

ИДЕИ ЗА ГЕОМЕТРИЧНО МОДЕЛИРАНЕ ПРИ РЕШАВАНЕ НА КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ

Наталия Павлова

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

Резюме. В статията са разгледани актуалните изменения в учебните програми по математика и мястото на комбинаториката в тях. Предложена е идея за прилагане на геометрично моделиране при решаването на комбинаторни задачи. Разгледани са конкретни задачи, моделирани по три различни начина. Представената идея е приложима за диференциация на обучението, за реализация на проектния подход и при работа в извънкласни форми на обучение.

Keywords: combinatorics; modeling; geometry; student; extracurricular education

Въведение

Обучението по вероятности и статистика в българското училище дълги години оставаше съсредоточено основно в горния курс, като темите от комбинаторика и теория на вероятностите заемаха своето място в X клас, а статистиката оставаше за последните – XI и XII клас. През годините бяха диагностицирани редица проблеми, като откъснатост на ядрото от другите математически раздели, недостатъчна практическа насоченост на съдържанието, недостатъчна подготовка на учителите по темите, свързани с вероятности и статистика, несериозно отношение към преподаването на темите от ядрото „Вероятности и статистика“ и редица други. В България са направени множество проучвания, като представените в (Bojkova, 2007), (Toncheva & Jordanova, 2007), (Toncheva, 2008), (Krasteva, 2013), насочени към анализирането на учебните програми и предлагане на модели за повишаване на ефективността на обучението. Съществуват и редица чужди разработки по темата, като (Janáčková & Janáček, 2006), насочено към предпочитаните от учениците методи и стратегии за решаване на комбинаторни задачи, (Grossman, 2007), проучващо мястото на темите от раздел „Комбинаторика“ при последните образователни реформи, и много други.

След дълъг застой през последните години в България се предложиха сериозни промени в организацията именно на обучението по темите, свързани с комбинаторика, вероятности и статистика, в средното училище.

Място на комбинаториката в новите учебни програми

Въпреки че и преди комбинаторни задачи в най-елементарен вид се появяваха още в началното училище под формата на задачи от типа – „По колко различни начина можем да се облечем, ако имаме две различни блузи и три различни панталона?“, основното място на комбинаториката беше в X клас. В (Grozdev, Rangelova & Krasteva, 2012) е представен анализ на учебници по математика от I до VII клас, в които се появяват задачи, свързани с комбинаториката. От проучването се вижда, че такива задачи има, като се залага на стратегии, свързани с директното изброяване на възможностите.

Според новите учебни програми по математика, в сила от 2017/2018 година, комбинаториката се измества в VIII клас, като се очаква учениците да придобият следните компетентности:

- „Умее да пресмята възможности по правилата за събиране и за умножение“;
- „Умее да пресмята пермутации, вариации и комбинации без повторение“;
- „Умее да моделира конкретни ситуации“.

В IX клас учениците се запознават с класическата вероятност и следва да използват своите знания, умения и компетентности по комбинаторика, за да моделират ситуации и да решават задачи, което в учебната програма е заложено като „умее да пресмята класическа вероятност чрез формулите за пермутации, вариации и комбинации без повторение“.

Идеи за геометрично моделиране в темата „Комбинаторика“

Нивото на средния ученик насочва работата по темата „Комбинаторика“ основно към задачи, в които е възможно директно изброяване на възможните съединения и до директно пресмятане във формулите. Предлагат се и по-сложни задачи, където чрез разсъждения учениците следва да определят вида на съединението и да пресметнат с помощта на формулите броя на възможностите.

Задачите и подходът в тази статия са насочени към ученици с изявен интерес към математиката. Удачно е да се представят в извънкласни форми на обучение или да се зададат като проектно проучване. Възможно е използването на подобни задачи с цел осъществяване на диференциация в обучението в класове, в които има изявени ученици.

