

ЕВРИСТИКА С EXCEL

Пламен Пенев
СОУ „Панайот Волов“

Резюме. В статията се описва методика за решаване на широк кръг от числови уравнения с електронна таблица. Чрез разширяване на експерименталната област на независимата променлива се провежда последователен анализ за локализиране и намиране на корен. В случаите, когато табличният метод се оказва недостатъчен, се добавят макроси, автоматизиращи изчисленията. Водеща роля се отнежда на графичния материал.

Keywords: problem solving, equation, numbers, tables, macros

1. Увод

В условията на повсеместна електронизация на обучението евристичните методи намират все по-широко приложение. В математическите списания постоянно излизат материали, посветени на тази тема. В тях като правило се изтъкват предимствата на динамичната геометрична среда. Отбелязва се силният евристичен ефект, получен от онагледяването на идеите в математиката. За средното училище се препоръчват компютърни системи Geonext, GeoGebra, Graph. В същото време, сравнително по-рядко се споменават опасностите, които крият тези нови технологии. Например в статията на Рангелова от 2013, след като се посочват някои песимистични резултати, в заключителната част се казва: „Трябва много да внимаваме какво преоткриват подопечните ни „изследователи“. За целите на настоящата статия ще добавим – и как го преоткриват.

Без съмнение, многото математически преобразувания демотивират, пречат на разбирането на математическите принципи, но не по-малко вредно е и бързото и лесно получаване на готов резултат. Стара истина е, че се цени и запомня това, което е постигнато с труд. В паметта остава не голият резултат, а изминатият път заедно с преодолените препятствия. В този ред на мисли следва по-критично да се отнесем към използването на специализираните математически приложения. Виждаме опасност от поява на странични ефекти, измествачи целта на обучението: учениците или се увличат в „спортна надпревара“, или изучават езика на математиката вместо нейното съдържание. В процеса на търсене на решение средният ученик се нуждае от помощ (насоки) и такъв контрол е налице в традиционната математика. Решение-

то на задачата се разделя на управляеми порции (части) и планът се следва стъпка по стъпка. Понеже в училищния курс се решават предимно числови уравнения, ще припомним най-общата схема за намиране на числов корен:

1. Определяне на областта от допустими стойности на неизвестната величина.
2. Опростяване на уравнението.
3. Изчисления с готови формули и елементарни аритметични действия.
4. Проверка.

Първа и четвърта част се поддават сравнително лесно на алгоритмизация. Втората и третата са специфични за всеки тип задачи, но освобождаването от трудоемките операции би се отразило благоприятно на шансовете за развитие на решението. За възможно най-пълна автоматизация на общата схема е необходима изчислителна среда, в която уравнението да може да бъде представено непосредствено. Такава среда съществува и тя е стара колкото микрокомпютъра – първата сериозна програма, която се появи при 8-битовите компютри, беше Електронна таблица (VisiCalc). Достоен неин наследник е Excel.

По въпроса за изчисления и решаване на задачи с Excel е писано много. Авторът счита, че „старият ветеран“ съдържа още резерви. Тук демонстрираме методика за решаване на широк кръг от задачи с използване най-вече на табличните процесор и графопостроител. Във формулите участват елементарни математически функции. Отказваме се от всякакви надстройки, включително и от Solver. Solver е готов „решател“, който отново връща опасенията, изказани в началото. Неговите функции се поемат от ръчно съставени макроси, които имат това предимство, че работят с обикновени дробни. Въвеждането на макроси създава гъвкава аналитична среда. Ключов момент в експерименталната математика е задаване на начало и стъпка на изменение на независимата променлива. Изборът е от значение за вида и точността на намерения корен. В статията се провежда последователен подход, следващ логическата схема за разширяване на понятието число: от естествените числа към ирационалните, чрез добавяне на нови множества до намиране на решение. Методиката не изключва водене на записки в тетрадка. Посредством забраняване и разрешаване на макроси учителят има възможност да контролира активността на учениците. Водеща роля се отрежда на графичния материал. Именно графиката е този ориентир, по който се сверява посоката на търсене и проверка на резултатите.

