5	0	0,1	0,1			
6	-1,5	-0,3	0,2			
7	0,5	0,4	-0,1			

3. Въвеждаме матрицата B (E1;E3)

	A	B	C	D	E
1	1	-1	-1		2
2	1	1	3		7
3	9	-1	-3		-1

4. Пресмятаме произведението $A^{-1}B$ с помощта на формулата MMULT

E5		fx {=MMULT(A5:C7;E1:E3)}				
	A	B	C	D	E	F
1	1	-1	-1		2	
2	1	1	3		7	
3	9	-1	-3		-1	
4						
5	0	0,1	0,1		0,6	
6	-1,5	-0,3	0,2		-5,3	
7	0,5	0,4	-0,1		3,9	
8						

С това са намерени стойностите на матрицата $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -5.3 \\ 3.9 \end{bmatrix}$.

Матриците могат да бъдат полезни и при решаването на други типове задачи за 12 клас, илюстрация на което е следващият пример (отново взет от учебника за 12 клас на Издателство “Анубис“).

Пример 9. Намерете лицето на триъгълника ABC , ако върховете му имат следните координати: $A(1,2)$, $B(3,4)$ и $C(0,5)$.

Ако един триъгълник е определен от векторите a и b , то лицето му е равно на

$$\frac{1}{2}|a \times b| = \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot |b| \sin \alpha,$$

където α е ъгълът, който сключват двата вектора. Решението чрез матрици се изразява на един ред:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 8k \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4.$$

Стандартно решение, основано на изучавания в програмата материал, е следното:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(0-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10},$$

след което по Хероновата формула се намира лицето на триъгълника:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}{2} - \sqrt{8} \right) \left(\frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}{2} - \sqrt{10} \right) \left(\frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}{2} - \sqrt{10} \right)} = 4. \end{aligned}$$

Може да се предположи с голяма доза сигурност, че първото решение на последната задача е точно толкова неразбираемо за повечето ученици, колкото задачата за курсова работа, дадена от ИВ в началото на този материал. Използвано е и

понятието “векторно произведение”, което също не се изучава в училищния курс по математика у нас за разлика от много училища по света. Но темата за този вид умножение на вектори оставаме за следваща публикация.

БЕЛЕЖКИ

1. www.ibo.org
2. Личен архив от семинар за учители на IBO- Атина, Гърция

ЛИТЕРАТУРА

- Лозанов, Ч., Витанов, Т., Недевски, П. & Стоименова, Е. (2002). *Учебник по математика за 12 клас, Профилирана подготовка*. София: Издателска къща “Анубис”.
- Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2004). *Учебник по математика за 8 клас*. София: Издателска къща “Анубис”.
- Owen, J., Hease, R., Hease, S. & Bruce, M. (2004). *Mathematics for the international student, SL*. Hease & Harris Publications.

✉ **Борислава Кирилова**

учител по математика
Американски Колеж София
Фloyd Блaк Лейн, Младост 2
София 1799
E-mail: B.Kirilova@acs.bg

USING MATRICES IN SCHOOL EDUCATIONAL COURSE

Abstract. The present paper is dedicated to the use of matrices in the school education Mathematics course mainly in connection with solving systems of linear equations and examining the number of solutions. Microsoft Excel is used in one of the examples.

✉ **Borislava Kirilova**

Teacher in Mathematics,
American College of Sofia
Floyd Black Lane, MLADOST-2
Sofia 1799, Bulgaria
E-mail: B.Kirilova@acs.bg