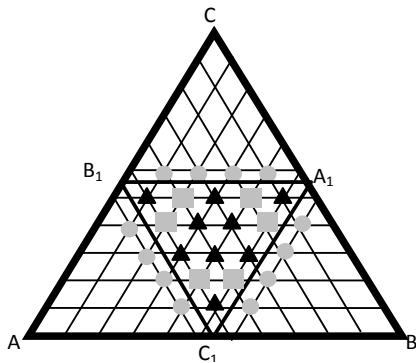
Следвайки идеята на официалната учебна програма ученикът да „умее да моделира конкретни ситуации“, тук е предложено използване на геометричното моделиране на съединения и твърдения, което онагледява и облекчава преброяването на елементите на крайни множества. Предлагат се задачи, в които се търси броят на възможните реализации на опит, така че да се събъдне дадено твърдение. Решението на задачите значително се облекчава чрез

използването на геометрични модели. Решаването на подобни задачи наред с предложените в учебниците би могло да стимулира интереса на изявените ученици към комбинаториката, а на по-късен етап – към теорията на вероятностите. От друга страна, учениците се запознават с един нов аспект в геометричното моделиране, което способства прилагането на изследователския подход в обучението.

Задача 1. По колко различни начина могат да се обърнат едновременно подхвърлени три зара – бял, зелен и червен (с ξ_1, ξ_2, ξ_3 означаваме броя на точките съответно на белия, зеления и червения зар), така че:

- 1) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$;
- 2) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$ и да може да се построи триъгълник със страни с дължини – ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см;
- 3) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$ и да може да се построи равнобедрен триъгълник със страни с дължини – ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см;
- 4) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$ и да може да се построи разностранен триъгълник със страни с дължини – ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см;
- 5) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$ и $\xi_1 z^2 + 2\xi_2 z + \xi_3 = 0$ да има i ($i = 0, 1, 2$) реални корена;
- 6) $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$;
- 7) $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$;
- 8) ξ_1, ξ_2 и ξ_3 да бъдат различни и $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$.

Решение



Фигура 1

За решаването на задачата ще използваме геометричен модел, базиран на твърдението, че сумата от дължините на разстоянията от произволна точка от вътрешността на равностранен триъгълник до страните му е равна на височината на триъгълника. Твърдението лесно се доказва с метода на лицата. Използването именно на този модел позволява осъществяването на много добра вътрешнопредметна връзка с темите, свързани с изучаването на триъгълници от предходните класове.

Построяваме равностранен $\triangle ABC$ с височина 11 см – всяка от страните моделира едно от зарчетата (за определеност – АВ – белия зар, ВС – червения, СА – зеления зар). Прекарваме успоредни на страните на $\triangle ABC$ прави на разстояние – 1, 2, 3, 4, 5 и 6 см (по този начин моделираме броя на точките върху съответното зарче).

Тъй като сумата на дължините на разстоянията от всяка вътрешна за $\triangle ABC$ точка до страните му ще бъде 11 см, лесно може да се изброи, че осемнайсетте прави ще определят 27 вътрешни за $\triangle ABC$ точки, които моделират ситуацията от първата подточка. Ако означим разстоянията от всяка такава пресечна точка до АВ, ВС и СА съответно с ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см, то $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$, което означава, че всяка от тези точки моделира точно един от начините за обръщане на зарчетата, така че $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$. По този начин получаваме отговор на първото подусловие, а именно – съществуват 27 възможности на три различни зара да се паднат точки, чиято сума да е 11.

За второто подусловие трябва да „усилим“ изискванията с неравенствата на триъгълника. В нашия случай, за да съществува триъгълник със страни с дължини съответно ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см, трябва да са изпълнени следните условия: $\xi_1 + \xi_2 > \xi_3$, $\xi_1 + \xi_3 > \xi_2$ и $\xi_3 + \xi_2 > \xi_1$. Тези условия заедно с ус-

ловието $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$ са еквивалентни на $\xi_1 < 5\frac{1}{2}$, $\xi_2 < 5\frac{1}{2}$ и $\xi_3 < 5\frac{1}{2}$.

В геометричния модел това са тези точки (от 27-те), които са вътрешни за $\triangle A_1B_1C_1$ (триъгълника, определен от правите на разстояние $5\frac{1}{2}$ от страните на триъгълника и вътрешни за него – лесно се доказва, че това е точно триъгълникът, определен от петите на височините на $\triangle ABC$).