2. Решаване на числови уравнения

В основата е заложен добре познатият ни табличен метод: уравнението се нормализира спрямо 0, преобразува се във функция и се търси стойността на x , за която функцията се анулира. С прост пример ще демонстрираме основните моменти:

Пример 1. Да се реши уравнението $|x - 2| + |2x - 7| = 3$.

а) Нормализираме уравнението спрямо 0 и обозначаваме лявата страна с y :

$$|x - 2| + |2x - 7| - 3 = 0$$

б) Конкретизираме областта за експериментирание чрез задаване на интервал и стъпка на изменение на x .

Допускане 1: x е естествено число ($x \in \mathbb{N}$)

В колонка А броим за x от 1:

$$A2 \leftarrow 1$$

$$A3 \leftarrow 2$$

$A4 \dots A_n \leftarrow$ Сору от $A2 \dots A3$ (За експерименти с числа е удобно диапазонът на x да не надхвърля един екран. Затова приемаме, че n зависи от възможностите на видеосистемата). Изброяване в колонка може да се получи и чрез разширяване от една клетка при задържан Ctrl.

в) В B2 превеждаме уравнението от математически език на компютърен (Excel) по формулата:

$$B2 \leftarrow =\text{abs}(a2-2) + \text{abs}(2*a2-7) - 3$$

$$B3..B_n \leftarrow \text{Сору от } B2$$

г) В колонка С наблюдаваме знаците на y и прехода през 0.

$$C2 \leftarrow =\text{IF}(B2>0;“++++”; \text{IF}(B2=0;“0”; “-----”))$$

Възможен е и съкратен вариант, който не затруднява учениците: $C2 \leftarrow =\text{IF}(B2>0;“++++”; “-----”)$. При втория случай не се фиксира преходът през нула, но за уточняване на решението е достатъчно да се отбележи смяната на знаците.

$C3 \dots C_{24} \leftarrow$ Сору от $C2$ (увеличеният брой на „+“ и „-“ е за по-добра нагледност).

д) За решение вземаме стойностите на x , които се намират срещу 0 в колонката за y (фиг.1).

Намираме $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

е) Решенията се потвърждават графично. От насочеността на лъчите следва, че броят на корените е изчерпан.

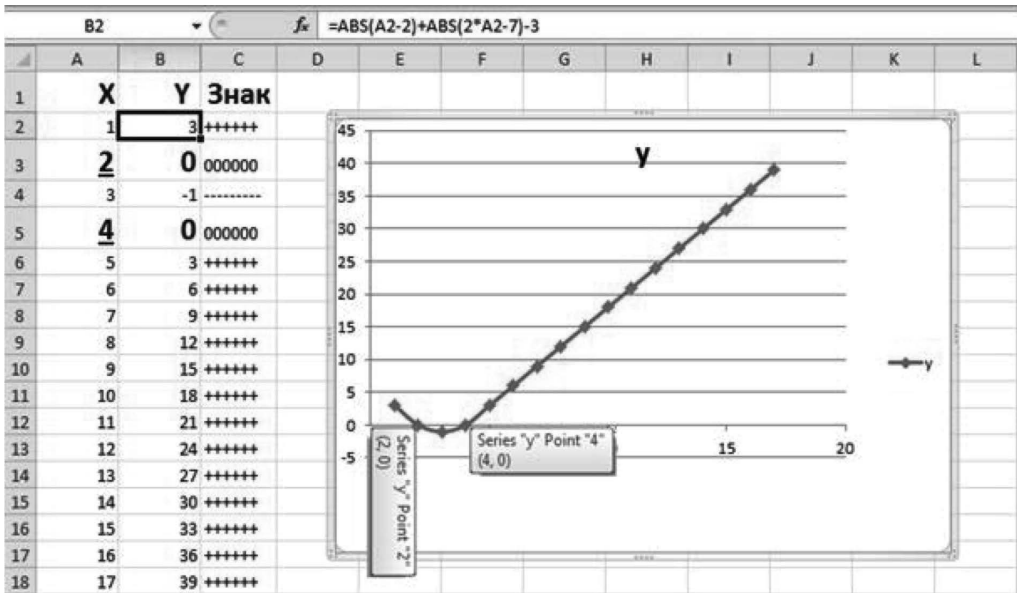
Пример 2. Да се реши уравнението $(x - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$.

