

ИЗПИТЪТ ЗА ЧЕТВЪРТА ПРОФЕСИОНАЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА СТЕПЕН ПО МАТЕМАТИКА

Галя Кожухарова

Резюме. Статията съдържа информация за условията, реда и организацията на изпита за придобиване на четвърта професионално-квалификационна степен на учителите по математика. Предложени са задачите от изпита през последните четири години и анализ с кратки решения на задачите от 2011 г.

Keywords: degree, professional qualification degree, problem.

В брой 1 от 2012 г. на списание Математика и информатика публикувахме общите условия за придобиване на професионално-квалификационни степени на учителите. Тук ще се опитаме да подпомогнем подготовката на учителите по математика за придобиване на четвърта професионално-квалификационна степен (ПКС).

Четвърта професионално-квалификационна степен могат да придобият учители по математика, които отговарят на следните условия:

1. имат пета професионално-квалификационна степен;
2. издържат с успех най-малко много добър 4,50 писмен изпит по проблем от конкретната професионална област, в която работят.

Програмата по математика за писмения изпит се състои от следните теми:

1. Понятието число. Операции с числа. Методика на изучаването на рационалните числа в училищния курс по математика.

Разширение на понятието число. Принцип на перманентност. Изграждане на системата рационални числа. Необходимост от въвеждане на рационалните числа. Въвеждане. Дефиниране на сбор и произведение на две рационални числа и свойства на релациите “по-голямо” (“по-малко”) и “равно”. Плътност на множеството на рационалните числа. Методика на изучаването на рационалните числа в училище.

2. Алгебрични структури в множеството на реалните числа.

Алгебричните структури група, пръстен, поле. Методика на изучаването на алгебричните структури в училище.

3. Понятието уравнение. Методика на изучаването им в училище.

Различни подходи при дефиниране на понятието уравнение. Класификация на уравненията. Еквивалентни уравнения, следствия, основни теореми. Методика

на изучаването в училище на квадратно, логаритмично, показателно уравнения. Методика на изучаването на тригонометричните уравнения.

4. Системи уравнения. Методика на изучаването им в училище.

Системи уравнения. Системи уравнения от първа и втора степен с две неизвестни – дефиниране, теореми за еквивалентност, решаване. Методика на изучаването в училище на системи уравнения и методи за тяхното решаване.

5. Понятието неравенство. Методика на изучаването им в училище.

Различни подходи при дефиниране на понятието неравенство. Класификация на неравенствата. Еквивалентни неравенства – основни теореми. Числови неравенства – дефиниции, свойства. Неравенства, съдържащи неизвестно и понятията, свързани с тях. Решаване на квадратно, логаритмично и показателно неравенства. Тригонометрични неравенства. Методика на изучаването на неравенствата в училище.

6. Понятието функция. Методика на изучаването на функциите в училище.

Различни подходи за дефиниране на понятието функция. Начини на задаване на функции. Числови функции. Четност, нечетност, периодичност, растене, намаляване на функции. Изследване на функции. Графики. Изследване на две конкретни функции (по избор). Методика на изследването на функции с метода на анализа в училище.

7. Комбинаторика – пермутации, вариации, комбинации. Методика на изучаването на съединения в училище.

Основни понятия – крайни множества, обединение на множества, декартово произведение на множества. Пермутации. Вариации. Комбинации без и с повторения. Методика на изучаването на комбинаторни съединения в училище.

8. Вероятност. Вероятностно-статистически закономерности. Методика на изучаването им в училище.

Дефиниции на класическата, статистическата, геометричната вероятност. Аксиоматично въвеждане на понятието вероятност. Формули за условна вероятност и вероятност на хипотезите. Представяне на статистически данни чрез описателна статистика – вариационен ред, средни стойности, отклонения. Методика на изучаването им в училище.

9. Еднаквости в равнината. Методика на изучаването им в училище.

Геометрични преобразования в равнината. Симетрия. Ротация. Транслация. Свойства и зависимости. Методика на преподаването на геометрични преобразования в училище.

10. Подобности в равнината. Методика на изучаването им в училище.

Хомотетия – определение, свойства. Подобност – определение, свойства. Подобни фигури. Приложение на подобностите при решаване на построителни задачи. Методика на изучаването на признаците за подобност на триъгълници.

11. Понятието вектор. Методика на изучаването му в училище.

Вектор. Свободен вектор. Събиране и изваждане на вектори – свойства. Умножение на вектор с число – свойства. Векторно пространство. Линеино зависими вектори. Скаларно произведение на два вектори – свойства. Методика на изучаването на афинните операции с вектори в училище.

12. Понятието успоредност в пространството. Методика на изучаването му в училище.

