

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЛИНЕЕН ТРЕНД ПРИ РЕШАВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Пламен Пенев

Резюме. Статията е продължение на „Решаване на линейни уравнения с Excel“ от бр. 2/2018 г. на сп. „Математика и информатика“ и по същество е развитие на описания в нея модел. Въвеждат се нови техники за изследване на дефиниционни множества.

Keywords: problem solving; equation; numbers; tables; trendline; macros

Увод

Коефициентите на линейния тренд съдържат потенциал за решаване и на нелинейни уравнения. В училищния курс по математика за VIII и IX клас това са квадратните и дробните рационални уравнения. Опростяването на рационалните изрази, които участват в тези уравнения, понякога води до промяна на техните дефиниционни множества (ДМ) и като следствие – до загуба на корен или до поява на чужд корен в решението. Обикновено търсим стойности на x , за които знаменателят на дробта се анулира, и накрая правим проверка дали намерените корени са допустими. Но съществуват задачи, при които определянето на ДМ е част от решаването им. Експерименталната среда на Excel и вградените в нея Visual Basic позволяват тези действия да бъдат автоматизирани.

Разделяй и владей

Разглеждаме уравнението като частен случай на съответната функция. Характерните точки на функцията изследваме в избрана област (например от -50 до $+50$), разбивайки областта на части (интервали). Тук в понятието „характерна точка“ включваме и корените на уравнението.

Първи случай. Функцията е дефинирана в краищата на интервала и сменя знака: построяваме права по точки с координати за x краищата на интервала. С намерената от линейния тренд междинна x координата замества границата на интервала, чиято функция е с по-голямо абсолютно отклонение, и отново построяваме линията на тренда (изправяме кривата). Поставена в машинен цикъл, операцията неминуемо води до стесняване на интервала и в крайна сметка – до анулиране на функцията или до изчислителна грешка #DIV0! (Деление на нула).

Пример 1. Да се реши уравнението: $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

B2 fx $3*x*x+11*x+6$						
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	-0,666666666666667	0	7	4,666666667	-0,66667	0,1
3	-0,666666666666699	-2,2382E-13			-2/3	
4	-0,666666667	0				

Фигура 1

В един от интервалите цикълът с постусловие „анулиране на функцията“ е открил корен $x_1 = -\frac{2}{3}$. Клетки A2 и A3 са крайни X координати, B2 и B3 – съответните Y координати, A4 и B4 – работни клетки, C2 и D2 – коефициенти на линейния тренд $y = cx + d$ ($c \neq 0$), получени от зона A2.. B3, E2 е изчислената стойност на x ($x = -\frac{d}{c}$).

Формули:

C2 $\leftarrow$ Slope(B2..B3;A2..A3)

D2 $\leftarrow$ Intercept(B2..B3;A2..A3)

E2 $\leftarrow$ -D2/C2

A4 $\leftarrow$ E2

Ето първите две (от общо пет) итерации в основния цикъл:

fx $=3*A3*A3+11*A3+6$						
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	-0,6676056	-0,00657012	6,997224	4,664815998	-0,66667	0,1
3	-0,6666531	9,5297E-05				
4	-0,6666531	9,5297E-05				

fx $=3*A3*A3+11*A3+6$						
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	-0,6666667	-3,8364E-08	7,000041	4,666693883	-0,66667	0,1
3	-0,6666531	9,5297E-05				
4	-0,6666667	-3,8364E-08				

Фигура 2

След първата итерация е коригирана клетка A2, понеже съдържа променлива, чиято функция е с по-голямо абсолютно отклонение. В третата итерация ще бъде коригирана клетка A3 и т.н.

Графично линейният тренд се мести към точка с координати $[-\frac{2}{3}; 0]$, докато накрая заеме позиция на права, максимално приближена до допирателната в тази точка. От теорията знаем, че ъгловият коефициент c на допирателната е равен на производната на функцията в тази точка. В нашия случай това е 7. За достатъчно малки нараствания на x твърдението може да се провери по формулата: $y' = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{B2 - B3}{A2 - A3}$.