Изменения в Excel:

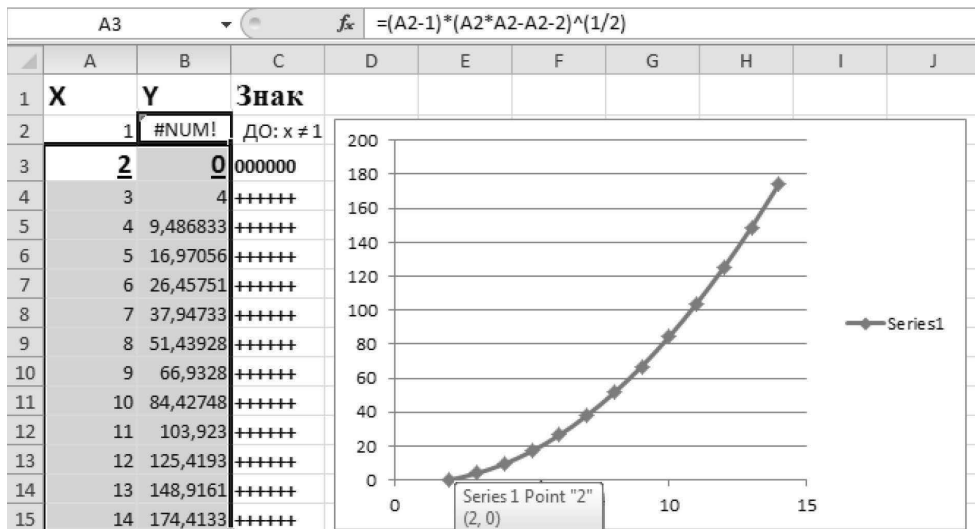
$$B2 \leftarrow =(A2-1)*(A2*A2-A2-2)^(1/2)$$

Намираме $x = 2$.

Начинът, по който е разположена XY графиката (неопределеност вляво), ни подсеща да потърсим решение в областта на отрицателните числа.



Фигура 1.



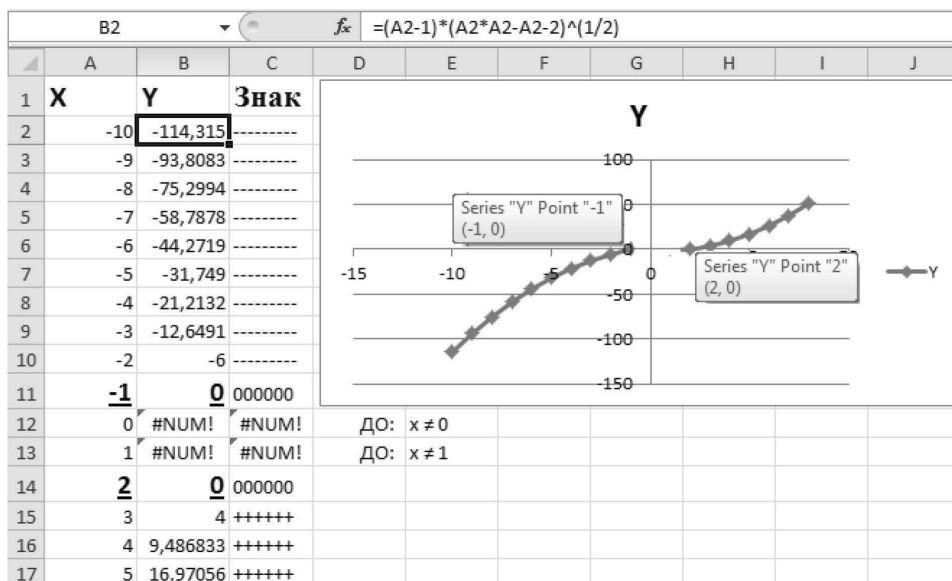
Фигура 2.

Допускане 2: x е цяло число ($x \in \mathbb{Z}$).

$A2 \leftarrow -10$

$A3 \leftarrow -9$

$A4 \dots A_n \leftarrow \text{Сору от } A2..A3$



Фигура 3.

