

ИНТЕРАКТИВНИ УЧЕБНИ РЕСУРСИ ЗА ПРЕПОДАВАНЕ НА МЕТОДА НА ИНВЕРСИЯТА ЗА ПОСТРОИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

Цветелина Йорданова

Частно основно училище „Питагор“ – София (България)

Резюме. В статията е представен набор от интерактивни учебни ресурси, създадени с динамичен геометричен софтуер, които демонстрират приложението на метода на инверсията при решаване на задачи за построение. Ресурсите могат да са в помощ на учители по математика в кръжочна форма на обучение.

Ключови думи: метод на инверсията; задачи за построение; интерактивни учебни ресурси; геометричен софтуер

1. Увод

Задачите за построение с линейка и пергел имат хилядолетна история. Утвърждаването им в обучението по математика започва още от Древна Гърция с трудове на Евклид, Питагор и Хипократ. През вековете те са били неизменна и дори основна част от обучението по геометрия. Поне в България това започва да се променя в началото на XX век и постепенно обучението с тях се занемарява. Причина за това най-вероятно е, че построителните задачи традиционно се смятат за трудни за учениците (Petrov & Ganchev 1966), а в същото време е била назряла обективна нужда от сериозни реформи в системата на училищното образование.

Оформият се около доц. Петко Иванов екип от методисти в Софийския университет, който през 1955 г. се обособява като самостоятелна катедра (Bankov et al. 2023), е бил двигател за започналите през 1961 г. реформи в обучението по математика, с които построителните задачи отново се завръщат трайно в българските гимназии. Свидетелство за това са сборници със задачи като например (Aleksandrov 1962), (Kostovski 1964) и (Petrov & Ganchev 1966). Третият от изброените е отличен с *първа награда от читателите в конкурса на Българското математическо дружество за най-полезни книги в работата на учителите по математика* (Petrov & Ninova 2023). Така построителните задачи се завръщат трайно в обучението по математика в България и това продължава няколко

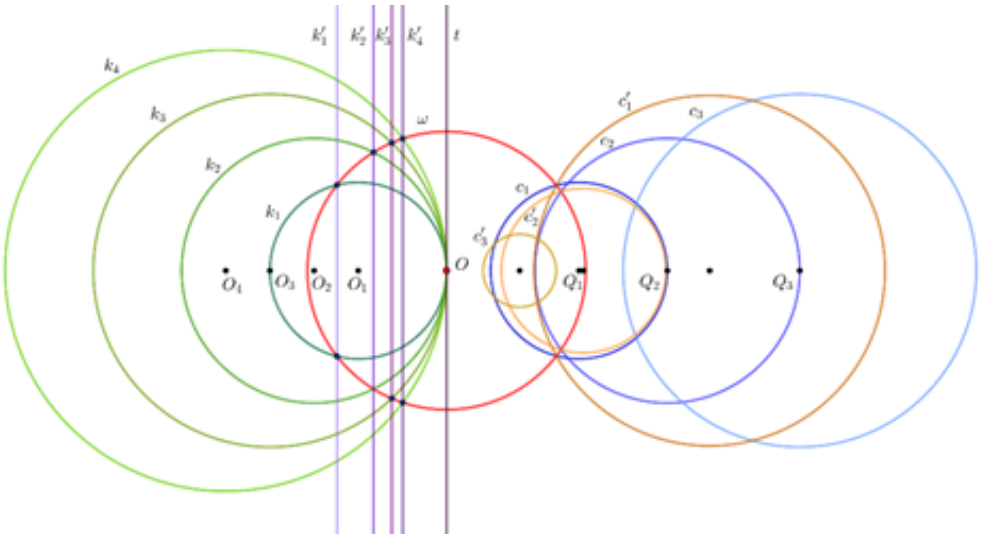
десетилетия. За резултатите може спокойно да се твърди, че са били строго положителни.

В днешни дни, изглежда, историята отново се повтаря. След няколко поредни реформи, част от които целяха „олекотяване на учебните програми“, защото се считаше, че на учениците математиката им е прекалено трудна, темите за построителни задачи почти напълно изчезнаха от учебниците. Такава промяна беше отпадането на темата за геометрично място на точки, което *осакатява раздела „Геометрични построения“* (Lazarov & Dimitrov 2019). Въпреки че въпросното „олекотяване“ не доведе до желанния резултат и резултатите на българските ученици в широкомащабни педагогически изследвания продължават да спадат, все още се смята, че това е правилната посока и за 2024 г. се готвят още подобни промени. Реформите са в разрез с наблюдението, че *„интересът към Евклидовата геометрия е във възход в целия свят“* (Grozdev & Nenkov 2023), което се случва най-вече покрай софтуерните продукти за динамична геометрия. Въпрос на време е да се направи простото логическо заключение, че ако математиката е трудна за учениците, трябва да се учи повече математика, а не по-малко. Затова най-вероятно колелото на историята ще се завърти отново и ще бъде преоткрито, че построителните задачи имат много съществена роля във формирането на геометричното мислене.

За щастие, научният интерес към построителните задачи в обучението по математика не е спаднал. Пример за това е монографията (Ninova 2007), публикациите (Vasileva & Pavlova 2014), (Gorcheva 2015), (Kuyumdjieva 2017), (Kunchev 2023) и др. Това беше и един от мотивите за написване на дипломната работа (Yordanova 2024). Настоящата статия представя кратко резюме на интерактивните учебни ресурси към тази дипломна работа. Те са създадени с динамичния геометричен софтуер *GeoGebra* и са предоставени в интернет за свободно ползване.

2. Метод на инверсията

По-подробно изложение на съдържанието на този раздел може да бъде намерено в (Yordanova 2024).



Фигура 1. Метод на инверсията

Нека $\omega(O; r)$ е окръжност с център точката O и радиус r .

Определение 2.1. Геометрично преобразуване, което при дадена т. O за всяка точка X от равнината, където $X \neq O$, съпоставя т. X' такава, че $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2$, се нарича *инверсия* относно окръжността $\omega(O, r)$.

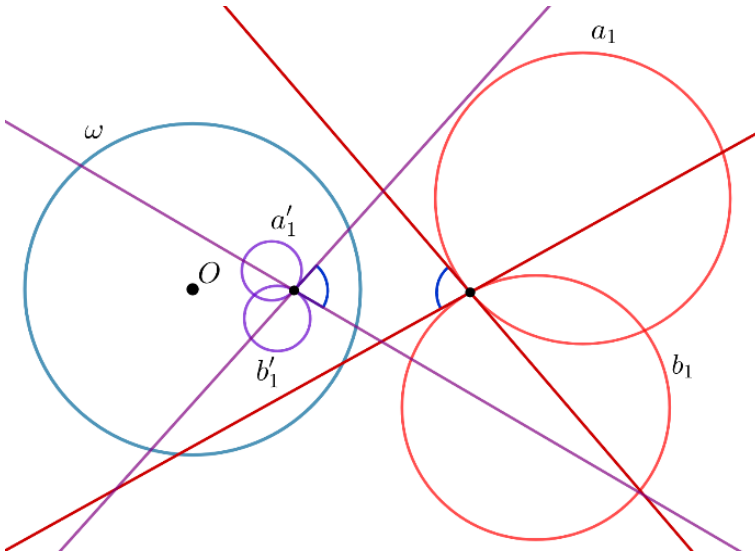
Точката O се нарича *център (полюс)* на инверсията. Окръжността ω се нарича *основна окръжност* на инверсията (или *инверсионна окръжност*). Числото r^2 се нарича *степен* на инверсията. Точките X и X' се наричат *взаимно инверсни*. Отбелязва се като φ_ω или φ_O (Bankov & Vitanov 2003).