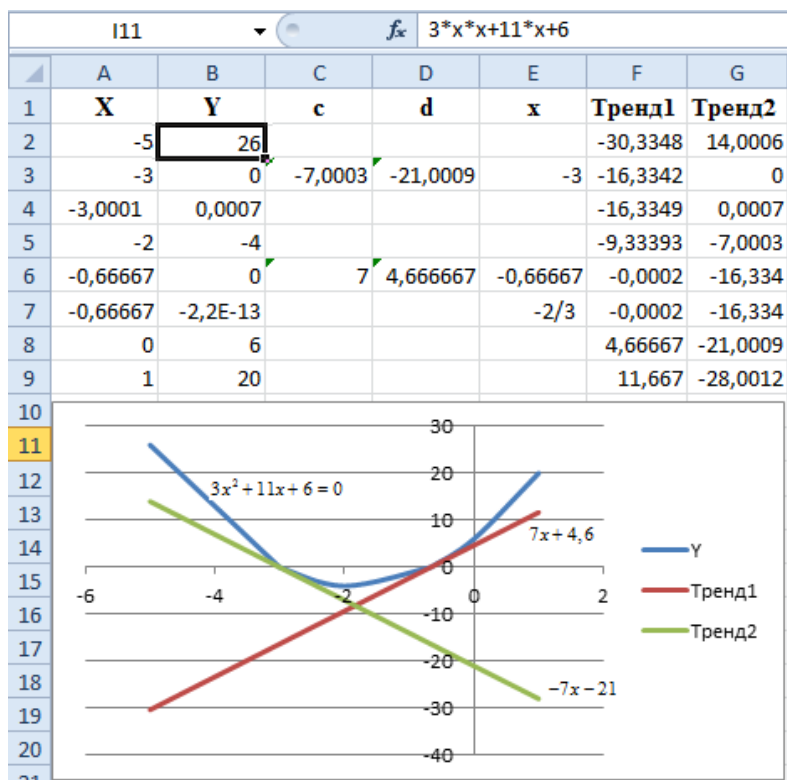
Аналогично основният цикъл открива втори корен $x_2 = -3$.

B8		fx				
	A	B	C	D	E	F
1	x	y	c	d	x	Стъпка
2	-3	0	-7,0003	-21,0009	-3	0,1
3	-3,0001	0,00070003			-3/1	
4	-3	0				

Фигура 3

Ъгловият коефициент c е равен на $-7,0003$. Имайки предвид симетрията на параболата спрямо оста $x = (-3 - \frac{2}{3}) / 2$, очакваме производна, равна на -7 . Появата на знаци след хилядните отдаваме на факта, че изчислението не е резултат от намиране на граница. Проверката показва, че тези знаци могат да бъдат игнорирани без загуба на точност. Окончателно: в точка $[-3; 0]$ имаме $y' = -7$.

Обобщената картина на казаното дотук изглежда по следния начин:



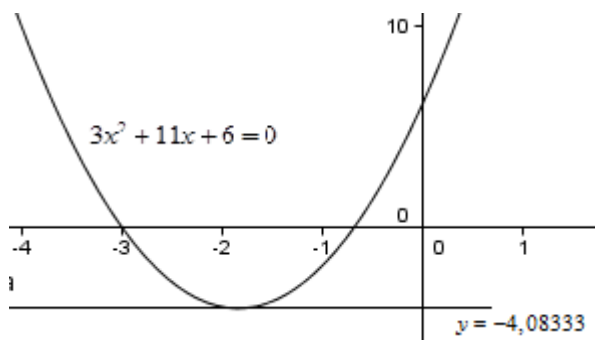
Фигура 4

По експериментален път можем да намерим и екстремума (в случая минимум) на функцията. Линейният тренд в екстремалната точка е допирателна, успоредна на абсцисата (с нулев ъглов коефициент). Следователно търсим тренд, при който клетка C2 е с минимална стойност. Ето отговора на модела:

B2		f _x		3*x*x+11*x+6		
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Съпка
2	-1,8333333	-4,08333333	-1,9E-07	-4,08333	-2,2E+07	0,1
3	-1,8333334	-4,08333333				
4	24,0214519	2001,326426				

Фигура 5

Извод: функцията има минимум $y \approx -4,08333$ при $x \approx -1,83333 = -\frac{11}{6}$.