Отговори: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Интервалите на функцията към плюс и минус безкрайност са отворени, откъдето можем да заключим, че няма повече решения. По-долу ще посочим начин за проверка на това твърдение.

Ако XY графиката пресича хоризонталната нулева ос, но в колонката за у липсва 0, търсим решение в множеството на дробните числа.

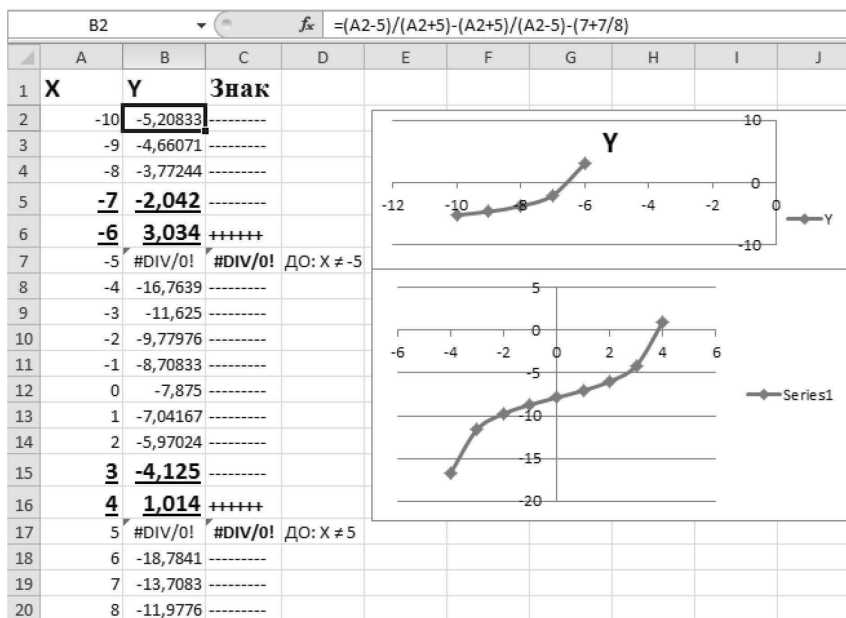
Пример 3. Да се реши уравнението $\frac{x-5}{x+5} - \frac{x+5}{x-5} = 7\frac{7}{8}$.

Нормализация: $\frac{x-5}{x+5} - \frac{x+5}{x-5} - 7\frac{7}{8} = 0$

В Excel:

$B2 \leftarrow (A2-5)/(A2+5)-(A2+5)/(A2-5)-(7+7/8)$

Разбиването на интервалите за стойностите на x около пресечните точки е без перспектива (дробните числа не са броеви). От гледна точка на анализа е важно да се определи дали търсеният корен е рационално число (може да се представи като отношение между две цели числа p и q) или няма такава възможност (коренът е ирационално число).



Фигура 4.

Допускане 3: x е рационално число ($x \in \mathbb{Q}$).

За преодоляване на десетичния запис добавяме макрос Forfor, написан на VBA. Идеята на алгоритъма е следната: колонката за x се замества с променлива клетка A2. Избират се всички възможни комбинации на p ($p \in \mathbb{Z}$) и q ($q \in \mathbb{N}$) в интервала от $-N$ до $+N$ (N се задава ръчно). Отношението на p и q се записва в A2 – операнд за кодираното в B2 уравнение. Табличният процесор автоматично извършва действията. Ако след изпълнение Y се нулира, p/q е решение. Проверява се дали дробта е съкратима чрез деление на числителя и знаменателя на най-големия общ делител, намерен по алгоритъма на Евклид. Ако е първо за таблицата, решението се извежда в списъка на резултатите (колони D и E). В режим на получаване „само на брой корени“ се проверява дали има и други решения. Алгоритъмът е по силите на ученици от десети клас, изучаващи информатика, и може да бъде разглеждан като пример за използване на вложени цикли. Прилагаме съкратен модел на макроса (системен формат на съобщенията, възможни са дублирани решения – несъкратени дроби) (фиг.5).