Използването на инверсия при решаването на построителни задачи изисква познания за нейните основни свойства, както и познания относно намирането на образ на точка, права и окръжност в резултат на това геометрично преобразуване. На фиг. 1 са показани примерни инверсии.

Свойства на инверсията. Нека е дадена инверсия φ_ω инверсионна окръжност $\omega(O, r)$. Основните свойства на инверсията са:

- ако $\varphi_\omega(X) = X'$, то $X' \in OX^{\rightarrow}$, т.е. при инверсия точка, нейният образ и центърът на инверсията са колинеарни;

- ако $\varphi_\omega(X) = X' \Rightarrow \varphi_\omega(X') = X$, т.е. инверсията е *инволюция* ($\varphi_\omega = \varphi_\omega^{-1}$ или $\varphi_\omega^2 = id$);
- $\varphi(X) = X \Leftrightarrow X \in \omega$, т.е. една точка е двойна при инверсия тогава и само тогава, когато лежи върху инверсионната окръжност;
- ако $\varphi_\omega(X) = X'$ и $OX < r$, то $OX' > r$, т.е. ако точка е вътрешна за окръжността ω , то образът ѝ е външна точка;
- ако $\varphi_\omega(X) = X'$ и $OX > r$, то $OX' < r$, т.е. ако точка е външна за окръжността ω , то образът ѝ е вътрешна точка (Bankov & Vitanov 2003);
- ако a и b са прави или окръжности, то $\sphericalangle(a; b) = \sphericalangle(\varphi_\omega(a); \varphi_\omega(b))$ (фиг. 2).



Фигура 2. Запазване на ъглите при инверсия

Определение 2.2. Еднозначно обратимо изображение, което трансформира произволен ъгъл в равен на него ъгъл, се нарича *конформно изображение*.

Инверсията е конформно изображение, което не е подобност. Това свойство е доказано в (Martinov 1973, стр. 97) и (Petrov 1969, стр. 73).

Построяване на образ на точка при инверсия. Нека X е произволна точка от равнината, а $\varphi_{\omega}(X) = X'$ е нейният образ при инверсията φ_{ω} . В сила са следните свойства:

- ако дадена точка X съвпада с центъра на инверсия, не съществува точка, за която равенството $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = r^2$ да е изпълнено. Следователно центърът на инверсия *не* притежава образ (Petrov 1969);
- Ако точката X е от инверсионната окръжност, то $X \equiv X'$.

I. Построяване на образ на точка, външна за инверсионната окръжност (фиг. 3). Нека X е точка, външна за окръжността ω .

Построение:

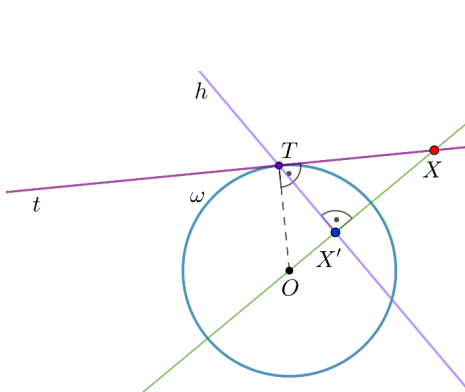
1. Построяване допирателна t през т. X към окръжността ω .
2. Нека $t \cap \omega = T$.
3. Построяваме $h, h \ni T, h \perp OX$.
4. $\varphi_{\omega}(X) = X' = h \cap OX$ е ортогоналната проекция на точката T върху правата OX .

Доказателство: Разглеждаме $\triangle OXT$ и $\triangle OTX'$:

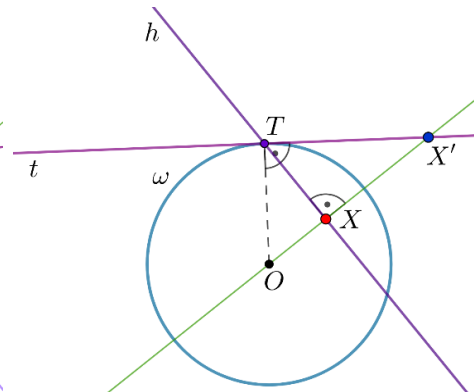
$$\angle OTX = \angle OX'T = 90^\circ \text{ и } \angle XOT = \angle X'OT \\ \Rightarrow \triangle OXT \sim \triangle OTX' \Rightarrow \frac{OX}{OT} = \frac{OT}{OX'} \Rightarrow OX \cdot OX' = OT^2 = r^2.$$

Освен това $X' \in OX \Rightarrow \varphi_{\omega}(X) = X'$.

Стъпките от конструкцията могат да бъдат използвани и за построяване на образ на вътрешна за окръжността ω точка, но в обратен ред.



Фигура 3. Построяване образ на външна за инверсионната окръжност точка



Фигура 4. Построяване образ на вътрешна за инверсионната окръжност точка

II. Построяване на образ на точка, вътрешна за инверсионната окръжност (фиг. 4).

Нека X е точка, вътрешна за окръжността ω .

Построение:

1. Издигаме перпендикуляр h от точката X към правата OX .

2. Нека $h \cap \omega = \{T, T_1\}$;

3. Построяваме допирателната t в точката T .

4. $\varphi_\omega(X) = X' = t \cap OX$.

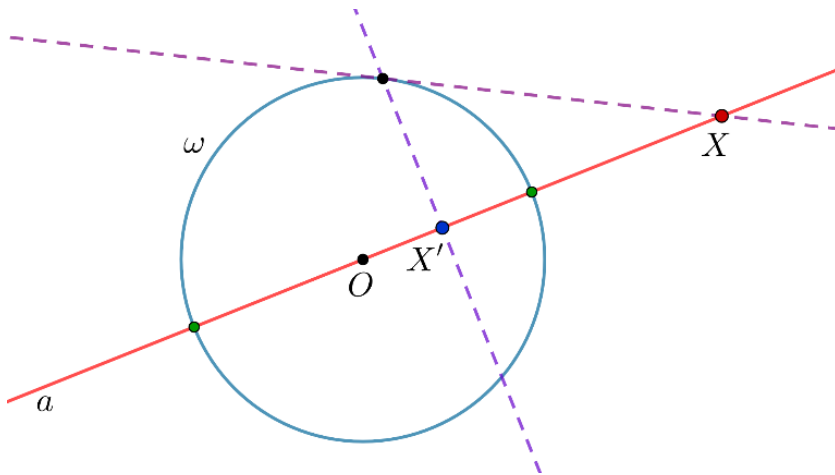
Доказателство: Доказателството може да бъде извършено по същия начин както в първия случай (Bankov & Vitanov 2003).

