

ИДЕНТИФИЦИРАНЕ НА НАДАРЕНИ УЧЕНИЦИ ПО МАТЕМАТИКА ЧРЕЗ ФЕНОМЕНИТЕ НА ЖАН ПИАЖЕ

Милен Замфиров

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Статията описва възможността за идентифициране на надарени ученици по математика, базирана на феномените на Ж. Пиаже. Показва се, че чрез провеждането на някои от феномените, особено тези, свързани с математическо познание, може да се установи умствената възраст на даден ученик, оттам и да се определи какво е интелектуалното му ниво.

Keywords: Piaget's theory; development process; mathematics; gifted student

Увод

Идентифицирането на талантиливи ученици не само по математика, но и по останалите предмети никога не е представлявало лесна дейност от страна на учителя.

Непрекъснато увеличаващият се обем от работа, с който се натоварва българският учител, по никакъв начин не спомага за това да отдели достатъчно време за откриването и последващото насърчаване на талантиливи ученици.

Възможностите по-скоро са изведени извън училището под формата на различни олимпиади и състезания. Министерството на образованието и науката също се включва в този процес главно с отпускането на индивидуални годишни и/или еднократни стипендии. Независимо от това проблемите в тази област остават. Неслучайно Н. Винер описва в своята книга „Аз бях вундеркинд“ (1981) трудностите, с които се е сблъсквал в училище – „Необичайно ранното ми овладяване на четенето създаде големи трудности при определянето на класа, който трябваше да посещавам в училище. На седем години ми беше много по-лесно да чета, отколкото да пиша – буквите излизаха разкривени и грозни. Аритметиката ми бе задоволителна, но не смятах по общоприетите правила – предпочитам да използвам измислени от мен начини“.

Н. Винер отбелязва още, че когато обявим едно дете за вундеркинд, това не се отнася само до него, а обхваща и интелектуалното равнище

на връстниците му. Тъкмо този факт родителите и учителите забелязват много преди то да го разбере. В първите етапи на опознаването на света човекът сам за себе си е норма и ако той се объркава, единственият възможен отговор е този на индианеца: „Не съм се загубил аз, а вигвамът“ (Wiener, 1981).

Очевидно е, че въпросът за ранното идентифициране на даровитите, подкрепата на семействата им и специалното им обучение за пълната реализация на техните възможности остава открит. Не съществува общо изградена и утвърдена педагогическа система за обучение на талантливи ученици в българските училища.

За тази цел предлагаме теоретичен модел, който би улеснил определянето на надарените ученици и даването на възможност на учителите за насоки в тяхната работа.

Структури на мисленето и структури на математиката

Съгласно тази теория трите фундаментални структури на математиката – алгебричните, структурите на наредбата и топологичните структури, съответстват на елементарните структури на мисленето.

Според Пиаже мисловните операции са обратими. Обратимостта е основен закон на композициите, свойствени на ума. Адекватността на образите е свързана с наличието на инварианти при преобразуването в процеса на познанието, който обезпечава съхраняване на съответната информация през целия път от обекта към субекта.

Изводът на Жан Пиаже е, че ако зданието на математиката се изгражда на основата на структурите, които кореспондират със съответните структури на мисленето, то дидактиката на математиката трябва да се основава само на прогресивната организация на оперативните структури (Georgiev, 1994).

М. Трифонова (2001) отбелязва, че осъществяването на едни или други действия с числата – броене, събиране, изваждане и др., според Пиаже не е показателно за степента на развитие на операторните структури на индивида, които правят възможно овладяването на тази социокултурна знакова система. Конструирането на числото предполага наличието на операторни структури, позволяващи числата да се овладяват в естествената им последователност, т.е. като елементи от една система.

В доказване на тази теза Пиаже посочва следния пример: детето може правилно да преброи пет жетона, които поставяте пред него, но да мисли, че техният брой се променя, ако ги разделите в две групи с по два и три жетона съответно. Това произтича от отсъствието на консервация на количеството – цялото, разделено на части, губи своята идентичност (Piajet, 1992).

