

ИНФОРМАЦИОННИТЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА: СРЕДСТВО ЗА ИЛИ БАРИЕРА ПРЕД ФОРМИРАНЕТО НА АБСТРАКТНО МИСЛЕНЕ

Таня Тонова, Николина Николова

Резюме. В статията се прави кратък преглед на актуалното състояние на използването на информационните технологии в обучението изобщо и по математика в частност. Специално място е отделено на основната цел на математическото образование – да развие абстрактното мислене и способността да се извършват дедуктивни заключения. Анализирана е ролята на информационните технологии за постигане на тази цел в общ и конкретен план. Приведени са примери от реалната учебна практика. В заключение са формулирани препоръки на базата на направените изводи.

Keywords: mathematics education, integration of IT in education интегриране, abstract thinking, school practice

1. Въведение

Според мащабно независимо изследване на Европейската комисия относно разнообразието на учебни материали и техните технологични форми (Eurymed, Key Figures in Education in Europe; Data: IEA, Database PIRLS 2006) България е на едно от последните места по използване на разнообразни – и в съдържателен, и в технологичен аспект, учебни материали.

Съгласно Националната стратегия за въвеждане на информационните и комуникационните технологии (ИКТ) в българските училища до 2010 година в България би трябвало да се е усетило чувствително подобряване на качеството на образование в резултат на интегрирането на ИКТ в обучението.

В рамките на Националния семинар *Методологически, теоретични, нормативни и практически аспекти на електронното обучение в България*, проведен на 14 декември 2010 г., бяха представени резултатите от национално проучване с цели:

- идентифициране на нивото на знания, умения и компетенции у учители, директори и ИКТ администратори;
- идентифициране, дефиниране и систематизиране на групи от образователни потребности на професионалистите в сферата на образованието относно интегрирането на ИКТ [1].

В изследването са представени основно ИКТ компетенциите на учителите от различни културно-образователни области (КОО). Систематизирани са и педагогическите цели, които преподавателите атакуват чрез прилагане на ИКТ в обучението. Прави впечатление, че те са предимно в социален и организационен аспект. Наред с това са изследвани и приложения на ИКТ за мотивация, развитие на самостоятелност и за индивидуализиране на обучението. В проучването не са включени в явен вид наблюдения, свързани с използването на ИКТ за реализиране на конкретните и непосредствени методически цели на отделните дисциплини като развитие на типовете мислене по насоченост – всекидневно, артистично-художествено и научно-техническо, както и специфичните способности за критическо мислене, креативност, логическо и абстрактно мислене.

Една от четирите целеви групи на горното изследване са учителите от КОО „Математика“ и „Природни науки и екология“. Проучването дава представа за сравнителните нива на ИКТ компетенции на учителите от различните области, както и специфичните за тях дейности. Прави впечатление, че преподавателите от КОО „Математика“ са с относително високо ниво на ИКТ компетентност и използват технологиите сравнително често и разнообразно в ежедневието си. Форматът на изследването не касае начина на използване на ИКТ в процеса на обучение по математика съобразно спецификата на знанията, уменията и компетенциите, които са цел на обучението в тази КОО.

2. Математика и развиване на абстрактно мислене

2.1 Математиката като знание

Математиката заема специфично, уникално място в системата от предмети. Тя не е природна наука, въпреки, че е в най-пряка връзка с природните науки. Предметът ѝ са абстрактни ненаблюдаеми пряко обекти, които са по-скоро философски, отколкото реални. Чрез изучаване на математика учениците развиват мислене за:

- *формиране на понятия* – това е процес на търсене и създаване на ментален модел, съответстващ на клас обекти с определен набор от свойства. Учениците придобиват знания и умение за създаване на ментални модели за съществените признаци на всекидневни (предмети, събития и отношения) или теоретични реалности, да дават логически определения на тези ментални модели и намиране на адекватни термини за обозначаването им;

- *идентификация на понятия* – това е процес на изработване на хипотеза и проверка доколко конкретен предмет на опита принадлежи към даден клас, за който ученикът има вече понятие. Учениците придобиват знания и умение за провеждане на кратък или по-дълъг процес на проверка дали дадена реалност притежава необходимите и достатъчни признаци да бъде причислена към едно или друго понятие;

– *решаване на задачи* – това е процес на търсене и евентуално откриване на връзки между условия, така че да се постигне определена цел. Учениците придобиват знания и умение за построяване на модел на дадена ситуация (задача), посредством който се търси постигането на определен резултат [2].