Приложение: Построяването на образ на точка служи за построяване на образите на права и окръжност при инверсия.

Твърдение 2.1. При дадени две различни точки, образът на по-близката до центъра на инверсия се трансформира в по-далечна.

Построяване на образ на права при инверсия. Нека е дадена правата a . Трябва да се построи $\varphi_\omega(a) = a'$.

I. Построяване на образ на права, минаваща през центъра на инверсията (фиг. 5)



Фигура 5. Построяване на образ на права, минаваща през центъра на инверсия

Теорема 2.1. Образът на права, минаваща през центъра на инверсия (без точката O), е същата права (без точката O).

Доказателство: От свойствата на инверсията знаем, че точка, нейният образ и центърът на инверсията са колинеарни, т.е. ако

$X \in a$, то $\varphi_\omega(X) = X' \in OX^\perp \Rightarrow X' \in a \Rightarrow a = XX' \Rightarrow$ правата a (без точката O) се изобразява в същата права (без точката O).

II. Построяване на образ на права, неминаваща през центъра на инверсията (фиг. 6).

Теорема 2.2. Образът на права, която не минава през центъра на инверсия, е окръжност, минаваща през центъра на инверсия, като правата е успоредна на допирателната към окръжността в центъра на инверсията.

Построение:

1. Построяваме точка P – ортогоналната проекция на т. O върху a .

2. Нека $\varphi_\omega(P) = P'$.

3. $\varphi(a) = a' \left(O, \frac{OP'}{2} \right)$.

Доказателство: Нека M е произволна точка от правата a и $\varphi_\omega(M) = M'$. Тогава $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$

$\Rightarrow \angle POM = \angle M'OP'$ (като съвпадащи или противоположни) и

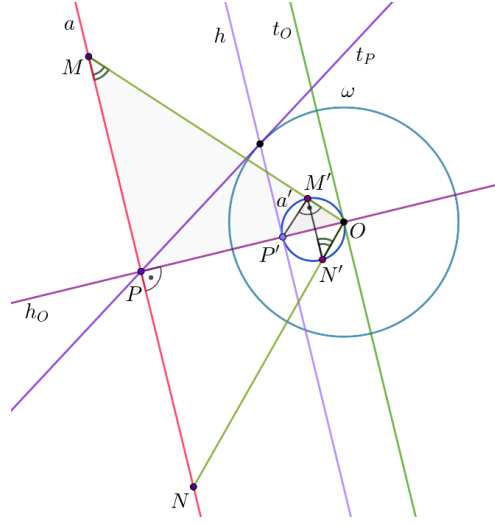
$$\frac{OM}{OP'} = \frac{OP}{OM'} \Rightarrow \triangle OPM \sim \triangle OMP' \Rightarrow \angle OPM = \angle OM'P' = 90^\circ$$

Следователно, от образа M' на произволна т. $M \in a$ отсечката OP' се вижда под прав ъгъл $\Rightarrow M' \in \varphi_\omega(a) = a'$, където a' е окръжността с диаметър OP' .

Обратно, нека $N' \neq O$ е произволна точка от окръжността a' . Означаваме $N = ON' \cap a$. Тогава

$$\triangle OM'N' \sim \triangle OMN \Rightarrow \frac{ON'}{OM} = \frac{OM'}{ON} \Rightarrow ON \cdot ON' = OM \cdot OM'.$$

Но $OM \cdot OM' = r^2 \Rightarrow ON \cdot ON' = r^2 \Rightarrow \varphi_\omega(N') = N$. Тъй като точка N' е произволна, то $\varphi_\omega(a') = a$.

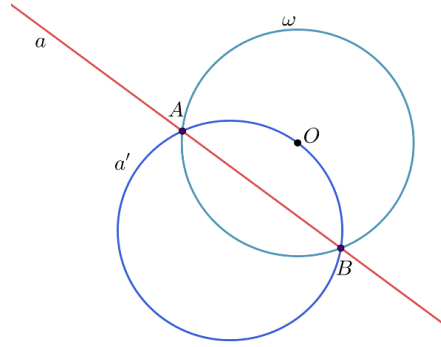


Фигура 6. Построяване образ на права, неминаваща през центъра на инверсия

Отсечката OP' е диаметър и $OP' \perp a$. Следователно допирателната в т. O е успоредна на a (Martinov 1973; Petrov 1969).

Твърдение 2.2. Когато правата a пресича инверсионната окръжност, нейният образ е окръжността, минаваща през трите неколинеарни точки O , A и B , където $a \cap \omega = \{A, B\}$. Това е така, понеже точките A и B са двойни при инверсията (фиг. 7).

Твърдение 2.3. Когато правата a се допира до окръжността ω в точката T , нейният образ е окръжността с диаметър OT . Това е така, понеже $T \equiv T' = \varphi_\omega(T)$ (фиг. 8).

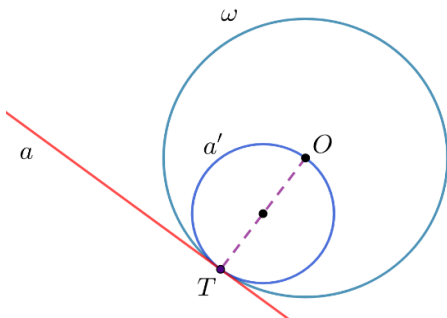


Фигура 7. Образ на права, пресичаща инверсионната окръжност

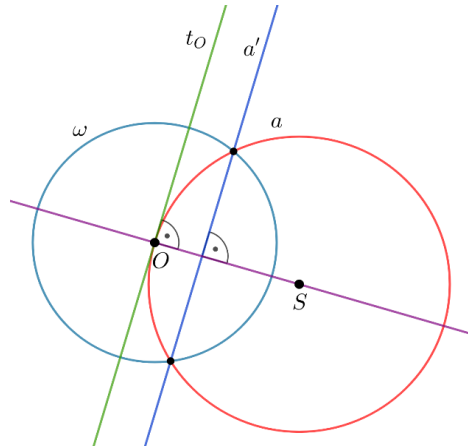
Построяване образ на окръжност при инверсия

I. Построяване образ на окръжност, минаваща през центъра на инверсията (фиг. 9)

Теорема 2.3. Образът на окръжност, която минава през центъра на инверсия, е права, неминаваща през центъра на инверсия, успоредна на допирателната към окръжността в центъра.