На основата на своите проучвания в областта на формалната логика и математиката Пиаже предлага своя теоретичен модел на когнитивното развитие с формализация на последователните логични структури, лежащи в основата на психологичното функциониране, и с дефиниране на качествено различните етапи в развитието на класовете, отношенията и числата.

Стадиален модел на Пиаже

Постепенно Пиаже изгражда теорията си за етапите в развитието на детето – от стadiите на конкретните операции към стadiя на формално-логическите операции, който приключва на 15 години. Тези етапи са разработени благодарение на известните му експерименти с деца, изследващи различни аспекти от детската психика. Всеки етап представлява детското разбиране за реалността по време на този период. Развитието от един период към друг е определено от натрупването на несъответствия от детското разбиране на околната среда, което, в крайна сметка, води до необходимост за реорганизация на мисловната структура.

Пиаже разделя когнитивното развитие на децата и юношите на четири стadiя: сензомоторен (0 – 2 г.), предоперационален (4 – 7 г.), конкретно операционален (7 – 11 г.) и формално операционален (12 – 15 г.). Той е убеден, че всички деца преминават последователно през тези етапи и никой не може да пропусне даден стadiй, макар че отделните деца преминават през етапите с различен темп (Slavin, 2004).

Феномени на Ж. Пиаже

Определянето дали детето е достигнало, или не даден стadiй става посредством експерименти, станали известни като феномени на Пиаже (Zamfirov, 2015).

Например на сензомоторния етап, ако покриете шишето на бебето с кърпа, то няма да я махне, защото вярва, че шишето е изчезнало. Към двегодишна възраст обаче децата разбират, че обектите съществуват дори ако не могат да се видят (Piajet, 1996).

При предоперационалния период, ако пред детето бъде излято мляко от висока и тясна чаша в широка и ниска чаша, то детето ще е сигурно, че във високата чаша е имало повече мляко. Това е така, понеже детето през този период се фокусира само върху един елемент – височината на млякото в чашата, игнорирайки всички останали, и не може да бъде убедено, че количеството мляко е едно и също (Piajet, 1992).

Ръсел (1994) отбелязва, че справянето с всеки феномен предполага съгласуваното действие на система обратими логически операции. Например дете, което току-що е достигнало до определено равнище на мислене, не може да оперира на по-висок стadiй.

Самите феномени са подробно описани в редица публикации на Ж. Пиаже, но поради трудния стил и изложение тук препоръчваме да се използва чудесният превод и адаптация от Б. Минчев (Bashovski & al., 1994), който при подготовката е използвал широко великолепния каталог Piagetian Inventories. The Experiments of Jean Piaget. Paris, OECD, 1977.

Тук ще посочим като пример два от феномените на Пиаже – „Запазване на числовото равенство на две множества“ и „Запазване на дължина“, чрез които може да се реализира този корелационен модел. Феноменът е взет от великолепния превод и адаптация на Б. Минчев (Bashovski & al., 1996).

Феномен „Запазване на числовото равенство на две множества“

Феноменът разглежда как у децата дву-еднозначното съответствие между две множества води до съждение за тяхната еквивалентност.

Процедура 1: чаши/бутилки

Необходими предмети:

- 6 малки бутилки;
- комплект от чаши.

Първо на детето се предлага да вземе толкова чаши, колкото са бутилките. След това изследващият проверява това, като излива съдържанието на всяка малка бутилка в по една от съответните чаши. Накрая той приканва детето да събере чашите плътно заедно, без да докосва бутилките, а след това да събере и бутилките плътно една до друга.

Процедура 2: цветя/вази или яйца/чашки за яйца

Необходими предмети:

- 6 малки вази (чашки за яйца);
- комплект от цветя (яйца).