Пълният програмен код на този и на останалите макроси може да бъде изтеглен от линка:

<http://azbuki.creativesolutions.bg/editions/magazines/maths/contents/macros.zip>

```

Sub forfor()
' ForFor
' Макрос за намиране на рационален корен
' Keyboard Shortcut: Ctrl+r
'

'Ако не е зададен интервал, се приемат граници от -100 до 100
If (Cells(2, kol + 3).Value = " ") Then
Range("g2") = 100
End If
brk = 0 'Броячът за брой корени се занулява
On Error Resume Next
'Границата се запомня в паметова променлива n
n = Range("g2").Value
For p = -n To n
For q = 1 To n
'В клетката операнд (A2) се записва текущото отношение на p и q
pq = p / q
Range("a2") = pq
'Ако е невъзможно изчисление се преминава към ново отношение
If Range("b2") = "#NUM!" Then
GoTo skok:
End If
If Range("b2") = 0 Then 'Текущото отношение е корен
brk = brk + 1
' Възможност за прекратяване на макроса
If MsgBox("p=" & p & " " & "q=" & q, vbOKCancel) = vbCancel Then
Stop
End If
End If
skok: 'x е извън дефиниционната област
Next
Next
MsgBox "Брой корени=" & brk
End Sub

```

Фигура 5.

След стартиране на макроса получаваме:

Clipboard	Font	Alignme	Ctrl + r стартира макрос. Ctrl + t трие работна област.		В G2 се задава интервал за p и q. Подразбира се от -100 до 100.		Styles
A2	В B2 се кодира уравнение нормализирано спрямо нула.		$=(A2-5)/(A2+5)-(A2+5)/((A2-5)/(A2+5)-(A2+5)/A2)$				
Стойности на X:			C	D			
1	X	Y	Знак	q	p	p/q	От -N до N
2	1	-7,041666667	-----	7	-45	-6,428571429	100
3				9	35	3,888888889	
							Бр. корени
							2

Фигура 6.

Отговори: $x_1 = -\frac{45}{7}$ и $x_2 = \frac{35}{9}$.

Работа на интуицията е да подсказва математическо доказателство чрез привеждане към квадратно уравнение.

На базата на Forfor лесно се построява макрос, който открива целочислените корени на система (търси се двойка цели числа в зададен интервал, удовлетворяващи и двете уравнения).

Пример 4: Да се реши системата:

$$\begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{6}{x+y} = 1,6 \\ \frac{x-y}{8} - \frac{x+y}{9} = 1,1 \end{cases}$$

След представяне на системата в Excel и стартиране на макрос Forsis:

C3		fx		=4/(A3-B3)+6/(A3+B3)-1,6			
	A	B	Нормализирано първо уравнение се кодира в C3		Нормализирано второ уравнение се кодира в D3	E	F
1	X	Y					
2	X → A3	Y → B3	Пуск Ctrl + r		Ctrl + t изтрива		
3	Z	3	0		0	=8/(A3-B3)-9/(A3+B3)-1,1	

Фигура 7.

Отговори: $x = 7$; $y = 3$.

И отново интуицията ще помогне за намиране на математическо решение чрез въвеждане на нови неизвестни.

Пример 5: Да се реши уравнението $x^3 + x = 1$.

Нормализация: $x^3 + x - 1 = 0$

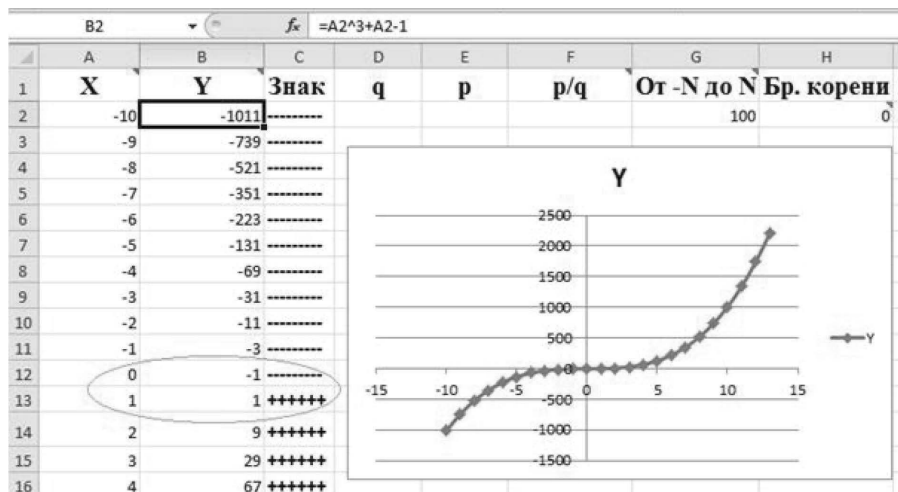
В Excel:

B2 ← = a2^3+a2-1

Смяна на знаците в експерименталната област и безрезултатно изпълнение на Forfor означават, че не съществува p/q , което да удовлетворява уравнението в зададения интервал.

Допускане 4: x е ирационално число ($x \in I$).

В таблицата се забелязва, че уравнението има едно решение и то лежи в областта $[0 ; 1]$. Тук най-простото продължение е раздробяването на интервала за x около смяната на знаците до получаване на задоволителна точност. За експерименти и намиране на по-точно решение предлагаме модел Igra (формули + макрос).



Фигура 8.

Описание на модела:

1. Подбира се двойка цели числа p и q , които в отношение и вместо x приближават максимално функцията до нула. Разнообразни отношения се получават, като примерно за q се вземе някакъв интервал в рамките на един екран, а за p – обратният на q . Началото на интервала и стъпката се задават ръчно от клавиатурата. Посредством „начало на интервал“ се търси непрекъсната област от значения на функцията, в която има смяна на знака, а чрез стъпката се настройва минималното отклонение от нула. Обикновено 2 – 3 опита са достатъчни за получаване на данни за анализ (със стъпки 2, 1 или 0,5).

2. Разглеждат се отношенията, които се намират непосредствено срещу смяната на знаците. Забелязва се, че съответните функционални стойности лежат несиметрично спрямо „условната нула“ (иначе бихме получили точен корен).

3. Ирационалните числа изразяват отношение на несъизмерими величини. Но без загуба на точност е възможно разширяване на по-близката дроб с цел приближено „уеднаквяване на мерните единици“. Операцията не представлява трудност, понеже коефициентът е известен – това е частното от „ограждащите условната нула“ функционални отклонения, взето по абсолютна стойност.

4. „Уеднаквените“ отношения се сумират механично. Очаква се новото частно да даде по-точно приближение.

Ще демонстрираме казаното дотук върху разглеждания пример. Начало на интервал $q = 50$, стъпка 1.

Фигура 9.

q_+	p_+	$(p/q)_+$	q	p	(p/q)
-------	-------	-----------	-----	-----	---------

$$(p_+ + p_-) / (q_+ + q_-) = 103 / 153 \approx 0,6732$$

Коефициент за корекция: $f(p/q)_- / f(p/q)_+ = \text{abs}(-0,0471/0,0045) \approx 11$.

След корекцията:

a' , коригиран	p' , коригиран
------------------	------------------

Отклонението на функцията от „условната нула“ е $9,1133 \cdot 10^{-5}$. Резултатът се

Коэффициент	n/a	$f(y)$
-------------	-------	--------

Естествено е да се очаква, че Игга се справя и с рационални корени. Ето рационален корен $x = \frac{1}{7}$, открит от първи опит в уравнението:

$$\frac{x+3}{4} + \frac{|x-4|}{9} = \frac{1}{2} + \frac{x+5}{36}$$

C2		f6 =(D2*3)/4-A85(D2-4)/9-(0,5-(D2*5)/36)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1	q	p	y	p/q	Стъпка	Знак	Отклонение	Коефициент	Резултати:				
2	-2	54	-10,55555556	-27	2	-----							
16	26	26	0,333333333	1		+++++							
17	28	24	0,277777778	0,857142857		+++++							
18	30	22	0,22962963	0,733333333		+++++							
19	32	20	0,1875	0,625		+++++							
20	34	18	0,150326797	0,529411765		+++++							
21	36	16	0,117283951	0,444444444		+++++							
22	38	14	0,087719298	0,368421053		+++++							
23	40	12	0,061111111	0,3		+++++							
24	42	10	0,037037037	0,238095238		+++++			q	p	Откл. y	Пр. p/q	
25	44	8	0,015151515	0,181818182		+++++				44	8		
26	46	6	-0,004830918	0,130434783	-----		0,00483092	3,13636364		138	18		
27	48	4	-0,023148148	0,083333333	-----					7	1	0 0,1428571	

Фигура 10.