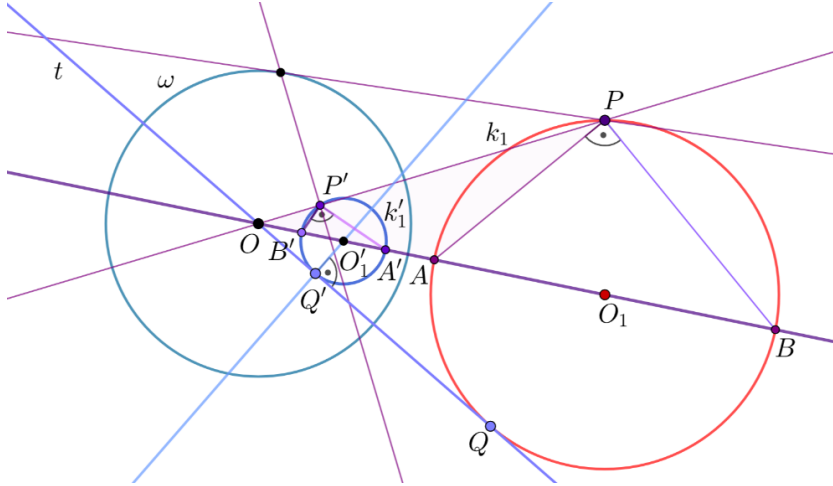


Фигура 8. Построяване образ на права, допираща се до инверсионната окръжност



Фигура 9. Построяване образ на окръжност, минаваща през центъра на инверсия

II. Построяване на образ на окръжност, неминаваща през центъра на инверсията (фиг. 10).



Фигура 10. Построяване на образ на окръжност, неминаваща през център на инверсията

Теорема 2.4. Образът на окръжност, която не минава през центъра на инверсия, е окръжност, неминаваща през центъра на инверсия, като двете окръжности са хомотетични, а центърът на хомотетията, която изобразява едната в другата окръжност, съвпада с центъра на инверсионната окръжност.

Нека k_1 е окръжност с център O_1 и $O \notin k_1$. Трябва да се построи $\varphi_\omega(k_1) = k'_1$.

Построение: 1. $OO_1 \cap k_1 = \{A, B\}$; 2. $\varphi_\omega(A) = A'$; 3. $\varphi_\omega(B) = B'$; 4. $\varphi_\omega(k_1) = k'_1$, където k'_1 е окръжността с диаметър $A'B'$.

Доказателство: Нека t е произволна точка от окръжността k_1 и $\varphi_\omega(t) = P'$. Тогава $OA \cdot OA' = OP \cdot OP' (= r^2) \Rightarrow \frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'} \Rightarrow \triangle OPA \sim \triangle OA'P' \Rightarrow \angle OAP = \angle OP'A'$.

По аналогичен начин от подобие на триъгълниците OPB и $OB'P'$ се получава, че $\angle OPB = \angle OB'P'$.

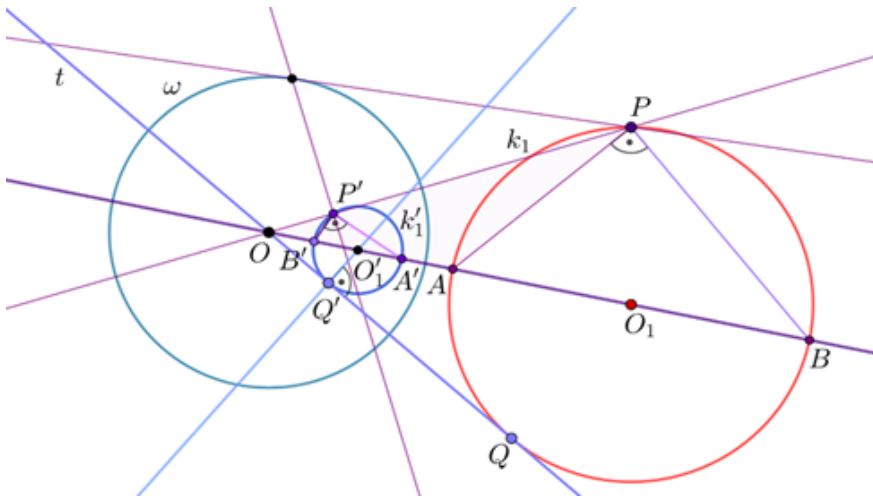
Следователно $\angle OPB - \angle OPA = \angle OB'P' - \angle OA'P'$.

За $\triangle ABP$: $\angle APB = \angle OPB - \angle OPA = 90^\circ$.

За $\triangle A'B'P'$: $\angle A'P'B' = \angle OB'P' - \angle OA'P' (\angle OB'P' \text{ е външен}).$

От тук следва, че $\angle APB = \angle A'P'B' = 90^\circ$. Когато точката P се движи по дадената окръжност, нейният образ P' при инверсията φ_ω ще описва окръжност, на която отсечката $A'B'$ е диаметър.

Обратно, нека QQ' е обща външна допирателна на k_1 и k'_1 ($Q \in k_1, Q' \in k'_1$). Тогава точките Q и Q' ще бъдат взаимно инверсни. Перпендикулярът, издигнат от точката Q' към правата OO_1 , ще я пресече в точката O'_1 , която е център на окръжността, инверсна на окръжността k_1 (Kostovski 1964). Чертежът е показан на фиг. 11.



Фигура 11. Построяване на образа на окръжност, неминаваща през центъра на инверсия – доказателство

Ако допуснем, че k'_1 минава през точка O , тогава O също ще бъде обща пресечна точка на k'_1 и правата OO_1 . Получава се, че окръжността и правата имат три общи точки, което е невъзможно (Petrov 1969).

III. Образ на окръжност, ортогонална на инверсионната окръжност

Теорема 2.5. Окръжност, която е различна от инверсионната, е двойна (инварианта) при инверсия тогава и само тогава, когато е ортогонална на инверсионната окръжност.

Инверсията относно окръжност и симетрията относно права. Инверсията относно окръжност и симетрията относно права имат много общи свойства. С помощта на табл. 1 някои от тях са показани синтезирано.

Таблица 1. Сравнение: инверсия относно окръжност и симетрия относно права

<i>инволютивно изображение</i>	<i>инверсия ✓</i>	<i>осева симетрия ✓</i>
<i>Ако φ е инверсия относно окръжност (симетрия относно права), а F е произволна фигура, от $\varphi(F) = F'$ следва $\varphi(F') = F$. Или още: ако φ е инверсия относно окръжност (симетрия относно права), то $\varphi^2 = id$.</i>		
<i>неподвижни точки</i>	<i>точките от инверсионната окръжност</i>	<i>точките от оста на симетрия</i>
<i>Точките от инверсионната окръжност (оста на симетрия) са неподвижни при инверсията (симетрията относно права).</i>		
<i>образ на точка</i>	<i>вътрешността на инверсионната окръжност се изобразява във външността и обратно</i>	<i>местата на двете полуравнини, определени от оста, се сменят</i>
<i>Окръжността на инверсия (оста на симетрия) разделя равнината на две области и всяка от тях при инверсията (симетрията относно права) се трансформира в другата.</i>		
<i>двойни прави</i>	<i>правите, минаващи през центъра на инверсия (правите, ортогонални на инверсионната окръжност)</i>	<i>правите, ортогонални на оста на симетрия</i>
<i>двойни окръжности</i>	<i>окръжностите, ортогонални на инверсионната окръжност, и инверсионната окръжност</i>	<i>окръжностите, чиито центрове лежат на оста на симетрия (окръжностите, ортогонални на оста на симетрия) и оста на симетрия</i>
<i>Ако една права или окръжност е ортогонална на инверсионната окръжност (оста на симетрия), тя е двойна при инверсията (симетрията). Освен това е двойна и инверсионната окръжност (оста на симетрия).</i>		