Преброяваме, че те са 15.

За третото подусловие трябва от 15-те точки от предходната подточка да се отделят тези, които моделират равнобедрени триъгълници, т.е. в тях трябва да имаме поне две страни с равни дължини. Това може да се случи, когато дължините на две от разстоянията от моделиращата точка до страните на $\triangle ABC$ са равни. Ясно е, че това са точките от ъглополовящите на триъгълника. Чрез директно изброяване намираме, че техният брой е 9.

За четвъртото подусловие от предходните две подточки следва, че остават 6 точки, отговарящи на условието $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11$, и може да се построи разностранен триъгълник със страни с дължини ξ_1 см, ξ_2 см и ξ_3 см.

За пето подусловие проверяваме знака на дискриминантата на даденото квадратно уравнение за всяка от 27-те точки, като определяме стойностите на ξ_1, ξ_2, ξ_3 от модела. От проверката се вижда, че тя е отрицателна в 12 случая, в нито един от случаите не е нула и е положителна в останалите 15, т.е. отговорите са: 12 начина да се паднат зарове така, че уравнението да няма корени, 0 начина да се паднат зарове така, че уравнението да има един двоен корен, и 15 начина да се паднат зарове така, че уравнението да има два корена.

Шесто подусловие се моделира посредством точките, разположени под ъглополовящата BB_1 и надясно от ъглополовящата CC_1 и техният брой е 3, а на подусловие седем са точки под ъглополовящата BB_1 и надясно от ъглополовящата CC_1 , включително и точките от ъглополовящите, и техният брой е 6.

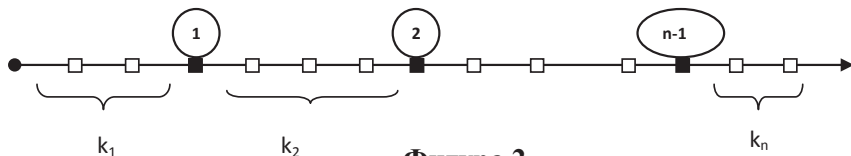
Точките, моделиращи последното подусловие, са всички (от 27-те) без тези от ъглополовящите. Броят им е 18.

Задача 2. По колко различни начина може да се изпише представянето на цяло неотрицателно число k като сума от n цели неотрицателни числа – $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$?

Забележка: за представянето на числото $k=5$ като сума на $n=2$ числа под различни изписвания ще разбираме: $5=0+5$; $5=5+0$; $5=1+4$; $5=4+1$; $5=2+3$; $5=3+2$.

Решение

Ще моделираме задачата с числова ос. Върху оста ще нанесем всички точки с положителни цели координати, по-малки или равни на $n+k-1$, т.к. ще ни трябват $n-1$ „точки разделители“ за отделните „събираеми“, а сумата от събираемите е k .



Фигура 2

Ако оцветим $n-1$ от тях (това може да стане по C_{n+k-1}^{n-1} различни начина), то оцветените точки ще разделят останалите k точки на n групи, за които е изпълнено, че $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. По този начин всяка една $(n-1)$ -орка разделя останалите k точки на групи с численост (от ляво надясно) $k_1, k_2, \dots, k_n$. Всяко такова разделяне определя различно изписване на k като сума от n цели неотрицателни числа.

От казаното следва, че k може да се представи като сума от n цели неотрицателни числа по C_{n+k-1}^{n-1} начина.

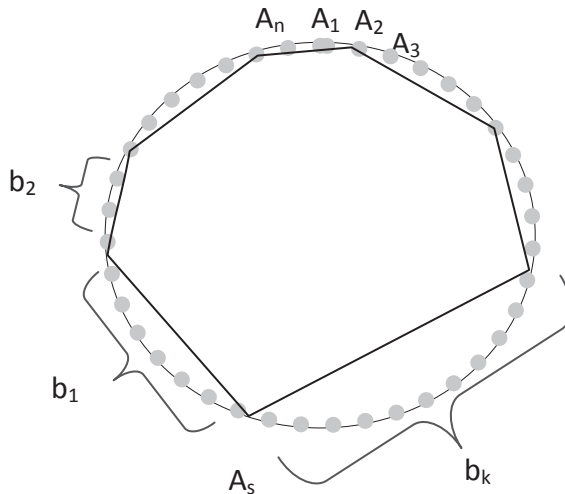
Задача 3. По колко начина последователно могат да бъдат избрани k ($k \leq n$) от върховете на правилен n -ъгълник, така че те да определят многоъгълник, който:

- 1) няма общи страни с n -ъгълника;
- 2) има точно i общи страни с n -ъгълника?