Фигура 6

Естествено, квадратното уравнение в пример 1 може да бъде решено и чрез посимволно отделяне на коефициентите и проверка на дискриминантата.

b^2-4ac	Sub discr()
Дискр.=49	aaa = InStr(Range("2").Value, "x*x")
$x1=-0,66666$	If aaa = 0 Then
$x2=-3$	MsgBox "Уравнението не е квадратно."
	GoTo nekvaadrat
	End If
	aa = Left(Range("B2").Value, aaa - 2)
	If aa = "" Then aa = 1
	aa1 = InStr(Range("B2").Value, "-x*x")
	If aa1 <> 0 Then aa = -1
	bc = Mid(Range("B2").Value, aaa + 3,
	Len(Range("B2").Value))
	bbb = InStr(bc, "x")
	If bbb = 0 Then
	bb = 0
	Else: bb = Left(bc, bbb - 2)
	End If
	If bb = "" Then bb = 1
	cc = Mid(bc, bbb + 1, Len(bc))
	If cc = "" Then cc = 0
	If IsNumeric(aa) = True Then
	dd = bb * bb - 4 * aa * cc

```

Range("i2") = "Дискр.=" & dd
If dd < 0 Then
MsgBox "Няма решение: (D<0)."
GoTo nekvadrat
End If
deli = 2 * aa
x1 = (-bb + Sqr(dd)) / deli
x2 = (-bb - Sqr(dd)) / deli
'MsgBox "Дискриминанта=" & dd
Range("i3") = "x1=" & x1
Range("i4") = "x2=" & x2
Else: MsgBox "Уравнението не е квадратно!"
End If
nekvadrat:
End Sub

```

Отг. $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = -3$.

Методът на интервалите обаче предоставя по-богати възможности за анализ. Когато функцията прекъсва вътре в интервала, възниква изчислителна грешка „Деление на нула“ (#DIV/0!).

Пример 2. Да се реши уравнението: $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$.

B2		fx (x-3)/(x-5)+1/x-(x+5)/(x*(x-5))				
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	-2	0	-0,49688	-0,99375	-2	0,2
3	-2,000002	8,82627E-15			-2/1	
4	-2	0				
5						
6	X	Y	c	d	x	
7	1,727E-13	1,15811E+13	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
8	0	#DIV/0!				
9	-0,2	-9				
10						
11	X	Y	c	d	x	
12	5	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	
13	4,7999	1,416675347				
14	20,3432221	1,098312843				

Фигура 7

Резултатите показват, че 0 и 5 не са решения, въпреки че 5 анулира квадратното уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, получено след опростяване. Тук 5 е чужд корен.

Отг. $x = -2$.

Втори случай. Функцията не е дефинирана в единия край на интервала.

Получаваме интересна ситуация, ако се върнем итерация назад. В приграничната зона линейният тренд ограничава функцията. Нейната загуба в единия край на интервала е сигурен индикатор, че в областта съществува асимптота. В горния пример правите $x = 0$ и $x = 5$ са вертикални асимптоти на функцията $y = \frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} - \frac{x+5}{x(x-5)}$. По-трудно откриваеми са хоризонталните и наклонените асимптоти.