Успоредни прави. Успоредност между права и равнина. Основни теореми. Успоредни равнини. Определение. Основни теореми. Построяване на права и на равнина през точка, успоредна на дадена равнина. Методика на изучаването на понятията и твърденията по темата.

13. Понятието перпендикулярност в пространството. Методика на изучаването му в училище.

Перпендикулярни прави. Перпендикулярност между права и равнина. Основни теореми. Перпендикулярни равнини. Определение. Основни теореми. Построяване през точка на права и на равнина, перпендикулярни на дадена равнина. Методика на изучаването на перпендикулярност на права и равнина и на две равнини.

14. Лице на равнинни фигури. Методика на изучаването им в училище.

15. Тригонометрични функции. Приложение на тригонометричните функции. Методика на изучаването на тригонометричните знания в училище.

Комисията по провеждането на изпита подготвя варианти, от които в деня на изпита се изтегля един. Всеки вариант съдържа две теми, формулировката на които е в обхвата на съдържанието на програмата и две задачи от училищния курс по математика. Темите могат да засягат част от даден в програмата проблем или да насочват към него от определена гледна точка. **Всеки кандидат работи по една избрана тема и една задача.**

Ето някои препоръки при разработването на въпросите:

Разработките трябва да съдържат научно изложение на въпроса от програмата, съчетано със съвременна теоретична аргументираност на проблема; точен понятиен апарат; достатъчно пълен обхват на съдържанието на проблема; задълбоченост и логичност на изложението; доказателство на основни теореми и свойства; методическа интерпретация на разглежданите въпроси.

Предлагаме и текста на задачите от последните четири години:

2008 г.

Задача 1. Дадено е уравнението $k(x+1)^2 = (x-1)(x+2) + 5$.

а) За кои стойности на параметъра k уравнението има единствен корен?

б) Намерете множеството от стойности на параметъра k , за които уравнението има два различни реални корена x_1 и x_2 , удовлетворяващи условието $x_1 < -2 < x_2 < 0$.

Задача 2. Единият от катетите на правоъгълен триъгълник ABC е 12, а разстоянието от центъра O на описаната окръжност до този катет е 2,5. Намерете:

а) страните на триъгълника ABC ;

б) разстоянието между центровете на вписаните окръжности в триъгълниците ACO и BCO .

Октомври 2009 г.

Задача 1. Дадено е уравнението $mx^2 + 3mx - (m+2) = 0$.

а) Решете уравнението.

б) За кои стойности на параметъра m корените на уравнението са по-малки от 2 и са с различни знаци.

Задача 2. В равнобедрен триъгълник бедрото е 10 см, а основата е 12 см. Намерете разстоянието между ортоцентъра и медицентъра на триъгълника.

Ноември 2009 г.

Задача 1. Дадено е квадратното уравнение $x^2 - (3k-2)x + 9k - 15 = 0$, където k е реален параметър.

а) Намерете стойностите на k , за които уравнението има различни реални корени и изразете като функция на k израза $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2x_2^2$.

б) Намерете стойностите на k , за които уравнението има корени в интервала $(1; 4)$.

Задача 2. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDE$ с равни околни ръбове и основа трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с радиус R на описаната окръжност. Единият диагонал на трапеца е перпендикулярен на бедрото и сключва с основите ъгъл α . Дадено е още, че $\angle AEB = \alpha$.

а) Намерете обема на пирамидата.

б) Намерете ъглите между околните стени и основата на пирамидата.

2010 г.

Задача 1. Дадено е уравнението $(a + 3)x^2 + 4x - (a - 1) = 0$.

а) Решете уравнението.

б) Определете стойностите на параметъра a така, че корените x_1 и x_2 на уравнението да удовлетворяват равенството $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$.

Задача 2. Диагоналът на равнобедрен трапец е ъглополовяща на тъпия му ъгъл. Малката основа има дължина 3 см, а периметърът му е 42 см. Намерете лицето на трапеца.

2011 г.

Задача 1. Дадено е уравнението $\|x| - 3| = k$.

а) Решете уравнението, ако k е най-малкото естествено число, което е решение на неравенството $(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 3 \geq 0$.

б) Определете броя на решенията на уравнението в зависимост от стойностите на реалния параметър k .

Решение: а) Неравенството се решава най-лесно с полагането $x^2 - x = u$. То е еквивалентно на $u^2 - 2u - 3 \geq 0$, т.е. на $(u + 1)(u - 3) \geq 0$ и отгук $u \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Тогава $x^2 - x \leq -1 \cup x^2 - x \geq 3$. Първото неравенство е $x^2 - x + 1 \leq 0$. Квадратният тричлен в лявата страна е с отрицателна дискриминанта и приема само положителни стойности. Следователно това неравенство няма решение. Второто неравенство е $x^2 - x - 3 \geq 0$ и решенията му са $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Най-малкото естествено число, което е решение на второто неравенство, е 3, тъй като $\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,3$. Тогава модулното уравнение е $\|x| - 3| = 3$, откъдето имаме $|x| - 3 = -3 \cup |x| - 3 = 3$. Първото уравнение има единствен корен $x_1 = 0$, а корените на второто са $x_{2,3} = \pm 6$.