Решение

С $A_1, A_2, \dots, A_n$ ще означим върховете на n -ъгълника. Отначало ще намерим числото a_s – броя на k -ъгълниците с връх A_s , останалите върхове на който са избрани измежду $(n-1)$ -те върха на n -ъгълника и нямащи общи страни с n -ъгълника.

Да означим с $b_1, b_2, \dots, b_k$ броевете на върховете на n -ъгълника, на който върховете на k -ъгълника, считано от A_s (по часовата стрелка), разделят останалите $n-k$ върха на n -ъгълника.



Фигура 3

Нека числото a_s е равно на броя на всички различни изписвания на числото $n-k$, като сума от k цели положителни числа (както в задача 2) $b_1 + b_2 + \dots + b_k = n-k$.

За да няма k -ъгълникът общи страни с n -ъгълника, трябва между върховете на k -ъгълника да има поне по една точка, т.е. $b_1 \geq 1, b_2 \geq 1, \dots, b_k \geq 1$, което е еквивалентно на $(b_1 - 1) \geq 0, (b_2 - 1) \geq 0, \dots, (b_k - 1) \geq 0$.

За удобство ще представим $b_1 + b_2 + \dots + b_k = n - k$ като $(b_1 - 1) + (b_2 - 1) + \dots + (b_k - 1) = n - 2k$, където $(b_1 - 1) \geq 0, (b_2 - 1) \geq 0, \dots, (b_k - 1) \geq 0$.

От казаното следва, че броят a_s на всичките k -ъгълници с върхове, избрани измежду върховете на n -ъгълника, между които е и A_s , са толкова, по колкото различни начина може да се представи числото $n - 2k$ като сума от k цели неотрицателни числа. Следователно, като използваме резултата от задача 2, ще получим, че $a_s = C_{k+n-2k-1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k-1}$.

Нека a е броят на всички k -ъгълници без общи страни с n -ъгълника и с върхове, избрани измежду върховете на n -ъгълника. Тогава $a_1 + a_2 + \dots + a_n = ka$, откъдето следва, че $nC_{n-k-1}^{k-1} = ka$, т.е. $a = \frac{n}{k}C_{n-k-1}^{k-1}$ и такива k -ъгълници могат да бъдат избрани по $k!$ начина, следователно опитът може да бъде осъществен така, че k -ъгълникът да няма общи страни с n -ъгълника по $ak! = n(k-1)!C_{n-k-1}^{k-1} = n(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k-1)$ начина.

По аналогичен начин може да се реши и второто подусловие. Отговорът за него е: $\frac{n}{k}C_k^i C_{n-k-1}^{k-i-1} k! = (k-1)! n C_k^i C_{n-k-1}^{k-i-1}$.

Задача 4. По колко начина могат да се наредят върху лавица N книги, k от които са k -томници, така че да няма книги от k -томник, разположени една до друга? (Отговор $k!(n-k)!C_{n-k+1}^k$)

Заклучение

Подобни задачи могат да се намерят в (Valchev, 2004), (Portev, 2003), (Toncheva, 2008), (Toncheva & Valchev, 2005) и редица други учебници и сборници. Сложността на задачите и съответно на моделите трябва да се съобрази с нивото на подготовка и мотивация за работа на учениците. Учителите сами биха могли да съставят задачи, решението на които силно се опростява посредством геометричното моделиране.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. Тази статия е подпомогната частично по проект от Фонд Научни изследвания“ на ШУ „Епископ Константин Преславски“ РД -08-117/04.02.19 г.
2. Mathematics Curricul [Учебни програми по математика], <https://www.mon.bg/>
3. Grossman, A. (2007) High School Math Reform and Combinatorics, Senior Project, <http://ramanujan.math.trinity.edu>, 1/30/2019