2.2 Абстрактно мислене

Мисленето е функция на човешката когнитивна система. Всеки мисловен цикъл тръгва от състояние на неразбиране или озадачаване и завършва с обяснителна схема, включваща знание за процедури и факти. В предмета математика този мисловен цикъл преминава през въвеждане на понятия, конструиране на система от аксиоми, формулиране на теореми, доказателство на твърдения и решаване на задачи. По своята същност математиката е чисто абстрактна наука, ролята на предмета математика за развитие на абстрактно мислене е незаменима.

3. Обучението по математика, формирането на абстрактно мислене и ИКТ

3.1 Особенности на електронно съдържание

Съвременните информационни технологии предоставят безспорни предимства за създаването и ефективното използване на учебно съдържание. Неслучайно интеграцията им в обучението е залегнала в Европейската стратегия за промяна на образователните политики 2020 [3].

Електронното съдържание дава възможност за онагледяване на събития и явления, които ученикът не може да наблюдава пряко в естествена среда. Динамичните специализирани системи позволява проследяване на процес, експериментиране и генериране на хипотези. Наред с това възможностите на съвременните Уеб 2.0 технологии гарантират и икономическа ефективност – едно и също електронно съдържание може да бъде лесно адаптирано и използвано многократно от различни учители и ученици, дори за различни цели.

При използване на електронно съдържание в образователен контекст трябва да се има предвид не само възможностите, които то предоставя, но и спецификата на възприемането му. За разлика от традиционното, то се проследява избирателно (всеки преглежда интересуващата го част), представено е в разклонена, а не в линейна форма, характеризира се с динамика.

Тези му свойства биха могли да се използват в обучението по математика за развиване на абстрактното мислене, но биха могли и да изиграят лоша шега както на обучаемите, така и на техните учители.

3.2 Отражение в процеса на обучение по математика с ИКТ

Казус 1. Да се реши уравнението. $\left(x + \frac{1}{x}\right) |\sin x| + \frac{25}{x} \sin x = 0$

Решение 1. С помощта на Wolfram Mathematica [4] намираме, че корените на уравнението са -2 и $-\frac{1}{2}$. Системата **не дава** решенията на $\sin x = 0$.

Решение 2. Реализираме класическата схема на Пойа за решаване на математически задачи [5].

1. *Стъпка.* Разбиране на условието – уравнението не е от конкретен тип, съдържа абсолютна стойност, дробен израз и тригонометрична част.

2. *Стъпка.* Съставяне на план (избор на стратегия). Поради наличието на абсолютна стойност избираме стратегията **Разглеждане на случаи**.

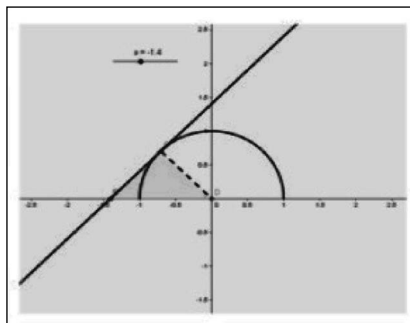
3. *Стъпка.* Изпълнение на плана (реализиране на стратегията). Във всеки от случаите свеждаме уравнението на еквивалентно на него в съответното множество от стойности на неизвестното, което и решаваме. Проверяваме кои от корените удовлетворяват ограниченията на случая.

4. *Стъпка.* Поглед назад. Формулираме решението на задачата на базата на получените при отделните случаи решения.