3. Моделиране на построителни задачи с метод на инверсията с GeoGebra

Софтуерът за динамични геометрични чертежи *GeoGebra* е изключително популярен в последните години. С него много лесно се прилага методът *учене чрез експериментиране*, който при използване на информационни технологии у нас често е наричан *изследователски подход в обучението* (Grozdev & Dekov 2014). Например в България е създаден амбициозният проект *Виртуален училищен кабинет по математика* от секция „Образование по математика и информатика“ към Българската академия на науките, който включва много голямо количество интерактивни задачи. Издадени са няколко помагала за учители (Chehlarova 2015; Chehlarova 2016) и университетски преподаватели (Kenderov et al. 2015). Проектът се развива успешно и периодично се допълва със споделен опит от много изследователи.

От методическа точка е важно да се отбележи, че *GeoGebra* следва да се разглежда като помощен инструмент за обучението по математика, а не като заместител на основни знания. В частност, при построителните задачи е много лесно да се работи с готови инструменти, с които се получава мигновено среда на отсечка, издига се перпендикуляр, построява се ъглополовяща и др. – те могат и е желателно да се използват за улеснение по време на решаване на задачи за упражнение, но това трябва да се случва едва след като учениците са ги усвоили в достатъчна степен само с линейка и пергел, т.е. след като тези задачи с основни построения са станали прекалено тривиални за тях. В противен случай просто се добавят нови инструменти в допълнение към линейката и пергела, с което се опорочава началната идея на построителните задачи.

Друга методическа бележка е свързана с мястото за прилагане на интерактивния ресурс. Той не трябва да е заместител на умственото усилие на ученика да реши сам задачата. Създадените ресурси показват постъпковото решение на построителните задачи, а елементите за експериментиране са добавка за допълнително изследване. Поради тази причина е важно учителите, които ги използват, да стимулират учениците първо да изследват и да се опитат да решат задачите самостоятелно, а въпросните контроли, които показват решението, да бъдат ползвани впоследствие, т.е. чак когато се изпита затруднение, за проверка на получено решение или за експериментиране с търсене на частни случаи.

Философията зад разработените интерактивни ресурси е, че работата с тях трябва да е интуитивна и да не изисква никакво специално обучение. Технологичното средство трябва да е в помощ за

ускоряване на обучението и задълбочаване на знанията, а не само по себе си да бъде обект на изучаване. Някои автори, които са използвали *GeoGebra* в експерименти с преподаване на построителни задачи, акцентират специално върху лимитирането на ненужните инструменти (Stojanovski & Bitola 2010). Други дори са правили опити за създаване на софтуерни продукти, които са специализирани за построителни задачи (Jayamaha 2017).

В създадените за настоящата статия заготовки с учебни ресурси се използва *GeoGebra*, като често във вид на помощни средства се използват елементите *плъзгач* и *поле за отметка*. Чрез плъзгачите се показва поетапна поява на отделните стъпки от задачите за построение, променят се позицията и/или дължината на обекти при някои построения. Чрез отметките се визуализират отделни етапи от построението или отделни частни случаи. Основно затруднение при разработването на задачи с метода на инверсията е, че крайните чертежи са изключително сложни и претрупани с много детайли от междинните построения, понеже стъпките от решенията на задачите са много. Това натоварва средата с множество контролни елементи и би объркало начинаещ потребител. Затова е важно тези ресурси да се ползват само след като учениците са ползвали *GeoGebra* и преди – най-добре при решаването на предишни раздели с по-прости построителни задачи.

Друга дидактическа стратегия са целенасочено заложените математически софизми при някои от ресурсите. Софизмите са *подходящо средство, подпомагащо учениците да се научат да дават разумни аргументи и да са сигурни, че те са правилни – математически строги, основани на солидна теория и достатъчно силни да издържат на критиките* (Koleva 2019). Например при промяна на положението на някои обекти се създава визуална представа, че задачата няма решение, т.е. не е изпълнима. В същото време, учителят може лесно да даде логически доводи защо това не е вярно, т.е. решение има. Тези задачи се дават както за демонстрация на технологичните ограничения на софтуерните продукти, така и за да се засили вниманието на учениците, че не трябва да се предовеверяват на компютрите и винаги трябва да доказват с математически средства. От тази гледна точка задачите със софизми са много полезни в обучението. Следва да се отбележи, че с тях също е редно да се внимава и да не се прекалява, *защото има риск от объркване на учениците, ако знанията, върху които се стъпва, не са достатъчно добре усвоени* (Zhecheva & Petrov 2018).

За информация на разработчиците на подобни продукти в бъдеще е добре да се спомене, че съществуват известни технологични

ограничения при използването на *GeoGebra* за моделиране на построителни задачи с метода на инверсията. Проблемът е, че стъпките при построяването на образа на дадена точка се определят от това дали точката е външна, или вътрешна за инверсионната окръжност. Проверката дали дадена точка е вътрешна за инверсионната окръжност, лежи на нея или е външна, може да бъде извършена чрез сравнение на дължините на две отсечки, едната от които свързва центъра на инверсионната окръжност с дадената точка, а другата е нейн радиус. След това при построяване на образа на друг обект следва да се въвежда условие за проверка. Това изключително много затруднява разработката на чертежа. Проблемът се усложнява още повече, когато дадените обекти и инверсионната окръжност не са фиксирани – поражда се нужда от въвеждане на прекалено голям брой условия за извършване на всяко отделно построение. Поради тази причина при част от реализираните в проекта динамични чертежи обектите и инверсионната окръжност са фиксирани. За съжаление, това води и до липса на възможност за извършване на последващ експеримент.

4. Примерни ресурси

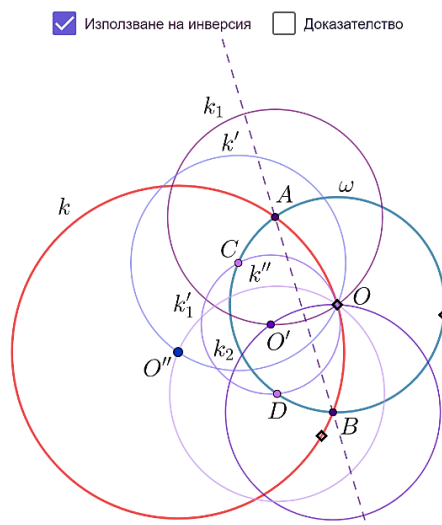
Пълният текст на дипломната работа (Yordanova 2024) и съпътстващите я учебни ресурси (интерактивни видеа с поетапна конструкция и интерактивни чертежи) са достъпни на следния адрес:

https://omi.fmi.uni-sofia.bg/inversion_method/.