Тази процедура е подобна на описаната по-горе освен в това, че изследващият променя последователно пространственото разположение на елементите на всяко множество. Във всеки случай той пита детето дали има толкова чаши, колкото и бутилки, толкова яйца, колкото и чашки за яйца, толкова цветя, колкото и вази, преди и след като е разрушил пространственото съответствие между множествата.

Процедура 3: продавач (разменяне едно за едно)

Необходими предмети:

- монети по 1 лев;
- цветя;
- бонбони (сладки).

Предварително изследващият установява дали детето може да брои и доколко. След това той обявява цена на всяко от горните неща по 1 лев. Първо на детето се предлага да отгатне колко неща би могло да си купи. След това изследващият и детето започват да разменят цветята (бонбони-

те) за монети едно по едно. Накрая изследващият пита детето дали има съответствие между монетите и купените с тях неща.

Резултати

Равнище 1 (от 4 до 5 г.). Липса на съответствие и еквивалентност. Детето не успява да установи съответствието едно по едно. То оценява дължините или плътността на наборите, които наблюдава, чрез глобални сравнения. Еквивалентността се постига чрез сравняване на редове.

Процедура 3: детето не е способно да предвиди броя на нещата, които следва да бъдат разменени. Липса на еквивалентност на двата набора.

Равнище 2 (4 – 7 г.). Детето установява съответствие, но му липсва разбиране за трайна еквивалентност. Във всички случаи детето установява едно непосредствено интуитивно (зрително) съответствие.

Процедура 3: детето предсказва съответствието. То забелязва числовото твърждение на двата набора, но отказва да приеме тяхната еквивалентност. То не може да схване трайна еквивалентност, която е независима от пространствената подредба.

Равнище 3 (6 – 7 г.). Съответствие и трайна еквивалентност. В началото на това равнище детето реагира на една промеждутъчна фаза: то отрича еквивалентността и след това я допуска, като се основава на съответствието, което бива установено. Детето признава, че във всички случаи количествата остават еквивалентни независимо от частичните трансформации в подредбата на елементите.

Процедура 3: за да разпознае еднозначно и обратимо (реципрочно) съответствие, детето се обръща от размяната към зрителното съответствие и схваща размяната като едновременно изчерпване на двата набора (множества).

Феномен „Запазване на дължина“

Процедура 1: чрез нея се цели да се установят критериите, по които детето оценява дължините.

На изследващия са нужни следните предмети:

- права пръчка (AB);
- вълнообразна лента (CD).

И двете трябва да са еднакви по дължина.

На детето се дават да сравнява други прави линии, за да се види дали то може да ги оценява като еднакви по дължина, или не. След това от него се иска да сравни дължините на АВ и CD (която е нагъната). Детето бива накарано да прокара ръката си надлъжно по АВ и CD и след това изследващият го пита дали те са равни, или не. После той изправя CD, а детето през това време наблюдава. Задава му се въпросът дали CD и АВ са еднакви по дължина.

Резултати

Равнище 1 (4 – 5 г.). Детето оценява дължините на линиите по отношение на тяхното начало и край. То разсъждава, че дължината на правата пръчка и тази на нагънатата лента са равни дори след като е видяло последната разгъната, преди да е върната в първоначалната ѝ форма.

Равнище 2 (5 г.). Статично оценяване: детето съди за дължините по техните крайни точки. Оценката чрез движение (проследяване на линиите с пръст): при нея нагънатата лента изглежда на детето по-дълга от правата линия. Връщайки се към статичната ситуация, детето се връща и към своето първоначално съждение.

Равнище 3 (6 – 7 г.). Детето оценява дължините посредством отрязъците между двата края.

Процедура 2: чрез тази процедура се изучава възникването на понятие за запазване на дължина.

За възпроизвеждането на този феномен са необходими:

– 2 еднакви пръчици (5, 7 или 10 см дълги).