Извод: Използването на технология игнорира познавателната цел на задачата и заблуждава за множеството от решенията ѝ.

Казус 2. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които неравенството $\sqrt{1-x^2} > x-a$ има решение.

Решение 1. С помощта на система за динамична геометрия визуализираме двете страни на неравенството като графики на функции (Фиг. 1). С промяна на стойностите на параметъра наблюдаваме взаимното им разположение и отчитаме верността на неравенството. Експериментът показва, че особена, критична стойност на параметъра е тази, при която двете графики се допират. Търсените стойности са по-големите от критичната. Динамичният чертеж ни дава допълнителна информация за неравенството, например за кои стойности на параметъра то е изпълнено



Фиг. 1 Динамичен чертеж

за произволна стойност на x ; за кои стойности на параметъра решението на неравенството не съдържа положителни числа и други подобни задачи.

Нещо повече, визуализацията на задачата ни дава идея за намиране на критичната стойност по лесен, чисто геометричен начин.

Решение 2. Реализиране на класическата схема за решаване на математическа задача води до твърде усложнена логическа структура по три причини – сравнението е неравенство, ирационалност на лявата страна, наличието на параметър. Съставянето на случаи за различни интервали от стойности на променливата, зависещи от параметъра, по-скоро скриват, вместо да изяснят подхода към решението. Техническите трудности са бариера пред успешното решение.

Извод: Използването на технология разкрива същността на задачата и дава ефективни идеи за решаването ѝ.

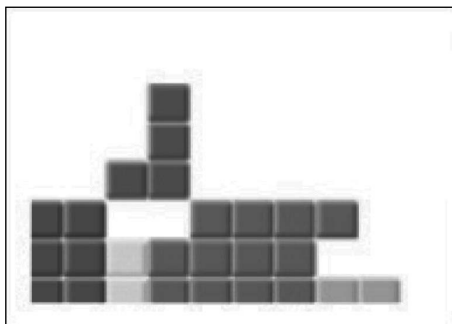
Казус 3. Понятието *Лице на многоъгълник*.

Аксиоматичното въвеждане на понятието *Лице на многоъгълник* е като функция със следните свойства:

1. Лицето на фигурата е неотрицателно число (положителност).
2. Лицето на фигура, съставена от няколко фигури без общи вътрешни точки, е сборът от лицата на отделните фигури (адитивност).
3. Еднаквите фигури има равни лица (инвариантност).
4. Лицето на единичния квадрат е равно на единица (нормираност)[6].

Тази дефиниция се съпътства с доказателство, че поне една такава функция съществува.

В училищния курс по математика на практика се **изчисляват** лицата на фигурите, а понятието *лице* само се онагледява и се използва на интуитивна основа (Фиг. 2).



Фиг. 2 Интуитивно възприемане на понятието *Лице*

Извод: От една страна, използването на технологиите за онагледяване на понятието е важно и полезно, от друга страна, затвърдяването на нагледната представа за него затваря пътя към аксиоматичното въвеждане на понятието. Ученикът не чувства необходимост от дефиниция и даже не подозира за съществуването ѝ.

Казус 4. Да се намерят стойностите на параметъра a , при които най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + |x - a| + |x - 1|$ е по-голяма от 2 [7].

Решение 1.

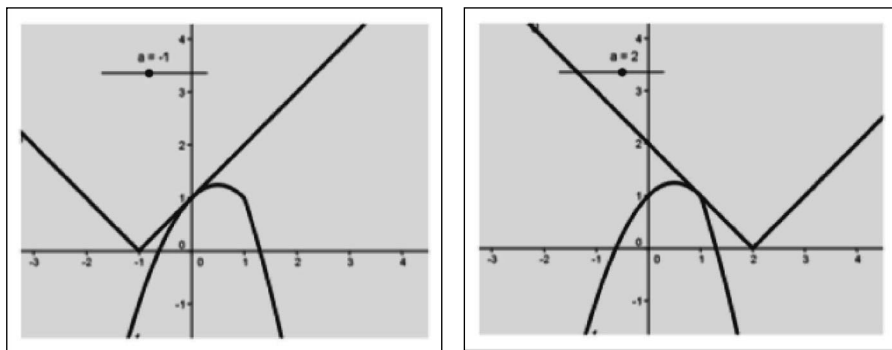
1. *Стъпка.* Разбиране на условието – формулираме на еквивалентна на дадена задача „Да се намерят стойностите на параметъра a , при които неравенството $x^2 + |x - a| + |x - 1| > 2$ е изпълнено за всяка стойност на x “.

2. *Стъпка.* Съставяне на план.

2.1. Използваме стратегията **Изолиране на параметъра** и преработваме неравенството до $|x - a| > 2 - x^2 - |x - 1|$.

2.2. Използваме стратегията **Направи картинка** (Фиг. 3). С помощта на технология визуализираме лявата и дясната страна като графики на съответните функции. Търсените стойности съответстват на разположение на графиката на модулната функция $f(x) = |x - a| = \begin{cases} -x + a, & x \leq a \\ x - a, & x > a \end{cases}$ изцяло над графиката на функцията в дясната страна на неравенството, която е $g(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - x + 3, & x > 1 \end{cases}$.

Експериментът подсказва, че търсените критични стойности са в моментите на допиране на двете графики и/или преминаване на графиката на модулната през точката на счупване на параболичната.



Фиг. 3 Стратегия *Направи картинка*

3. *Стъпка.* Изпълнение на плана. Търсим стойностите на параметъра, при който уравнението $x - a = -x^2 + x + 1$ има единствено решение. Тъй като уравнението е $x^2 = a + 1$, то има единствено решение при $a = -1$. Аналогично намираме стойността на параметъра a , при който уравненията $-x + a = -x^2 + x + 1$ и $-x + a = -x^2 - x + 3$ имат единствено решение $a = 2$.

4. *Стъпка.* Поглед назад. Търсените на стойности на параметъра са $a \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Решение 2. Нагледността, благодарение на използваната технология, дава възможност да се изгради трайна представа за ситуацията в задачата, да се абстрахираме от конкретния образ, да изградим една въображаема нагледност и да разсъждаваме на абстрактно ниво. Разглеждаме функцията $F(x) = x^2 + |x - a| + |x - 1|$. Ако гарантираме верността на задачата в *критичните* точки, ще гарантираме верността на задачата изобщо, т.е. ще намерим решението ѝ. Критичните точки са точките на смяна на знака на подмодулните величини a и 1 и върховете на параболите $x^2 + x - a + x - 1$; $x^2 - x + a + x - 1$; $x^2 + x - a - x + 1$; $x^2 - x + a - x + 1$, които са -1 , 0 и 1 . Следователно търсим общите решения на неравенствата $F(-1) > 2$, $F(1) > 2$, $F(a) > 2$, $F(0) > 2$.

Намирането им е лесно и потвърждава намереното вече решение.

Извод. Използването на технологии може да отвори пътя към абстрактно мислене и да е предпоставка за *мозъчна атака*.

Казус 5. Преодоляване на дефицита на внимание.

Естествено е желанието на учителите, особено в начален курс, да реализират в максимална степен възможностите на мултимедийните системи. Намеренията са да привлекат вниманието, да засилят интереса и да създадат мотивация. Това обаче често се оказва *ходене по ръба*. Концентрацията на вниманието върху външни, случайни и нямащи съществено значение елементи на технологичния/електронния материал създават препятствия пред дидактическата задача. Вместо да представя в по-пълна светлина изучавания обект, самият нагледен материал става обект на изучаване. Възниква подмяна на това, което ученикът трябва да осъзнае, с това, което той фактически осъзнава. От психологическа гледна точка това е централният въпрос на нагледността. Познанието започва с чувствено възприятие – озадачаване, любопитство, предизвикателство, но винаги трябва да се съобразяваме с факта, че първостепенно значение за развитието чрез познание има мисленето и в преобладаваща степен абстрактното мислене.

Извод. Използването на технологиите в обучението по математика е и мерило за професионализма на учителя. Чрез начина на имплантирането им в цялостния

процес на предаване, усвояване и проверка на знанията той влага собствените си виждания, разбирания и компетентност. Въпросът е дали учителят усъвършенства *професионализма си*, или *професионално си измива ръцете*, използвайки технологиите.

4. Заключение

Разгледаните по-горе казуси и направените изводи са в съответствие с формулираните в [1] приоритети при използването на технологиите, с основните аспекти в панелната дискусия [8] и други научни форуми. Натрупаната критична дискусийна маса по проблема предполага нови стъпки в политиката и практиката на електронното и компютърноподпомогнатото обучение като:

1. Сформиране на смесени колективи от психолози, педагози, математици и ИТ специалисти с цел мултидисциплинарен научен анализ в името на качествен прогрес в електронното обучение.

2. Изготвяне на критерии за оценка и качество на електронните учебни материали, които да отчитат и когнитивните процеси, скоростта на обучение, трайността на наученото, готовността и компетентността за използване на е-материали.

3. Трайни и непрекъснати връзки между работещите в образователната система и бизнеса – издателства, софтуерни фирми и др. организации.

На този етап ролята на ИКТ за развиването на абстрактно мислене е изцяло в ръцете на учителя. Въпреки главоломните темпове на развитието им методиката за преподаването на всякакво електронно съдържание трябва да върви паралелно или изпреварващо от създаването му. От друга страна, методите за преподаване, особено в дисциплина като математиката, биха могли много по-ефективно да използват *неограничените* възможности на ИКТ. Независимо от средствата и методиките за преподаване, математиката, като универсално и вечно актуално средство за интелектуално развитие, е неподвластна нито на човека, нито на времето, а още по-малко на технологиите.

ЛИТЕРАТУРА

- Минчев, Б. (2006). *Обща психология*. София: Сиела.
- Fredriksson, U. (2003) Changes of Education Policies within the European Union in the Light of Globalisation, *European Educational Research Journal*, 2 (4), 522–546.
- Пойа, Д. (1972), *Как да се решава задача*, София: Народна просвета.
- Башмакова, И., Юшевич, А. (Ред.). (1966), *Энциклопедия элементарной математики*, Москва: Наука, (том V, стр. 8–9.)
- Горнщейн, П.И., Полонски, В.Б., Якир, М.С (1996). *Задачи с параметри*, София: Проф. М. Дринов.

БЕЛЕЖКИ

Пейчева, Р., Сариева, Й. (2010). *Идентифициране на групи от образователни потребности в сферата на електронното учене на професионалистите от средното образование*. Национален научен семинар на тема: Методологически теоретични нормативни и практически аспекти на електронното обучение в България
WolframAlpha, <http://www.wolframalpha.com/>, използван на 27 февруари 2011.
Математика и математическо образование, СМБ, 2010, стр. 89–94.

INFORMATION TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS EDUCATION: *TOOL FOR OR BARRIER AGAINST* FORMING ABSTRACT THINKING

Abstract. In the article is reviewed the current state of using ICT in education in general and specifically in the field of mathematics education. Special attention is devoted to the fundamental goal of mathematics education – to develop abstract thinking and the ability to conduct deductive reasoning. The role of ICT for achieving this goal in analyzed both broadly and in specific aspect. Examples of the actual school practice are shown. Finally, some recommendations are formulated based on the reached conclusions.

Tanya Tonova

✉ Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University „St. Kl. Ohridski”
5 James Bourchier blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: ttonova@fmi-uni-sofia.bg

Nikolina Nikolova

✉ Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University „St. Kl. Ohridski”
5 James Bourchier blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: nnikolova@fmi-uni-sofia.bg