Интерактивните чертежи могат да бъдат зареждани и директно в уеб браузър от следния адрес:

<https://www.geogebra.org/m/eet4nfdd>. Тук ще бъдат показани само няколко екранни снимки от примерни задачи.

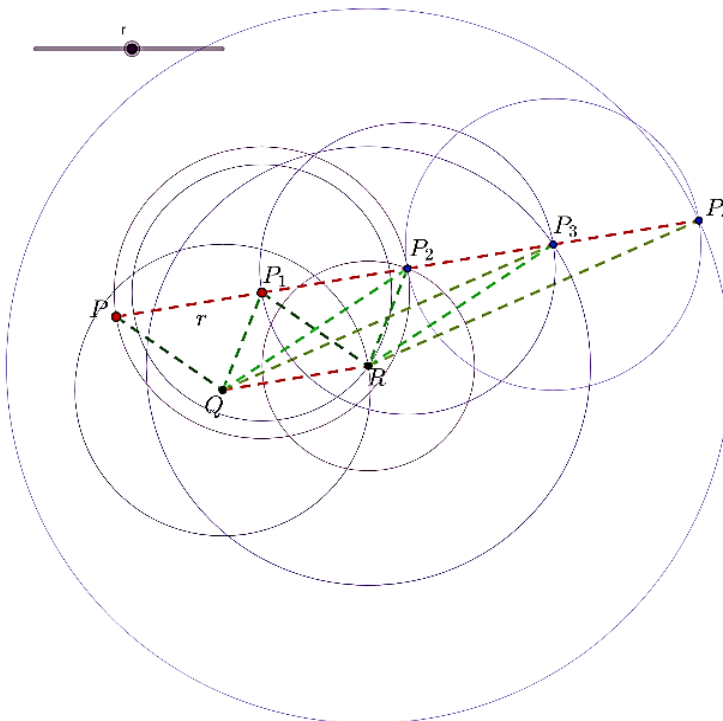
Техническото изпълнение към задачата „*Да се намери центърът на дадена (в сми-*



Фигура 12. Пример за интерактивен чертеж към раздел „Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела“

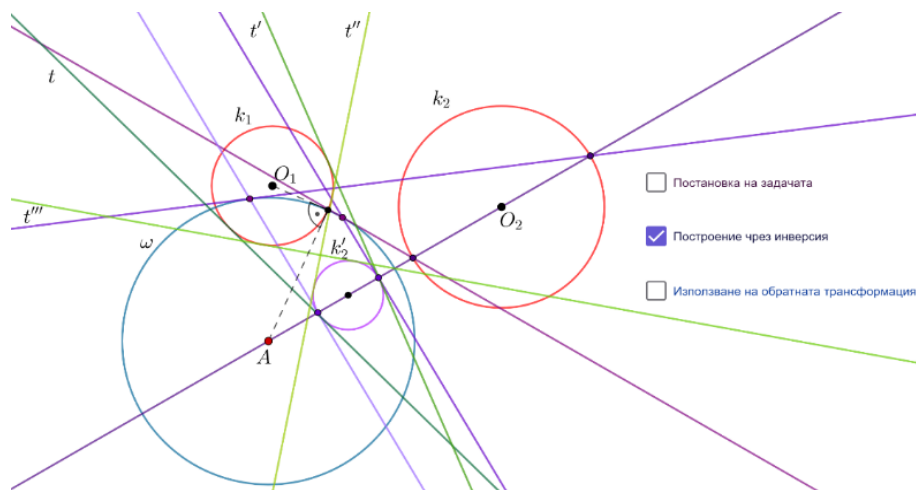
съл начертана) окръжност k “ е показано на фиг. 12 (Kostovski 1964). Задачата е от раздел „Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела“. Интерактивният чертеж съдържа построение чрез инверсия и доказателство, т.е. върху чертожната повърхност се визуализират различни обекти при отделните етапи. Това, както вече споменато, улеснява потребителя при използването на ресурса.

На фиг. 13 е илюстриран интерактивният чертеж към задача за построение с условие „Да се построи отсечка n пъти по-голяма от дадена отсечка $PP_1 = r$, където $n \in \mathbb{N}$ “. Тя е основна задача за построение и се използва при решаването на задача от раздел „Приложение на метода на инверсията в геометрията на пергела“. С помощта на геометричния софтуер потребителят има възможността да експериментира, променяйки дължината на дадената отсечка.



Фигура 13. Пример за интерактивен чертеж към „Основна задача за построение“

На фиг. 14 е представено изображение на графичното изпълнение на част от решението на една от Аполониевите задачи. Във Факултета по математика и информатика на Софийския университет е натрупан богат дългогодишен опит в обучението на студенти с помощта на динамичен геометричен софтуер в курса „Компютърна евристика“. От (Топов & Топова 2008) се вижда, че експериментите са започнали още 2008 г. с Geonext. Чертежът от фиг. 14 е към решението чрез метода на инверсията. Условието на задачата е: „*Да се построи окръжност, която да минава през дадена точка и да се допира до две дадени окръжности*“. От трите полета за отметка в чертожната повърхност се избира една от функциите Постановка на задачата, Построение чрез инверсия или Използване на обратната трансформация.



Фигура 14. Пример за интерактивен чертеж към решението на Аполониева задача

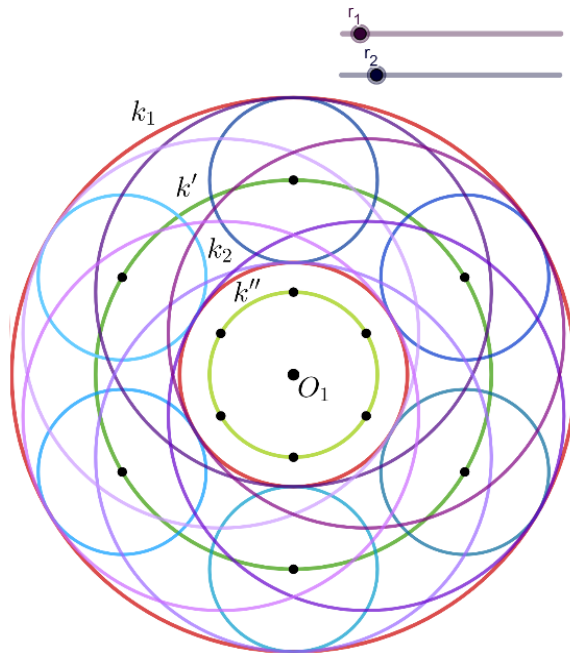
Интерактивният чертеж съдържа построение чрез инверсия и доказателство, т.е. върху чертожната повърхност се визуализират различни обекти при отделните етапи. Това, както вече бе споменато, улеснява потребителя при използването на ресурса.

Чрез полетата за отметка е постигната поетапна визуализация на цялостното решение. Тези обекти присъстват и в интерактивните чертежи към някои други от Аполониевите задачи.