б) Ще използваме графичен подход чрез графиките на функцията $f(x) = \|x| - 3|$ и на правата линия $y = k$ (всъщност на цяло семейство успоредни на оста Ox прави в зависимост от стойностите на k). Графиката на $f(x)$ може да се построи чрез последователните трансформации

$$f_1(x) = |x|, f_2(x) = f_1(x) - 3 = |x| - 3, f(x) = |f_2(x)| = \|x| - 3|.$$

Ще предпочетем последователни съображения:

Случай 1. $x < 0$. Тогава $f(x) = |-x-3|$.

Случай 1.1. $-x-3 \geq 0$, т.е. $x \leq -3$, при което $f(x) = -x-3$.

Случай 1.2. $-x-3 < 0$, т.е. $-3 < x < 0$, при което $f(x) = x+3$.

Случай 2. $x \geq 0$. Тогава $f(x) = |x-3|$.

Случай 2.1. $x-3 < 0$, т.е. $0 \leq x < 3$, при което $f(x) = -x+3$.

Случай 2.2. $x-3 \geq 0$, т.е. $x \geq 3$, при което $f(x) = x-3$.

Графичното представяне е показано на Черт. 1. От чертежа се вижда, че:

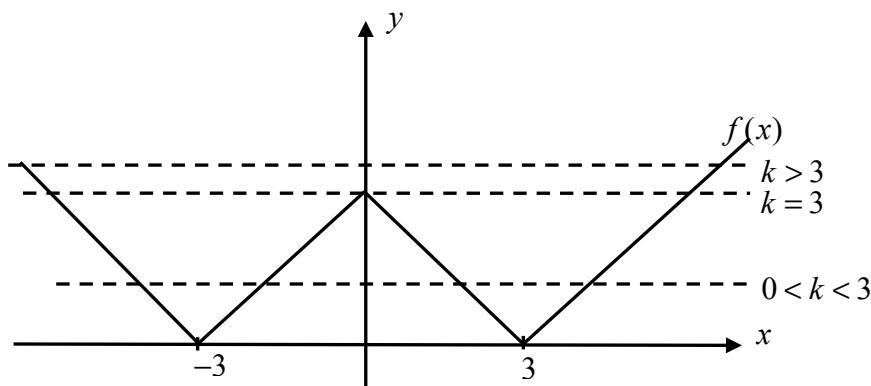
при $k < 0$ уравнението няма решение (графиките на $y = f(x)$ и $y = k$ не се пресичат);

при $k = 0$ уравнението има 2 решения;

при $0 < k < 3$ уравнението има 4 решения;

при $k = 3$ уравнението има 3 решения;

при $k > 3$ уравнението има 2 решения.



Черт. 1

Задачата може да се реши и аналитично чрез разкриване на модулите:

при $k > 0$ имаме

$$||x|-3| = k \Leftrightarrow |x|-3 = k \cup |x|-3 = -k \Leftrightarrow |x| = k+3 \cup |x| = -k+3;$$

първото уравнение има две решения при $k+3 > 0$, т.е. при $k > -3$ ($k > 0$) и решенията са $x_1 = -k-3$ и $x_2 = k+3$; аналогично второто уравнение има две решения при $-k+3 > 0$, т.е. при $k < 3$ ($k > 0$) и решенията са $x_1 = -k+3$ и $x_2 = k-3$; при $k = 3$ решението е единствено $x = 0$;

при $k = 0$ имаме $\|x\| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x_1 = -3$ и $x_2 = 3$;

при $k < 0$ уравнението няма решения.

Сега трябва да се обобщи информацията за броя на решенията в зависимост от стойностите на параметъра k :

при $k < 0$ уравнението няма решение;

при $k = 0$ уравнението има 2 решения $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$;

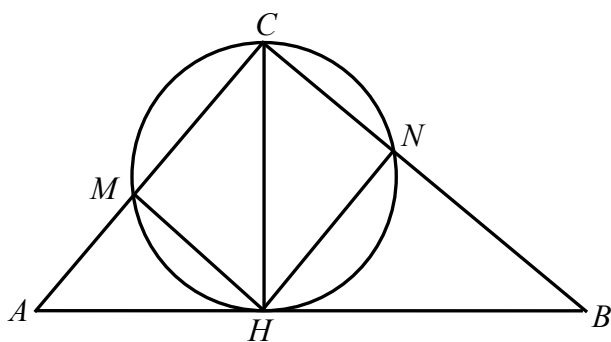
при $0 < k < 3$ уравнението има 4 решения $x_1 = -k - 3$, $x_2 = k - 3$, $x_3 = -k + 3$ и $x_4 = k + 3$;

при $k = 3$ уравнението има 3 решения $x_1 = -6$, $x_2 = 6$ и $x_3 = 0$;

при $k > 3$ уравнението има 2 решения $x_1 = -k - 3$ и $x_2 = k + 3$.