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Janáčková, M. & J. Janáček (2006). A classification of strategies employed by high school students in isomorphic combinatorial problems, *The Mathematics Enthusiast, Volume 3, Number 2*, pp. 128 – 145.
- Bojkova, M. (2007). The education in statistics/stochastics – a compulsory part of European culture. *Mathematics and education in mathematics. Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, St. Konstantin & Elena resort, Sofia* 102 – 108 [Божкова, М. (2007). Образованието по статистика/стохастика – задължителна част от културата на Европа, *Математика и математическо образование, 36-а пролетна конференция на СМБ, „Св. Константин и Елена“*, София, 102 – 108.]
- Valchev, Hr. (2004). The point of the classic probability formula in secondary mathematical course, *Mathematics and education in mathematics. Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, April 1 – 4*, 306 – 310 [Вълчев, Хр. (2004), Мястото на класическата формула за вероятност в училищния курс по математика, *Математика и математическо образование*, 33, 306 – 310.]
- Grozdev, S., P. Rangelova & J. Krasteva (2012). Ideas for implementing propaedeutics in Combinatorics of I – VII class, “*Traditions, directions, challenges*”. Smolyan, 145 – 150 [Гроздев, С., П. Рангелова & Ю. Кръстева, Ю. (2012). Идеи за осъществяване на пропедевтиката по комбинаторика от I – VII клас. „*Традиции, посоки, предизвикателства*“. Смолян, 145 – 150.]
- Krasteva, J. (2013) Integration model for Combinatorics in school, *Autoreferat*”. Plovdiv [Кръстева, Ю. (2013). Интеграционен модел за обучение по комбинаторика в училище, *Автореферат*. Пловдив.]
- Portev, L. et al. (2003). *20 sample topics for mathematics with solutions*. Plovdiv: Letera [Портев, Л. и колектив (2003) *20 примерни теми за матура с решения*. Пловдив: Летера.]
- Portev, L. et al. (2003). *Algebra*. Plovdiv: Letera [Портев, Л. и колектив (2003). *Алгебра*. Пловдив: Летера.]
- Toncheva, N. (2008). *Elements of probability theory in the Bulgarian school. Concrete contemporary realization in 10th grade. Dissertation*. Shumen [Тончева, Н. (2008) *Елементи от теория на вероятностите в българското училище. Конкретна съвременна реализация в X клас. Дисертация*. Шумен.]
- Toncheva, N. & Hr. Valchev (2005). Geometry models of basic events and classical probability. *Mathematics and education in mathematics, Proceedings of the Thirty Fourth Spring Conference of the Union of*

Bulgarian Mathematicians, Borovets, April 6 – 9, Sofia, 388 – 395 [Тончева, Н. & Хр. Вълчев (2005). Геометрично моделиране на базови събития и класическа вероятност, Математика и математическо образование, 34-а пролетна конференция на СМБ – Боровец, София, 388 – 395.]

Toncheva, N. & I. Jordanova. (2007). A historical review on teaching probability and statistics in the Bulgarian school from 1945 till 2005. *Mathematics and education in mathematics. Proceedings of the Thirty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians St. Konstantin & Elena resort, Sofia, 388 – 395* [Тончева, Н. & И. Йорданова (2007). Исторически преглед на изучаването на теория на вероятностите и статистиката в българското училище в периода 1945 – 2005 година, 36-а пролетна конференция на СМБ – „Св. Константин и Елена“, София, 417 – 421.]

GEOMETRIC MODELING IN COMBINATORIC PROBLEMS

Abstract. The article presents the changes in the mathematics curriculum. The place of Combinatorics in new curriculum is considered. An idea for geometric modeling application is proposed for solving combinatory problems. Three different types of models are suggested. The proposed idea is applicable for differentiation on training, for implementation on a project-based approach, and for working in the extracurricular education.

✉ **Prof. Natalia Pavlova**
Shumen University
115, Universitetska St.
9712 Shumen, Bulgaria
E-mail: n.pavlova@shu.bg