Фиг. 15 е пример за интерактивен чертеж към построението на геометричното място на точки, съдържащо множеството от центровете на окръжностите, които се допират до две дадени концентрични окръжности. Това геометрично място на точки се използва за

решението на следната Аполониева задача: *Да се построи окръжност, която да се допира до дадена права и до две дадени окръжности.*

Решението на задачата, в което се използва това геометрично място от точки, не включва използването на метода на инверсията, т.е. чрез този пример се демонстрира и това, че в дипломната работа е изложен повече от един начин за решаване на Аполониевите задачи.

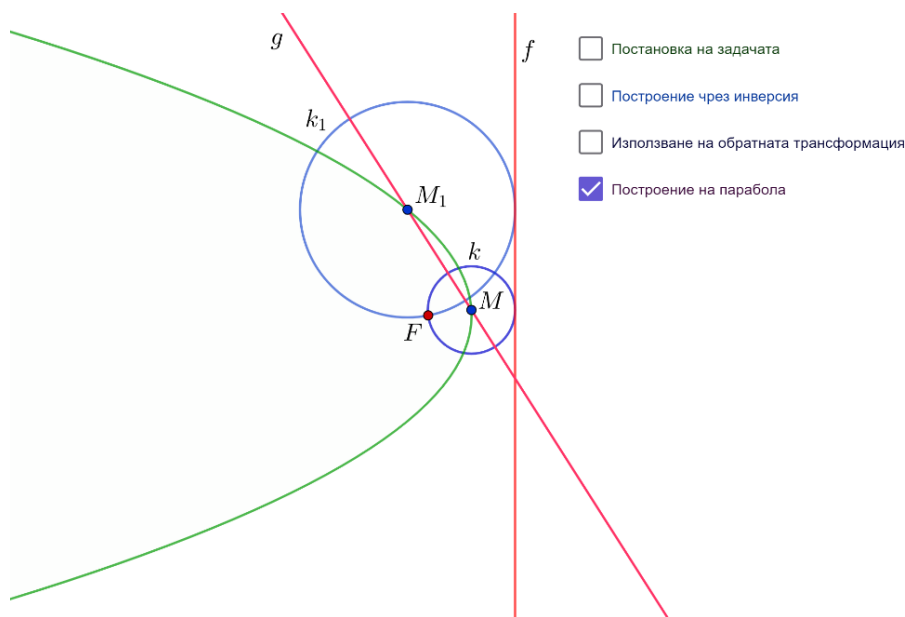


Фигура 15. Интерактивен чертеж за построяване на геометрично място на точки

С помощта на метода на инверсията решенията на Аполониевите задачи стават по-леки, което означава, че той създава единен подход за решаването им. При алтернативните решения липсва такъв единен подход, но се появява ползата от прилагане на различни методи. Затова е препоръчително при обучение на ученици да бъдат разгледани всички възможни методи.

Фиг. 16 съдържа чертежа към задача, в която се изисква да бъдат намерени пресечните точки на параболола и окръжност. Тази задача е включена в глава „Задачи, решаването на които може да се сведе до

решаването на Аполониеви задачи“. За конструкцията към чертежа отново са използвани отметки, насочени към визуализирането на отделните етапи от решението на задачата. Чертежът от фиг. 16 показва построяването на парабола, което може да се осъществи с помощта на геометричния софтуер, след като задачата бъде решена.



Фигура 16. Интерактивен чертеж да извършване на допълнително построение

5. Заключение

Авторът се надява, че създадените ресурси ще породят интерес в учителската гилдия, защото темата за построителните задачи е крайно належащо да бъде върната отново на дневен ред.

Благодарности

Работата по статията е подкрепена от проект № 80-10-40/9.4.2024 (Трансформиращо образование чрез класически и иновативни стратегии и форми на учене (по математика, информатика и ИТ) към Фонд „Научни изследвания“ на Софийския университет „Св. Климент Охридски“, за 2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

- АЛЕКСАНДРОВ, И., 1962. *Сборник от геометрични задачи за построение*. Превод от Боян Петканчин, Народна просвета, София.
- БАНКОВ, К., ВИТАНОВ, Т., 2003. *Геометрия*. Анубис, София. ISBN 9544266178.
- БАНКОВ, К., ВИТАНОВ, Т., ГАНЧЕВ, И., НИНОВА, Ю., ТОНОВ, И., ПЕТРОВ, Ф., РАКОВСКА, Д., 2023. *История на катедра Обучение по математика и информатика*. Математическото образование – 75-годишна мисия и история. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София. ISBN 978-954-07-5742-1.
- ВАСИЛЕВА, Н., ПАВЛОВА, Н., 2014. *Архив на учителя по математика, информатика и информационни технологии*. МАТ-ТЕХ, Т. 1, стр. 250 – 255, Шумен.
- ГОРЧЕВА, И., 2015. Класическите задачи на античността с динамичен софтуер. *Сборник доклади на Младежки форуми „Наука, технологии, иновации, бизнес – 2015“*, стр. 54 – 60, Пловдив. ISSN 2367-8569.
- ГРОЗДЕВ, С., ДЕКОВ, Д., 2014. Учене чрез открития – нов ефективен подход в ученето чрез експериментирание. *Математика и информатика*, Т. 57, № 6, стр. 568 – 585, София.
- ГРОЗДЕВ, С., НЕНКОВ, В., 2023. Алгоритмичен подход към построятелната задача на Малфати. *Математика плюс*, № 1, стр. 66 – 73, София.
- ЖЕЧЕВА, А., ПЕТРОВ, Ф., 2018. Онлайн сборник със задачи със софизми по математика, информатика и информационни технологии. *Математика, компютърни науки и образование*, Т. 1, № 1, стр. 7 – 11, Велико Търново.
- ЙОРДАНОВА, Ц., 2024. *Метод на инверсията при решаването на задачите за построение и технологии за изследването им*. Дипломна работа към специалност „Иновации и мултидисциплинарност в задължителната подготовка по математика, информатика и информационни технологии“, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, София.
- КЕНДЕРОВ, П., ЧЕХЛАРОВА, Т., ГАЧЕВ, Г., 2015. *Изследователски подход в математическото образование (помагало за обучение на обучители)*. Макрос, София. ISBN 978-954-561-367-8.
- КОЛЕВА, К., 2019. Математическите софизми и използването им в училищния курс по алгебра. *Математика и информатика*,