На детето се показват двете пръчици успоредни и с изравнени краища. Задава му се въпрос дали пръчиците са същите по дължина. След това пред него пръчиците се разместват, като една от тях се придвижва напред 1 или 2 см, така че краищата на пръчиците се разместват. Отново детето се пита дали пръчиците са еднакво дълги. Може да се изпробват и други размествания на пръчиците, като се поставят:

- под прав ъгъл;
- така, че да образуват остър ъгъл;
- вид на Т;
- така, че едната става продължение на другата.

Резултати

Равнище 1 (5 – 7 г.). Отсъствие на запазване. Детето разсъждава, че пръчицата с „водещ край“ е по-дълга, а „изоставащата“ е по-къса.

Равнище 2 (5 – 7 г.). Перцептивни нагласения: детето отсъжда, че 5 см пръчици, които са разместени в краищата си на 1 – 2 см, са неравни по дължина, но мисли, че 7 или 10 см пръчици при същото разместване са еднакво дълги.

Интуитивни нагласения: едната пръчица изглежда на детето по-дълга от единия си край, другата – от другия край, но когато детето забележи, че пръчиците биват размествани едновременно, то признава, че дължината им се запазва.

Запазване чрез емпирична проверка: детето възпроизвежда с действия първоначалната ситуация на успоредните пръчици с изравнени краища, за да се увери, че дължините се запазват.

Равнище 3 (7 – 8 г.). Запазване на дължината: детето или се позовава на тъждествеността на пръчиците, или на равенството на разстоянията между техните краища.

Процедура 3: целта на процедурата е да изследва запазването на дължини при разделяне на предметите.

За изпълнение на процедурата са необходими:

2 хартиени ленти с дължина 30 см и широчина 1 см.

Изисква се детето да се увери, че лентите са еднакви по дължина. Една от лентите се накъсва първо на 2 части, след това на още няколко, като частите се подреждат по разнообразни начини:

- една по-дълга и една по-къса част образуват прав ъгъл;
- две равни части формират произволен ъгъл;
- няколко къси части лента образуват дъга и пр.

Изследваният пита детето дали общата дължина на всички части на първоначалната лента остава същата. Той може да зададе въпроса и по друг начин: дали частите от лентата покриват същото разстояние.

Резултати

Равнище 1 (4 – 6 г.). Незапазване при разделяне според положението и неговата промяна: детето фиксира вниманието си върху крайната точка на придвижване на ъглите и обиколния маршрут. Омаловажаване на отношенията на позициониране и на промените в положението: детето се концентрира върху вътрешните части и взема предвид равенството на броя на частите.

Равнище 2 (6 – 7 г.). Емпирична проверка: детето препоръчва частите в права линия и се уверява, че дължините са равни. Въображаемо връщане към изходната точка: „преди това беше същото нещо“. Първото дете отрича равенството на дължините, след това то признава запазването, като основава съждението си върху компенсацията на разликите между частите.

Равнище 3 (6 – 8 г.). Придобива се понятие за запазване на дължините. Детето диференцира и координира операциите на съгласуване (позициониране – разместване) и разделяне.

Процедура 4: целта на процедурата е да изследва взаимоотношенията между измерването и запазването на дължината.

Необходими са следните предмети:

- лист картон с нарисувани правоъгълни ленти с дължини 3, 6 и 9 см;
- подвижни картонени ленти със същите дължини.

Детето бива питано дали нарисуваните „пътища“ върху картона са по-дълги от другите. То трябва да провери истинността на своите отговори чрез измерване посредством подвижните ленти. След това на детето се поставя друга задача: изследователят взема подвижната лента от 3 см и я

поставя в началото на една от по-дългите ленти, нарисувани върху картонения лист. Той обяснява, че едно човече върви по този път и подвижната лента представлява неговата „стъпка“, докато той ходи по „пътя“. На детето се предлага да продължи крачките на човечето до края на пътя.

Резултати

Равнище 1 (4 – 8 г.). Движение на положението без разделяне, „движението господства“: детето или използва пръстите си, за да сравнява, или налага широчината на два-три пръста, или налага подвижната лента с неподредени движения и произволно отбелязва краищата на лентата, достигнати при последователните налагания.

Разделяне без изместване: детето основава действията си по разделянето върху възприятийно подразделяне на лентите и чрез движения с поглед се уверява във връзката между фигурите, които сравнява.

Равнище 2 (6 – 7 г.). Детето разбира транзитивността на процедурата, предложена от изследователя, но не и предлаганата единица: използвайки картонени ленти от 3 и 6 см, то взема някоя от двете да измерва една фигура, а после втората, за да измери друга.

Равнище 3 (7 – 8 г.). Осмисляне на дължините посредством единици за измерване: детето свежда „пътищата“ и техните части в множество от малки (3 см) единици.

Анализ на феномените

Различни съвременни изследователи, основно свързани с теорията за преработката на информацията, са склонни да се съгласят с описанието на познанието, дадено от Пиаже, но за разлика от него вярват, че мисловните умения могат директно да се преподават. Според тях децата усвояват все по-мощни правила или процедури за разрешаване на проблеми и могат да бъдат стимулирани да откриват дефицити в собствената си логика и да прилагат нови логически принципи (Slavin, 2004). С други думи, те са в състояние да извличат правила и да оценяват приложението им. По този начин децата развиват по-големи способности за абстрактно мислене. Последствията от подхода на оценяване на правилата за обучението са, че стимулирането на нови методи на обучение всъщност може да засилва детските мисловни способности (Slavin, 2004).

В този смисъл, стадиялният модел на Пиаже би могъл да играе сериозна роля в идентифицирането на талантиливи ученици по математика. Неслучайно Ж. Пиаже предлага разграничаването на две фази в развитието на стадия – „фаза на подготовка“ и „фаза на завършване“ или „площадка на равновесието“. И. Димитров (2017) отбелязва, че това разграничаване на двете фази в развитието на стадия за факт от принципиално важно естество и с изключително значение за целите на диагностиката, както и за

адекватното обучение на децата и юношите, намиращи се на съответната фаза – на подготовка или на завършване на стадия от своето развитие. Оттук и необходимостта за изследователите и за педагозите да знаят на коя от фазите се намира всяко едно от изследваните или обучаваните деца, за да могат своевременно и еквивалентно да „инвестират“ в тях, опирайки се на тяхната специфична сензитивност (Dimitrov, 2017).

Заклучение

В подкрепа на предложения теоретичен модел за разкриване на възможностите на талантиливи ученици са и някои изследвания, базирани върху теорията на Пиаже. Независимо че един от важните моменти в теорията е, че етапите на развитието са строго определени, някои изследвания са установили и случаи, в които задачи от използвания от Пиаже вид могат да се предлагат на деца и ученици на по-ранни стадии. Например няколко изследователи са установили, че малки деца са в състояние да успеят с по-прости форми на задачи на Пиаже, които изискват същите умения или пък са представени по по-прост начин с по-ясни инструкции (Slavin, 2004).

Резултатът от тези изследвания е признанието, че децата са много по-компетентни, отколкото е смятал Пиаже, особено когато се оценяват практическите им познания, като става ясно, че някои задачи от типа, използван от Пиаже, могат да се преподават на децата много по-рано от възрастта, на която обикновено се появяват без обучение.

Подобен модел би позволил на общообразователния учител, както и на екипа за подкрепа за личностно развитие в училището лесно да се ориентират в способностите на надарения ученик и да изработват индивидуални програми, адекватни на развитието му. Например за един ученик, който е в V клас и е на единайсет години, но според изследването попада в по-високия стадий на формалните операции, то за него може да бъде изработена такава индивидуална програма, която да покрива материал от VI клас, и ученикът да бъде изпитван върху материал, който отговаря на умствената му възраст, вместо често да скучае в клас върху материал, считан от него за елементарен.

REFERENCES/LITERATURA

- Bashovski, I., Minchev, B., Banova, V. & N. Mincheva (1996). *Psychological Evaluations of child in primary school* (In Bulgarian). Sofia: Veda-Slovena JG (ISBN 954-8510-29-4). 168 pages. [Башовски, И., Минчев, Б., Банова, В. & Н. Минчева (1996). *Психологично изследване на детето в начална училищна възраст*. София: Веда Словена ЖГ.]

- Wiener, N. (1953). *Ex-Prodigy: My Childhood and Youth*. M.I.T. Press, USA (ISBN 0 262 23011 9). 228 pages.
- Georgiev, Vl. (1994). Aims of Teaching Mathematics in Bulgarian school. *Mathematics and Informatics*, 2, 3 – 8. [Георгиев, Вл. (1994). Цели на обучението по математика в българското училище. *Математика и информатика*, 2, 3 – 8.]
- Dimitrov, I. (2017). What is under Development in the Theory of Jean Piaget and what are its Factors, Mechanisms and Criteria for Periodization (In Bulgarian). *Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski", Faculty of Philosophy, Psychology*, Vol. 107 [Димитров, И. (2017). Какво подлежи на развитие в теорията на Жан Пиаже и какви са неговите фактори, механизми и критерии за периодизиране. *Годишник на Софийския университет „Св. Климент Охридски“*, Философски факултет, Психология, Том 107.]
- Zamfirov, M. (2015). *Specific working forms in Mathematics and Informatics for children and students with special educational needs* (In Bulgarian). Sofia: Univ. izd. SU St. Kliment Ohridski (ISBN 978-954-07-3982-3). 448 pages. [Замфиров, М. (2015) *Специфични форми на работа по математика и информатика за деца и ученици със специални образователни потребности*. София: Св. Климент Охридски.]
- Piajet, J. (1992). *Selected psychological works*. Moskva: Prosveshtenie. (ISBN 5-87977-019-2). 256 pages [Пиаже, Ж. (1992) *Избранные психологические труды*. Москва: Просвещение.]
- Piajet, J. (1996). The Psychology of Intelligence. *Pedagogika*, 8, 14 – 56 [Пиаже, Ж. (1996) Психология на интелекта. *Педагогика*, 8, 14 – 56.]
- Russel, K. (1994). *How to teach students think: Jean Piaget's theory in practice*. Plovdiv: Univ. izd. Paisii Hilendarski (ISBN 954-423-070-X). 51 pages. [Ръсел, К. (1994). *Как да научим учениците да мислят: Теорията на Жан Пиаже в практиката*. Пловдив: Паисий Хилендарски.]
- Slavin, R. (2004). *Educational Psychology* Sofia: Nauka i izkustvo (ISBN 954-02-0293-0), 680 pages. [Славин, Р. (2004). *Педагогическа психология*, София: Наука и изкуство.]
- Trifonova, M. (2001). Piaget's conception in the context of the contemporary cognitive and psychological models. *Psychologichni izsledvania*, 1, 21 – 34. [Трифонова, М. (2001). Конструкцията на числото в концепцията на Ж. Пиаже в контекста на съвременните когнитивнопсихологични модели. *Психологични изследвания*, 1, 21 – 34.]

Piagetian inventories: the experiments of Jean Piaget (1977). Centre for Educational Research and Innovation. Paris: Organization for Economic Co-operation and Development (ISBN 2597484).

IDENTIFICATION OF GIFTED STUDENTS IN MATHEMATICS BY JEAN PIAGET'S PHENOMENA

Abstract. This paper describes the possibility of identification of gifted in Mathematics students based on Jean Piaget's phenomena. It shows that by conducting some of his phenomena – the ones related to mathematical knowledge in particular – it allows to calculate the mental age of a student and after that their intellectual level to be determined.

✉ **Assoc. Prof. Milen Zamfirov, DSc.**

Department of Special Education and Speech Therapy
Sofia University
15, Tsar Osvoboditel Blvd.
1504 Sofia, Bulgaria
E-mail: m.zamfirov@fppse.uni-sofia.bg