

ФРАКТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ

Валерий Секованов, Елена Селезнева, Светлана Шляхтина
Костромской государственный университет

Аннотация. В данной статье рассмотрены приложения фрактальной геометрии в физике. Разработана методика исследования множества Жюлиа преобразования перенормировки $R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2$ для $q = -0,1$, которое совпадает с множеством нулей Янга-Ли, указаны приложения идей фрактальной геометрии в теории турбулентности и других разделах физики.

Key words: Julia set, renormalization, fixed and critical points, orbit of a point, phase transition

Идеи фрактальной геометрии находят широкое применение в различных областях человеческих знаний. Данной науке посвящено много сайтов, написаны монографии, проводятся представительные научные конференции различного уровня. Об интенсивности исследований в области фрактальной геометрии свидетельствуют работы цитированные в данной статье.

В данной статье мы рассмотрим приложения фрактальной геометрии в физике. Следуя (Пайтген & Рихтер, 1993), приведем обзорно приложения фрактальных множеств Жюлиа, которые интенсивно проникают в теоретические исследования. В 1952 году физики Янг и Ли предложили рассматривать фазовые переходы (изменение состояния вещества) не только в реальном мире, но и в математическом мире комплексных чисел. Поясним это подробнее: по теореме

Гаусса алгебраическое уравнение N -й степени $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_Nx^N = 0$ (*) имеет ровно N нулей в комплексной плоскости. Известно суждение, что «настоящие» фазовые переходы происходят только в пределе при очень большом числе частиц. Янг и Ли получили следующую картину. В случае, когда число частиц конечно, алгебраическое уравнение (*) имеет конечное число нулей в комплексной плоскости. По мере того, как растет число частиц, увеличивается и число нулей, которое становится все плотнее и прижимается к действительной оси, выстраиваясь в прямую линию, которая пересечет ось OX в точке x_c . Тогда вещественные области $x < x_c$ и $x > x_c$ которые характеризуют фазы 1 и 2, естественно продолжают на комплексную плоскость, а линию нулей можно интерпретировать как

комплексную фазовую границу. Для иерархических моделей удалось доказать, что множество Жюлиа преобразования перенормировки, которое является рациональным отображением, в точности совпадает с множеством нулей Янга – Ли в термодинамическом пределе. Следуя (Пайтген & Рихтер, 1993), рассмотрим решетку с рекуррентной структурой, имеющую на n -й стадии 4^{n-1} связей, каждая из которых на $(n+1)$ -й стадии заменяется двумя новыми узлами решетки и четырьмя связями. Статистическая сумма решетки на стадии n представляет собой многочлен степени 4^{n-1} . Редукция с n -й стадии на $(n-1)$ -ю осуществляется с помощью суммирования. Получен результат:

$$Z_{(n)}(x) = Z_{(n-1)}(x')_{(n)}, \text{ где}$$

$$R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2 \text{ и } \varphi(n) = (2x + q - 2)^{2 \cdot 4^{n-2}} \text{ (Пайтген \& Рихтер, 1993).}$$

Деррида, Де Сезе и Ичиксон впервые обнаружили тождественность нулей Янга–Ли в термодинамическом пределе с множеством Жюлиа преобразования перенормировки.

В (Пайтген & Рихтер, 1993) изображены фазовые границы в смысле Янга-Ли и в смысле перенормировок, продолженные в комплексную плоскость. Однако подробных пояснений нет, что вызывает многочисленные вопросы у бакалавров, студентов, магистров и аспирантов, изучающих теорию фазовых переходов.

Проведем исследование при $q = -0,1$.

$$\text{Имеем: } R_q(x) = \left(\frac{x^2 - 0,1 - 1}{2x - 0,1 - 2} \right)^2 = \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2.$$

$$\text{Неподвижные точки находятся из уравнения: } (R_q(x))^{(1)} = x, \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2 = x.$$

Произведя преобразования, получим: $x^4 - 2,2x^2 + 1,21 = 4x^3 - 8,4x^2 + 4,41x$. Дан-

ное уравнение равносильно уравнению $x^4 + 6,2x^2 - 4x^3 - 4,41x + 1,21 = 0$. Решая последнее уравнение с помощью среды MathCAD, получим:

$$\text{polyroots} \left(\begin{pmatrix} 1.21 \\ -4.41 \\ 6.2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.975 + 0.449i \\ 0.975 - 0.449i \\ 1 \\ 1.049 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.975 + 0.449i$$

$$x_2 = 0.975 - 0.449i$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1.049$$

Заметим также, что неподвижной точкой отображения

$$R_q(x) = \left(\frac{x^2 - 0,1 - 1}{2x - 0,1 - 2} \right)^2 = \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2 \text{ будет и точка } \infty.$$

Определим характер найденных неподвижных точек:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2 = \frac{4x(x^2 - 1,1)}{(2x - 2,1)^2} - \frac{4(x^2 - 1,1)^2}{(2x - 2,1)^3}$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_1} \right| = \left| \frac{4 \cdot (0.975 + 0.449i) \cdot [(0.975 + 0.449i)^2 - 1,1]}{[2 \cdot (0.975 + 0.449i) - 2,1]^2} - \frac{4 \cdot [(0.975 + 0.449i)^2 - 1,1]^2}{[2 \cdot (0.975 + 0.449i) - 2,1]^3} \right| = 1,048$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_2} \right| = \left| \frac{4 \cdot (0.975 - 0.449i) \cdot [(0.975 - 0.449i)^2 - 1,1]}{[2 \cdot (0.975 - 0.449i) - 2,1]^2} - \frac{4 \cdot [(0.975 - 0.449i)^2 - 1,1]^2}{[2 \cdot (0.975 - 0.449i) - 2,1]^3} \right| = 1,048$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_3} \right| = \left| \frac{4 \cdot 1 \cdot (1^2 - 1,1)}{(2 \cdot 1 - 2,1)^2} - \frac{4 \cdot (1^2 - 1,1)^2}{(2 \cdot 1 - 2,1)^3} \right| = 0$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_4} \right| = \left| \frac{4 \cdot 1,049 \cdot (1,049^2 - 1,1)}{(2 \cdot 1,049 - 2,1)^2} - \frac{4 \cdot (1,049^2 - 1,1)^2}{(2 \cdot 1,049 - 2,1)^3} \right| = 501,049$$

Точка $x_3=1$ – притягивающая неподвижная точка.

Точки $x_1=0.975+0.449i$, $x_2=0.975-0.449i$, $x_4=1.049$ – отталкивающие неподвижные точки, поскольку $\left| (R_q(x_1))' \right| = 1,048$, $\left| (R_q(x_2))' \right| = 1,048$, $\left| (R_q(x_3))' \right| = 0$, $\left| (R_q(x_4))' \right| = 501,049$. Полученные вычисления показывают, что из четырех точек x_1

x_2 x_3 x_4 притягивающей неподвижной точкой будет только точка $x_3 = 1$.

Согласно теореме Б.2.4. каждый притягивающий цикл A притягивает критическую точку c (Кроновер, 2000).

Поэтому для нас важны критические точки отображения

$$R_q(x) = \left(\frac{x^2 - 0,1 - 1}{2x - 0,1 - 2} \right)^2 = \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2, \text{ которые мы сейчас найдем, не используя ин-}$$

формационно-коммуникационные технологии. Имеем:

$$\begin{aligned}(R_q(x))' &= \left[\left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)^2 \right]' = 2 \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right)' = 2 \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right) \cdot \frac{2x(2x - 2,1) - 2(x^2 - 1,1)}{(2x - 2,1)^2} = \\ &= 2 \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right) \cdot \frac{4x^2 - 4,2x - 2x^2 + 2,2}{(2x - 2,1)^2} = 2 \left(\frac{x^2 - 1,1}{2x - 2,1} \right) \cdot \frac{2x^2 - 4,2x + 2,2}{(2x - 2,1)^2} = \frac{4(x^2 - 1,1)(x^2 - 2,1x + 1,1)}{(2x - 2,1)^3}\end{aligned}$$

Критическими точками отображения $R_q(x)$ являются: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2,1}{2} = 1,05$; $x_3 = \sqrt{1,1} \approx 1,0488$; $x_4 = -\sqrt{1,1} \approx -1,0488$; $x_5 = 1,1$; $x_6 = \infty$.

Замечаем, что $x_1 = 1$ является притягивающей неподвижной точкой. Точка $x_6 = \infty$ также является неподвижной притягивающей точкой для функции $R_{-0,1}(x)$ (Кроновер, 2000).

Точка $x_2 = \frac{2,1}{2} = 1,05$ отображается на ∞ $\left(R_{-0,1}^{(1)}(1,05) = \left(\frac{1,05^2 - 1,1}{2,1 - 2,1} \right)^2 = \infty \right)$ после первого шага и остается там: $R_{-0,1}^{(2)}(1,05) = \infty \dots R_{-0,1}^{(n)}(1,05) = \infty$.

Так как $R_{-0,1}^{(1)}(\pm\sqrt{1,1}) = 0$, то остается исследовать только траектории точек 1,1 и 0. Согласно (Пайтген & Рихтер, 1993) траектории этих точек взаимодополняющие, и достаточно исследовать траектории точек $\pm\sqrt{1,1}$, что равносильно исследованию траектории точки 0 ибо $R_{-0,1}^{(1)}(\pm\sqrt{1,1}) = 0$. Итак, мы имеем:

$$R_{-0,1}^{(1)}(\pm\sqrt{1,1}) = 0;$$

$$R_{-0,1}^{(2)}(\pm\sqrt{1,1}) = \left(\frac{1,1}{2,1} \right)^2 \approx (0,5238)^2 \approx 0,27;$$

$$R_{-0,1}^{(3)}(\pm\sqrt{1,1}) = \left(\frac{0,0729 - 1,1}{0,54 - 2,1} \right)^2 = \left(\frac{1,0271}{1,56} \right)^2 \approx (0,6584)^2 \approx 0,43;$$

$$R_{-0,1}^{(4)}(\pm\sqrt{1,1}) = \left(\frac{0,1849 - 1,1}{0,86 - 2,1} \right)^2 = \left(\frac{0,9151}{1,24} \right)^2 \approx (0,738)^2 \approx 0,54;$$

$$R_{-0,1}^{(5)}(\pm\sqrt{1,1}) = \left(\frac{0,2916 - 1,1}{1,08 - 2,1} \right)^2 = \left(\frac{0,8084}{1,02} \right)^2 \approx (0,7925)^2 \approx 0,63;$$

$$R_{-0,1}^{(6)}(\pm\sqrt{1,1}) = \left(\frac{0,3969 - 1,1}{1,26 - 2,1} \right)^2 = \left(\frac{0,7031}{0,84} \right)^2 \approx (0,837)^2 \approx 0,7.$$

Поскольку $(R_q(x))' = \frac{4(x^2 - 1,1)(x^2 - 2,1x + 1,1)}{(2x - 2,1)^3}$, то при $x \in (0;1)$ $(R_q(x))' > 0$ и $R_q(1) = 1$, то замечаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_q^{(n)}(\pm\sqrt{1,1})) = 1$.

Согласно (Пайтген & Рихтер, 1993) в данном случае не может быть дополнительных аттракторов, что иллюстрирует **Рис.1**. То есть аттракторами являются только точки 1 и ∞ .



Рис. 1 Сингулярности Янга-Ли – множество Жюлиа преобразования перенормировки для $q = -0,1$

Были разработаны алгоритмы выявления сингулярности Янга-Ли – множество Жюлиа преобразования перенормировки отображений $R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2$ для $q = -0,1$, с помощью языка программирования Pascal. Представим фрагмент программного кода, реализующего данный алгоритм:

```
[0] begin
[1]   k1:=k1+1;
[2]   Power(z,2,z1);
[3]   z1.re:=z1.re-1.1;
[4]   z2.re:=2*z.re-2,1;
[5]   z2.im:=2*z.im;
[6]   Chastnoe(z1,z2,z3);
[7]   Power(z3,2,z);
[8]   if (sqrt(sqr(z.re-0.975)+sqr(z.im-0.449))<tt)
[9]     or (sqrt(sqr(z.re-0.975)+sqr(z.im+0.449))<tt)
[10]    or (sqrt(sqr(z.re-1)+sqr(z.im))<tt)
[11]    or (sqrt(sqr(z.re-1.049)+sqr(z.im))<tt) then
[12]     Putpixel(Nx,Ny,0)
[13]   else Putpixel(Nx,Ny,15);
[14] end;
```

Опишем кратко представленный фрагмент программы:

[1] счётчик количества итераций

[2] функция возведения в степень комплексного числа, т.е. z^2

[3] вычисление действительной части числителя, т.е. $z^2-1,1$ (мнимая часть не изменится)

[4] вычисление действительной части знаменателя, т.е. $2z-2,1$

[5] вычисление мнимой части знаменателя, т.е. $2z$

[6] функция нахождения частного двух комплексных чисел, т.е. $\frac{z^2-1,1}{2z-2,1}$

[7] функция возведения в степень комплексного числа, т.е. $\left(\frac{z^2-1,1}{2z-2,1}\right)^2$

[8-11] условия для неподвижных точек $x_1=0,975+0,449i$, $x_2=0,975-0,449i$, $x_3=1$, $x_4=1,049$

[12] Закрашиваем в чёрный цвет все точки, которые удовлетворяют условиям

[13] Иначе закрашиваем в белый цвет

Укажем применение идей фрактальной геометрии в других разделах физики.

Мандельброт отмечает: «Метод фрактальной геометрии стал частью математического инструментария гидроаэродинамики, гидрологии и метеорологии. Его эффективность объясняется уникальной способностью выражать большое количество запутанных, неупорядоченных данных несколькими простыми формулами. Эта способность особенно ярко проявляется в случае мультифрактальности – фундаментального понятия при изучении турбулентности и полезного инструмента на финансовых рынках. Поэтому я и другие ученые на протяжении последних нескольких десятилетий использовали понятия фрактальной геометрии для изучения и создания моделей рынков. Несмотря на сорок лет исследований, работа продолжается. Она не только не закончена – она едва началась».

Фракталы с большой точностью описывают многие физические явления и образования реального мира: горы, облака, корни, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды, что далеко не соответствует простым геометрическим фигурам. Фракталы находят всё большее применение в науке. Броуновское движение – это, например, случайное и хаотическое движение частичек пыли, взвешенных в воде. Этот тип движения, возможно, является аспектом фрактальной геометрии, имеющий наибольшее практическое использование. Случайное броуновское движение имеет частотную характеристику, которая может быть использована для предсказания явлений, включающих большие количества данных и статистики.

В настоящий момент фрактальные структуры воспроизводятся с помощью некоторых агрегационных явлений (осаждение, фильтрация, электролиз, и агрегация коллоидов, аэрозоли, пыли, сажи). Фрактальные кластеры (агрегаты)

образуются в растворе при образовании геля, т.е. кластера, состоящего из соединенных частиц-золей; при образовании подобных систем в дымах и туманах; при релаксации металлического пара; при образовании пленок на поверхности в процессе напыления их из струи, содержащей аэрозоли; при образовании кластеров из частиц, находящихся в суспензиях и коллоидных растворах. Возникает новая область естествознания – физика фракталов. Появилась теория фрактальных трещин, модель трения для фрактальных поверхностей, фрактальная механика древесно-полимерных композитов и пр. Физическое определение фрактала следующее: „Фракталы – это геометрические объекты (линии, поверхности, тела), имеющие сильно изрезанную структуру и обладающие свойством самоподобия в ограниченном масштабе“.

Фракталы иначе рассеивают электромагнитное излучение, по-другому колеблются и звучат, иначе проводят электричество, по фракталам иначе происходит диффузия вещества. Поэтому в рамках элективных курсов учащихся 10 – 11 классов, а, следовательно, и студентов в рамках дисциплин по выбору можно познакомиться с элементами фракталов.

В настоящее время назрела насущная необходимость рассматривать современные радиолокационные системы в совокупности с каналом распространения радиоволн и объектами зондирования с точки зрения теории сложных неравновесных систем, открытых для потоков энергии, энтропии и информации. В основе радиофизического применения теории фракталов лежат принципиально новые методы обработки полей и сигналов, которые используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных и эффекты самоподобия. Дробные фрактальные размерности характеризуют не только топологию исследуемых объектов, но и отражают процессы эволюции динамических систем и связаны с их свойствами. По своему содержанию контуры всех природных объектов суть динамические процессы, внезапно застывшие в физических формах и объединяющие в себе устойчивость и хаос.

Идеи фрактальной геометрии применяются в теории турбулентности. В классической книге „Фрактальная геометрия природы» основателя теории фракталов Бенуа Мандельброта, переведенной на многие языки и выдержавшей несколько изданий, говорится: „Кроме того, именно в контексте турбулентности теория каскадов и самоподобия достигла своих прогнозистских триумфов между 1941 и 1948 гг. Главными действующими лицами здесь были Колмогоров, Обухов, Онсагер и Фон Вайцзер, однако традиция связывает достижения этого периода только с именем Колмогорова“. Ученик А. Н. Колмогорова А. М. Яглом дает краткое описание турбулентности: „Турбулентность – явле-

ние, наблюдаемое в громадном большинстве течений жидкости и газов, встречающихся как в природе, так и в технических устройствах или лабораторных установках. Оно заключается в наличии беспорядочных пульсаций (т.е. хаотических изменений в пространстве и во времени) скорости U , давления P и других гидродинамических характеристик рассматриваемых течений, делающих соответствующие гидродинамические поля $U(x,t)$, $P(x,t)$ и др. резко изменчивыми и крайне нерегулярными“. Уриэл Фриш, известный своими работами по фрактальным моделям однородной турбулентности, в книге „Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова“ отмечает, что теория динамических систем не только оказалась полезной в ряде случаев при исследовании турбулентности, но и сама развивалась под влиянием этих исследований.

В статье „Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса“, опубликованной в 1941 году Колмогоров пишет: „С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсации более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости. В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму“.

Таким образом, спектр применения фрактальной геометрии в физике достаточно широк.

Следует отметить, что самоподобие, как и дробная размерность Хаусдорфа, является одной из важных характеристик фрактала. Причем хаотичность отображений наблюдается очень часто на фрактальных множествах.

ЛИТЕРАТУРА

Божокин, С. В. & Паршин, Д.А. (2001). *Фракталы и мультифракталы*. Москва, Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. (128 с.)

Кроновер, Р. М. (2000). *Фракталы и хаос в динамических системах*. Москва: Постмаркет. (пер. с англ. под ред. Т. Э. Крэнкеля, 352 с.)

Мандельброт, Б. (2002). *Фрактальная геометрия природы*. Москва: Ин-т компьютер. исслед. (656 с.)

Морозов, А. Д. (2002). *Введение в теорию фракталов*. Москва, Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. (159 с.)

Пайтген, Х. & Рихтер П. (1993). *Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем*. Москва: Мир. (176 с.)

Секованов, В. С. (2006). *Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии*. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова. (279 с.), (17, 43 п. л.).

Секованов, В. С. (2004). *Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий*. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова. (231 с.), (14, 43 п.л.).

Секованов, В. С. (2005). *Элементы теории фрактальных множеств: учебное пособие с грифом УМО для студентов классических университетов специальности „Прикладная математика и информатика“*. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова. (135 с.), (8,43 п.л.).

Секованов, В. С. (2006). *Элементы теории фрактальных множеств: учебное пособие с грифом УМО для студентов классических университетов специальности „Прикладная математика и информатика“*. (2-е издание, переработанное и дополненное). Кострома: Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова. (157 с.), (9,81 п.л.).

Секованов, В. С. (2010). *Элементы теории фрактальных множеств: учебное пособие с грифом УМО для студентов классических университетов специальности „Прикладная математика и информатика“*. (3-е издание, переработанное и дополненное). Кострома: Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова. (180 с.), (12,5 п.л.).

Секованов, В. С. (2012). *Элементы теории фрактальных множеств: учебное пособие для студентов классических университетов специальности „Прикладная математика и информатика“*. (4-е издание, переработанное и дополненное). Кострома: Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова. (208 с.), (13 п.л.).

Секованов, В. С. (2013). *Элементы теории фрактальных множеств. Учебное пособие*. (5-е издание, переработанное и дополненное). Москва: Книжный дом „ЛИБЕРКОМ“. (248 с., (15,5 п.л.).

Шредер, М. (2001). *Фракталы, хаос, степенные законы (миниатюры из бесконечного рая)*. Москва, Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотичная динамика“. (528 с.)

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.

Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. New York: John Wiley. (367 p.)

FRACTAL METHODS IN PHYSICS

Abstract. This article describes the application of fractal geometry in Physics. A method of study of Julia set of transformation of renormalization $R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2$ for $q = -0,1$ is developed, which coincides with the zero set of Yang-Lee. Applications of ideas of fractal geometry in the theory of turbulence and other areas of physics are specified.

✉ **Prof. Valerii Sekovanov, DSc**

Department of Applied Mathematics
and Informatics

Kostromskoj State University

E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

✉ **Elena Seleznjova, Assist. Prof.**

Department of Applied Mathematics
and Informatics

Kostromskoj State University

E-mail: lena_selez@mail.ru

✉ **Dr. Svetlana Shljahtina, Assoc. Prof.**

Department of Physics and Mathematics

Kostromskoj State University

E-mail: svmshlyah@mail.ru