- Т. 62, № 3, стр. 263 – 283.
- КОСТОВСКИ, А., 1964. *Геометричните построения само с пергел*. Държавно издателство „Техника“, София.
- КУНЧЕВ, М., 2023. Построяване на оста на кръстосани прави. *Математика и информатика*, Т. 66, № 2, стр. 115 – 123. ISSN: 1314–8532.
- КУЮМДЖИЕВА, В., 2017. Не само с линейка и пергел. *Професионално образование*, Т. 19, № 2, стр. 214 – 218. ISSN: 1314–555X
- ЛАЗАРОВ, Б., ДИМИТРОВ, Д., 2019. Преразглеждане представянето на коничните сечения на основата на компютърни технологии. *Дидактическо моделиране*, Т. 7, стр. 30 – 36. ISSN 1314-1651.
- МАРТИНОВ, Н., 1974. *Геометрични преобразувания и някои техни приложения*. Народна просвета, София.
- НИНОВА, Ю., 2007. *Основните задачи за построение*. Макрос, София. ISBN 978-954-561-201-5.
- ПЕТРОВ, К., 1969. *Аполониеви задачи*. Наука и изкуство, София.
- ПЕТРОВ, К., ГАНЧЕВ, И., 1966. *Сборник от задачи за построение по геометрия*. Народна просвета, София.
- ПЕТРОВ, Ф., НИНОВА, Ю., 2023. В памет на проф. д.п.н. Иван Ганчев Донев. *Математика и математическо образование*. http://www.math.bas.bg/smb/2023_PK/tom_2023/pdf/101-133.pdf.
- ЧЕХЛАРОВА, Т. 2015. *Изследователският подход в обучението по математика с използване на динамични образователни среди (помагало за учители)*. Макрос, София. ISBN 978-954-561-373-9.
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2016. *Изучаване на математика с динамични конструкции в началното училище (помагало за учители)*. Макрос, София. ISBN 978-954-561-404-0.

REFERENCES

- ALEXANDROV, I., 1962. *A Collection of Geometric Construction Problems*. Translation by Boyan Petkanchin, Narodna Prosveta, Sofia. (in Bulgarian)
- BANKOV, K., VITANOV, T., 2003. *Geometry*. Anubis, Sofia. ISBN: 9544266178. (in Bulgarian)
- BANKOV, K., VITANOV, T., GANCHEV, I., NINOVA, Y., TONOV, I., PETROV, F., RAKOVSKA, D., 2023. *The History of the Mathematics and Informatics Department*. Mathematics ed-

- ucation – 75 years of mission and history. University Press "St. Kliment Ohridski", Sofia. ISBN 978-954-07-5742-1. (in Bulgarian)
- CHEHLAROVA, T. 2015. *Inquiry-based Approach in Teaching Mathematics Using Dynamic Educational Software (Teacher's Handbook)*. Makros, Sofia. ISBN 978-954-561-373-9. (in Bulgarian)
- CHEHLAROVA, T., 2016. *Learning Mathematics with Dynamic Constructions in Primary School (Teacher's Handbook)*. Makros, Sofia. ISBN 978-954-561-404-0. (in Bulgarian)
- GORCHEVA, I., 2015. The Classical Problems of Antiquity with Dynamic Geometry Software. *Proceedings of Youth Forums "Science, Technologies, Innovations, Business – 2015"*, pp. 54 – 60, Plovdiv. ISSN 2367-8569. (in Bulgarian)
- GROZDEV, S., DEKOV, D., 2014. Learning Through Discoveries – A New Effective Approach Within Learning Through Experimentation. *Mathematics and Informatics*, vol. 57, no. 6, pp. 568 – 585, Sofia. (in Bulgarian)
- GROZDEV, S., NENKOV, V., 2023. An Algorithmic Approach to Malfatti Construction Problem. *Mathematics plus*, no. 1, pp. 66 – 73, Sofia. (in Bulgarian)
- JAYAMAHA, A., 2017. Web-Based Mathematical Toolbox for Geometrical Constructions. *Proceedings of 10th annual International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI2017)*, pp. 8025 – 8029, Seville, Spain.
- KENDEROV, P., CHEHLAROVA, T., GACHEV., G., 2015. *Inquiry-based Approach in Mathematics Education (Teacher's Handbook)*. Makros, Sofia. ISBN 978-954-561-367-8. (in Bulgarian)
- KOLEVA, K., 2019. Mathematical Fallacies and Their Use in the Algebraic Curriculum in Schools. *Mathematics and Informatics*, vol. 62, no. 3, pp. 263 – 283. (in Bulgarian)
- KOSTOVSKI, A., 1964. *Geometrical Constructions with Just a Compass*. Technika State Publishing House, Sofia. (in Bulgarian)
- KUNCHEV, M. (2023). Constructing the Common Perpendicular of Two Skew Lines. *Mathematics and Informatics*, vol. 66, no. 2, pp. 115 – 123. (in Bulgarian)
- KUYUMDJIEVA, B., 2017. Not Just With a Ruler and Compass. *Professional Education*, vol. 19, no. 2, pp. 214 – 218. ISSN 1314-555X (in Bulgarian)
- LAZAROV, B., DIMITROV, D., 2019. Computer Supported Reconsideration of Conics. *Didactic modeling*, vol. 7, pp. 30 – 36. ISSN 1314-1651. (in Bulgarian)

- MARTINOV, N., 1974. *Geometric Transformations and Some of Their Applications*. Narodna Prosveta, Sofia. (in Bulgarian)
- NINOVA, J., 2007. *Basic Construction Problems*. Makros, Sofia. ISBN 978-954-561-201-5. (in Bulgarian)
- PETROV, K., 1969. *Apollonius Problems*. Nauka i Izkustvo, Sofia. (in Bulgarian)
- PETROV, K., GANCHEV, I., 1966. *Collection of Construction Problems in Geometry*. Narodna Prosveta, Sofia. (in Bulgarian)
- PETROV, F., NINOVA, J., 2023. In Memoriam of prof. Ivan Ganchev Donev. *Mathematics and mathematical education*. http://www.math.bas.bg/smb/2023_PK/tom_2023/pdf/101-133.pdf (in Bulgarian)
- TONOV, I., TONOVA, T., 2008. Computer Heuristics – An Opportunity for the Use of ICT in Education. *International Conference Computer Methods in Science and Education*, Varna.
- VASILEVA, N., PAVLOVA, N., 2014. *Teacher's Archive of Mathematics and Computer Science*. MATTECH, vol. 1, pp. 250 – 255, Shumen. (in Bulgarian)
- YORDANOVA, TS., 2024. *The Inversion Method for Solving Construction Problems and Technologies for Their Research*. Diploma thesis for the specialty Innovations and Multidisciplinarity in the Compulsory Training in Mathematics, Informatics and Information Technologies, Sofia University “St. Kliment Ohridski”, Sofia. (in Bulgarian)
- ZHECHEVA, A., PETROV, F., 2018. Online Collection of Sophism Problems in Mathematics, Informatics and Informational Technologies. *Mathematics, computer science and education*, vol. 1, no. 1, pp. 7 – 11, Veliko Tarnovo. (in Bulgarian)

INTERACTIVE RESOURCES FOR TEACHING THE INVERSION METHOD FOR CONSTRUCTION PROBLEMS

Abstract. The article presents a set of interactive resources with a dynamic geometry software which demonstrate the application of the inversion method in solving construction problems. The resources can help teachers of mathematics in extracurricular activities.

Keywords: inversion method; construction problems; interactive learning resources; geometry software

✉ **Tsvetelina Yordanova**
Private School "Pitagor"
147, Nikola Mushanov Blvd.
Sofia, Bulgaria
E-mail: cvetelina9812@gmail.com