Забележка. При аналитичното решение много често се пропускат някои от изследваните подслучаи, например $k > -3$ и $k < 3$ (50% от решавалите задачата по този начин).

Задача 2. Окръжност с диаметър височината CH на правоъгълния $\triangle ABC$ пресича катетите AC и BC съответно в точки M и N . Ако $AB = 10$ см и $CH = 4,8$ см, намерете лицето на четириъгълника $MHNC$.



Черт. 2

Решение: Тъй като CH е диаметър, то $\angle CMH = \angle CNH = 90^\circ$. Като вземем предвид, че и $\angle ACB = 90^\circ$, заключаваме, че четириъгълникът $MHNC$ е правоъгълник. От правоъгълния $\triangle ABC$ имаме $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $4,8^2 = AH(10 - AH)$ и оттук $AH = 3,6$ см или $AH = 6,4$ см. При $AH = 3,6$ см намираме $BH = 6,4$ см. (В другия случай AH и BH разменят местата си.) Сега от $AC^2 = AB \cdot AH$ получаваме $AC = 6$ см, а от $BC^2 = AB \cdot BH$ – съответно $BC = 8$ см. (Катетите могат да се определят и с различни системи чрез Питагоровата теорема и метричните зависимости в правоъгълен триъгълник.) По-нататък ще намерим HM и HN , като използваме, че те са височини съответно в правоъгълните триъгълници ACH и BCH . От

$AC.HM = AH.HC$ имаме $HM = 2,88$ см, а от $BC.HN = BH.HC$ – съответно $HN = 3,84$ см. Тогава

$$S_{MHNC} = HM.HN = 2,88.3,84 = 11,0592 \text{ кв. см.}$$

(HM и HN могат да се определят и от подобните триъгълници ABC , AHM и BHN).

Забележка. Задачата се решава със средствата на 9 клас задължителна подготовка. За съжаление само 20% от явилите се учители успяха да я решат.

Ето и още някои подробности за организацията на изпита:

Учителите, преподаващи в среден и горен курс, се явяват на изпита върху една и съща тема. Задачите се подбират или съставят, като се използват учебниците по математика и съответните учебни помагала. Целта е да се провери елементарната математическа култура и едната задача винаги е върху учебен материал от 8–9 клас.

Изпитът е анонимен с продължителност 5 часа. Анонимността се разкрива след като приключи проверката и се оформи оценката.

Писмената работа се проверява от всички членове на комисията и се оценява с консенсус. Оценките се оформят с точност до 0,50. Тежестта на въпроса е 0,6, а на задачата е 0,4. Комисията изготвя рецензия, която отразява общото мнение на членовете и обосновава оценката.

Оценката на комисията е окончателна и не подлежи на преразглеждане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Додунеков, Ст. и др. (2010). *Математика за 9 клас (учебник 3П)*. София: Регалия.
2. Кожухарова Г., Лесов, Хр. (2011). *Параметрични уравнения*. Ст. Загора: Тракийски университет.

БЕЛЕЖКИ

1. Наредба № 5 за условията за повишаване квалификацията на педагогическите кадри в системата на народната просвета и реда за придобиване на професионално-квалификационни степени. Обнародвана ДВ, бр. 6 от 1997 г., попр., бр. 8 от 1997 г., доп., бр. 73 от 1997 г., изм. и доп., бр. 101 от 1999 г.

✉ Галя Кожухарова

доцент, доктор
ДИПКУ, Тракийски университет
Стара Загора
e-mail: galia_koj@yahoo.com

THE EXAM FOR THE FOURTH PROFESSIONAL QUALIFICATION DEGREE IN MATHEMATICS

Galia Kozhuhrova

Abstract. The paper contains information about the requirements, the regulations and the organization of the exam to acquire fourth professional qualification degree by Mathematics teachers. The last four years exam papers are given and an analysis with short solutions of the 2011 problems is proposed.

✉ **Galya Kozhuharova**
Associated Professor, PhD
IPKU, Trakia University
Stara Zagora
e-mail: galia_koj@yahoo.com