Пример 3. Да се намерят асимптотите на кривата: $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

Резултати от изследването на приграничните области:

B2		fx		(3*x^4+1)/x^3		
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	1,727E-13	1,9416E+38	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0,2
3	0	#DIV/0!				
4	-0,2	-125,6				

Фигура 8

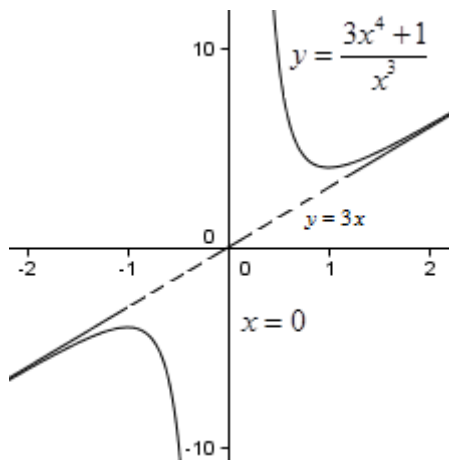
Функцията има една вертикална асимптота $x = 0$.

B2		fx		(3*x^4+1)/x^3		
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	c	d	x	Стъпка
2	49,8	149,4000081	3	3,25836E-05	-1,1E-05	0,2
3	49,5999	148,7997082				
4	-1,086E-05	-7,8049E+14				

Фигура 9

Коефициентът d е достатъчно малък и може да се пренебрегне.

Коефициентът c е равен на 3. Следователно функцията има наклонена асимптота $y = 3x$.



Фигура 9

Теорията потвърждава получените резултати:

$$c = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 1}{x^4} = 3 \text{ и } d = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - cx] = 0.$$

Заклучение

При по-сложните уравнения подвеждащите решения са заложили именно в дефиниционните множества. Задачата започва с определяне на ДМ и завършва с проверка за принадлежност на корен към ДМ. Това са демотивиращи действия, понякога по-трудоемки от самите преобразувания. Описаните в статията техники за анализ на ДМ биха помогнали на ученика в преодоляването на психологическия бариера.

Неволно навлязохме в територията на математическия анализ. Но намирането на производна, минимум и максимум на функция е математически апарат, който се използва при решаване на екстремални задачи. Очевидно възможностите на линейния тренд не се изчерпват дотук и крият още изненади. На „операционната маса“ може да бъде поставено всяко алгебрично уравнение и всяка функция.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Bizova-Laleva, V. (2012). Parametri, tablici I dinamiczni grafiki. *Mathematics and Informatics*, 55 (6), 549 – 561. [Бизова-Лалева, В. (2012). Параметри, таблици и динамични графики. *Математика и информатика*, 55 (6), 549 – 561.]

- Grozdev, S. & D. Dekov (2013). Mathematics with Computer. *Mathematics and Informatics*, 56 (2), 123 – 132. [Гроздев, С. & Д. Деков (2013). Математика с компютър. *Математика и информатика*, 56 (2), 123 – 132.]
- Grozdev, S. & D. Dekov (2013). Ekstremalni zadachi v srednoto uchilishte s pomoshta na komputerni tablici. *Mathematics and Informatics*, 56 (4), 351 – 367. [Гроздев, С. & Д. Деков (2013). Екстремални задачи в средното училище с помощта на компютърни таблици. *Математика и информатика*, 56 (4), 351 – 367.]
- Penev, P. & D. Stefanova (2015). Samostojatelno reshavane na zadachi s Excel. *Mathematics and Informatics*, 58 (2), 149 – 156. [Пенев, П. & Д. Стефанова (2015). Самостоятелно решаване на задачи с Excel. *Математика и информатика*, 58 (2), 149 – 156.]
- Penev, P., (2018). Solving linear equations with Excel. *Mathematics and Informatics*, 61, 2, 132 – 141. [Пенев, П., (2018). Решаване на линейни уравнения с Excel. *Математика и информатика*, 61, 2, 132 – 141.]
- Rangelova, P., K. Bekriev, L. Dilkina & N. Ivanova (1999). *Sbornik po matematika VII klas*. Plovdiv: Letera. [Рангелова, П., К. Бекриев, Л. Дилкина & Н. Иванова (1999). *Сборник по математика VII клас*. Пловдив: Летера.]

USING A TRENDLINE TO SOLVE RATIONAL EQUATIONS

Abstract. The present article shows development of a model for solving linear equations with Excel. New technique is introduced for the examination of domains.

✉ **Mr. Plamen Penev**
Teacher in Informatics
100, Saedinenie St.
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg