

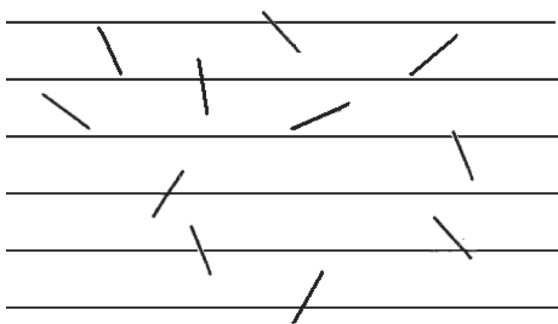
ИГЛА НА БЮФОН И ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛОТО π

Евгения Стоименова

Резюме. През 1777 г. френският учен Джордж-Луи Леклерк, Конт на Бюфон, поставя и решава задачата за определяне на вероятността случайно хвърлена игла с дължина l да пресече права от мрежа от успоредни прави на разстояние b една от друга. Тази вероятност се оказва, че е равна на $\frac{2l}{\pi b}$. Резултатът е забележителен и изненадващ. Той представя добре известната константа π като граница на много голям брой случайни хвърляния. В тази статия се прави анализ на експеримента на Бюфон.

Keywords: probability, number π , Buffon

Експериментът на Бюфон. Да предположим, че лист хартия е разграфен с прави линии, на разстояния l cm една от друга. Да вземем няколко игли с дължина l cm и да ги пуснем върху листа. Някои от иглите ще пресекат правите, други не. На фиг.1 листът е достатъчно голям, така че иглите падат върху него.



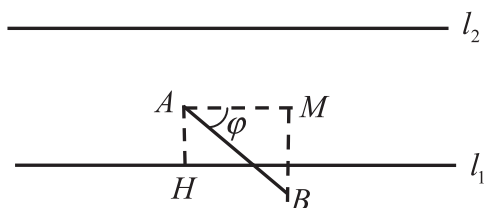
Фигура 1 Положение на “случайно” хвърлени игли

Изобразени са 11 паднали игли, от които 7 са пресекли права. Отношението

на броя на иглите, пресекли права, и броя на всички игли е $7/11$. Това отношение е доста близко до числото $2/\pi$. Ако то се запазва при продължаване на експеримента, да речем с 1000 или 1000000 игли, то експериментът може да служи за приблизително определяне на числото π . Логично е да очакваме, че ако отношението е закономерност, то използването на повече игли ще доведе до по-голяма точност на приближението. При провеждане на експеримента трябва да се стремим да пускаме иглите случайно, а не преднамерено.

Френският естествоизпитател Джордж Бюфон (1707–1788) е поставил задачата за определяне на вероятността случайно хвърлена игла с дължина l да пресече права от мрежа от успоредни прави на разстояние ($b > l$) една от друга. Тази вероятност се оказва, че е равна на $\frac{2l}{\pi b}$. Това е забележителен и изненадващ резултат, представящ добре известната константа π като граница на много голям брой случайни хвърляния. По-късно французинът Пиер Лаплас (1749–1827) отбелязал, че експериментът може да се използва за приближено пресмятане на числото π , тъй като споменатата вероятност е пропорционална на отношението на броя на иглите, пресекли права, и броя на всички игли при голям брой опити. Ще споменем някои известни опити от миналото, но нека първо да направим анализ на експеримента.

Анализ на експеримента. За простота ще разгледаме случая, когато дължината на иглата съвпада с разстоянието между правите, например 1 cm . На фиг.2 е показано положението на една игла, която пресича права от листа.



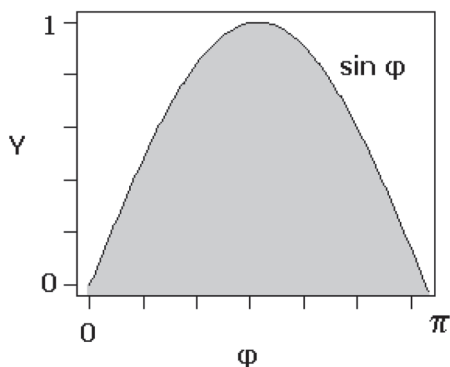
Фигура 2 Положение на игла, която пресича права

Ясно е, че дали иглата AB пресича правата l_1 , зависи от ъгъла ѝ спрямо l_1 и колко далече е единият край на иглата до l_1 . Нека $Y = AH$ е разстоянието на левия край A на иглата AB до най-близката права (в случая l_1). Можем да очакваме, че от всички подобни случаи за положението на левия край на иглата, в половината от тях десният край ще е по-високо от левия, а в другата половина – по-ниско. Същото важи и за другите различни отстояния на левия край на иглата до правата. Да про-

дължим с първата игла. Ако означим с φ ъгъла, който иглата сключва с правата l_1 (т.е. $\angle BAM = \varphi$, където $AM \parallel l_1$), то тя ще пресече правата, ако $\sin \varphi$ (положението на десния край, т.е. $BM = \sin \varphi$) е по-голямо от Y . Въпросът е в каква част от всички експериментални изходи е изпълнено неравенството $Y < \sin \varphi$?

Пресмятане на вероятността за пресичане на права. Y се изменя от 0 до 1, а φ е между 0 и π . Множеството от всички възможни положения на иглата изцяло се определя от случайния избор на точка от правоъгълника $F(Y, \varphi) = [0, 1] \times [0, \pi]$.

На фиг. 3 е изобразена връзката между Y и φ . За всяко $0 < Y < 1$ и всяко $0 < \varphi < \pi$, затъмнената област съответства на точките (Y, φ) , за които $Y < \sin \varphi$. За стойности на Y и φ , получени чрез случайния експеримент на пускане на игли, благоприятните случаи иглата да пресече права се отнасят към всички възможни случаи както лицето на областта под кривата $\sin \varphi$ към лицето на правоъгълника с размери 1 и π . Лицето на областта под кривата $\sin \varphi$ е известна и може да се намери в някой учебник по тригонометрия или да се изчисли с помощта на интеграла $\int_0^\pi \sin \theta d\theta$. Тук само ще споменем, че то е равно на 2. Тъй като лицето на правоъгълника е π , то вероятността иглата да пресече правата е $\frac{2}{\pi} \approx 0,6366197$.



Фигура 3 Условие за пресичане $Y < \sin \varphi$

Теоретичната вероятност $\frac{2}{\pi}$, резултат от анализа на експеримента, е определена при наличие на всички възможни положения на иглата, респективно точки (Y, φ) , а те са безкрайно много. На практика можем да провеждаме краен брой експерименти и да изчисляваме отношението на броя на иглите, пресекли права към броя на всички хвърлени игли. Резултатът от анализа означава, че посред-

ством експеримента, можем да определим приближена стойност на числото π . Ако хвърлим N на брой игли (или една игла N пъти) и получим P на брой пресичания на права, то отношението $\frac{P}{N}$ би трябвало да е близо до $\frac{2}{\pi}$, т.е. би трябвало π да е близо до $\frac{2N}{P}$.

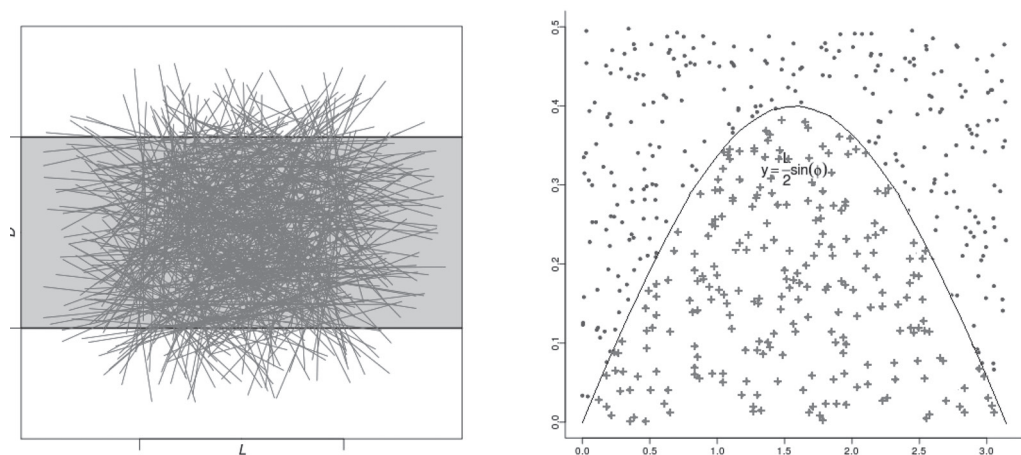
Забележка. Тук разгледахме случай с мрежа от прави на разстояние l *см* една от друга и игла, дълга също l *см*. Принципно няма разлика, ако мрежата и иглата са с различни размери. Корекцията е при определянето на синусоидалата и изчисляването на лицата. Повече за тези случаи може да се намери в препоръчаната литература.

Експерименти от миналото. През 19 век, когато теорията на вероятностите е смятана за полу-експериментална наука, са се провеждали различни случайни експерименти. Б. В. Гнеденко споменава за резултати на “най-запалените” експериментатори с иглата на Бюфон. В таблицата са дадени тези резултати:

Волф	1850 г.	5000 опита	експериментална стойност: 3,1596
Смит	1855 г.	3204 опита	експериментална стойност: 3,1553
Фокс	1894 г.	1120 опита	експериментална стойност: 3,1419
Лазарини	1901 г.	3408 опита	експериментална стойност: 3,1415929
Точна стойност на π : 3,1415927...			

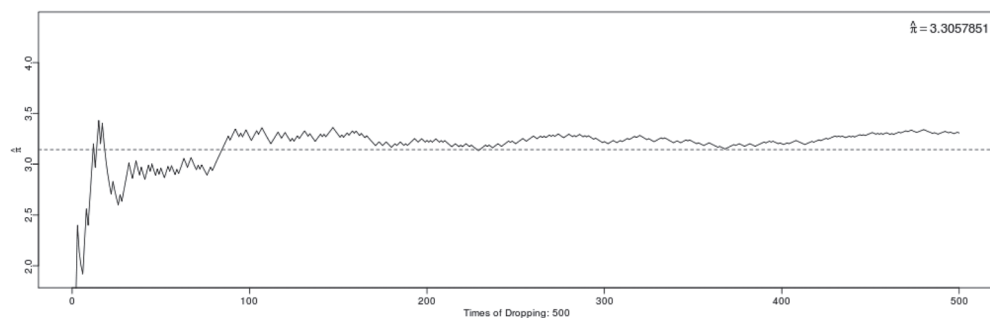
В първата колонка са имената на учените, във втората е годината на провеждане на експеримента, в третата е броят на опитите с иглата и в последната е резултатът от експерименталното определяне на числото π . Най-отдолу е дадена истинската стойност на π с точност до седмия знак след десетичната запетая. Най-впечатляващ е резултатът на Лазарини, който съвпада с теоретичната стойност на π до шестия знак. Отношението на дължината на иглата и разстоянието между правите е избрано $\frac{5}{6}$. Броят на опитите (3408) е избран от Лазарини неслучайно. Наблюдаваните от него 1808 пресичания водят до известното рационално приближение $\pi \approx \frac{355}{113}$. Остава въпросът дали Лазарини не е “нагласил малко” резултата (?).

Компютърни симулации на експеримента. В днешно време можем да проведем симулации на експеримента с иглата на Бюфон с компютърна програма. На фиг. 4 са показани резултатите от симулации с програма на езика *R*. Изобразени са 500 игли. Съответните точки са (Y, φ) , като с кръстчета са означени положенията, при които иглите пресичат прави от мрежата, а с точки – такива, при които не пресичат.



Фигура 4 500 симулации с игла

На фиг. 5 са отразени съотношенията на експериментално определеното число π и броя на опитите в поредицата от 500 опита. Сигурно сами забелязвате, че при такъв брой опити приближението на π не е много добро.



Фигура 5 Съотношение на експериментално определеното число π и броя на опитите в поредица от 500 опита

Симулации в Excel. Сега ще предложим една проста симулационна процедура в Excel, която можете лесно да проведете сами. Ще използваме функцията за генериране на случайни числа $\text{RAND}()$ за симулиране на стойности на разстоянието

Y на левия край на иглата до правата и ъгъла φ , който тя сключва с правата. Функцията $RAND()$ генерира случайни числа в интервала $[0, 1]$. Затова нека колонката A съдържа номера N на опита, колонката B – разстоянието Y , а колонката C – ъгъла φ . Да генерираме 100 такива опита:

A2:A101

B2:B101 = $RAND()$

C2:C101 = $PI() * RAND()$

За всеки опит отчитаме пресичане на игла, ако $Y < \sin \varphi$, т.е. в колонката D изчисляваме чрез логическата функция IF .

D2:D101 $Hit = IF(B2 < SIN(C2); 1; 0)$

Това е за първата двойка (Y, φ), а за останалите копираме по продължението на клетките в колонката D . На всеки етап изчисляваме приближението на числото π :

E2:E101 $Estimate = 2 / (SUM(D2:D101) / N)$

F2 „Actual“ = $PI() = 3,14159265$

Можете да построите графиката на съотношенията на експериментално определеното число π и броя на опитите в поредицата (редицата **E2:E101** спрямо редицата **A2:A101**).

Забележка. При тази симулация за генерирането на ъгъла използвахме вградената стойност на числото π в Excel. Това разбира се не е коректно, но е само за илюстрация на експеримента. В литературата се намират различни предложения за преодоляване на този проблем.

БЕЛЕЖКИ

Следните Интернет-страници съдържат допълнителни сведения, връзки към източници и полезни идеи за случайните експерименти и тяхното приложение:

1. John Tabak, Probability and statistics: the science of uncertainty, 2004, Facts On File Inc.
2. Pi and the Fibonacci Numbers <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html> (последен достъп на 11.02.2012)
3. Buffon's Needles
http://delphiforfun.org/programs/Math_Topics/BuffonsNeedles.htm
(последен достъп на 11.02.2012)
4. Simulation of Buffon's Needle
http://www.oga-lab.net/RGM2/func.php?rd_id=animation:buffon_needle
(последен достъп на 11.02.2012)
5. Число Пи на уроке математики <http://festival.1september.ru/articles/509352/>
(последен достъп на 11.02.2012)

ЛИТЕРАТУРА

1. Klain, D. A., Rota, G. C. (1997). *Introduction to geometric probability*. Cambridge: University Press.

BUFFON'S NEEDLE AND ESTIMATION OF THE π NUMBER

Abstract. In 1777 the French scientist Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon, asked and solved the following problem: what is the probability that a needle of length l when dropped randomly onto a net of parallel cracks, distance b apart, lands on a crack? The answer, $\frac{2l}{\pi b}$, leads to a remarkable and surprising result estimating the value of the well known constant π as a limit of a great number of random drops. The aim of the present paper is to analyze Buffon's experiment.

✉ Evgenia Stoimenova
Professor, DSc in Mathematics
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
<http://www.math.bas.bg/~jeni/>