3. Решаване на диофантови уравнения

Пример 6.

Задача на виетнамските селяни. Има сто бивола и сто връзки сено. Всеки прав бивол изяжда пет връзки. Всеки легнал бивол изяжда три връзки. Три стари бивола заедно изяждат една връзка. Колко са правите, легналите и старите биволи?

Нека x , y и z са съответно броят на правите, легналите и старите биволи. Тогава:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + z/3 = 100 \end{cases}$$

След изключване на z получаваме диофантовото уравнение $7x + 4y = 100$. При този тип задачи се търси двойка стойности, които удовлетворяват едно уравнение. На базата на Forfor може да бъде построен макрос, който да автоматизира изчисленията. Разликата е, че при изброяването вместо паметови променливи участват стойности на клетки, които, ако са решения, се оцветяват еднакво.

Стойности на X: Ctrl + r стартира макрос.		Коефициент пред X	Коефициент пред Y	Свободен член	Намерено значение за Y
1	X	7	4	100	Y
2	1	7	4	96	
3	2	14	8	92	
4	3	21	12	88	
5	4	28	16	84	4
6	5	35	20	80	
7	6	42	24	76	
8	7	49	28	72	
9	8	56	32	68	
10	9	63	36	64	
11	10	70	40	60	
12	11	77	44	56	11
13	12	84	48	52	
14	13	91	52	48	
15	14	98	56	44	
16	15	105	60	40	
17	16	112	64	36	
18	17	119	68	32	
19	18	126	72	28	18

Фигура 11.

Получаваме три варианта:

X	Y	Цвят	Z
4	18	кафяв	78
8	11	зелен	81
12	4	червен	84

4. Използване на линията на тренда

Отсъствието на динамична геометрична среда в Excel до голяма степен се компенсира от наличието на механизъм за извеждане на линията на тренда. Това обстоятелство позволява решаване на обратни задачи: от експерименталните данни към аналитичната зависимост.

Пример 7: Да се извършат действията $\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x - 2}$.

В Excel:

A2 ← 0

A3 ← 1

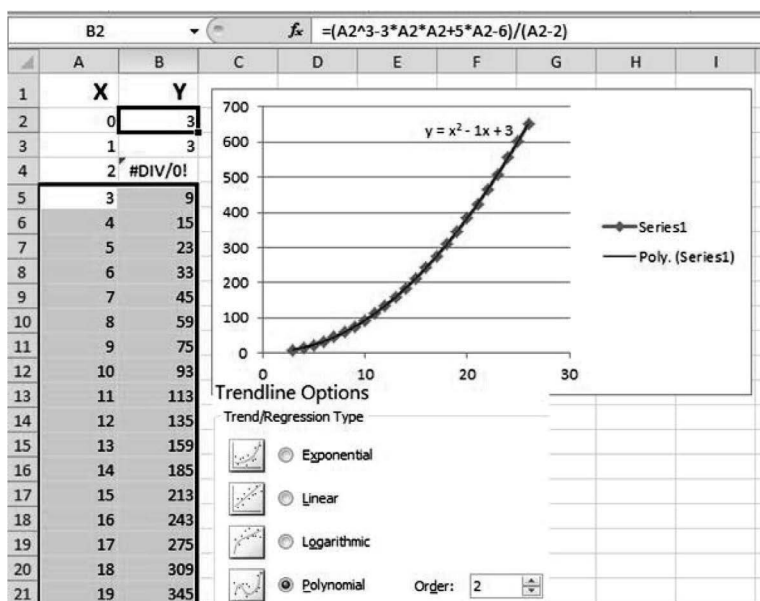
A4..An←Сору от A2..A3

B2 ← =(A2^3-3*A2*A2+5*A2-6)/(A2-2)

B3 ... Bn←Сору от B2

В колонки A и B маркираме непрекъснатата област за x и y.

Построяваме XY графика и изискваме линията на тренда. Избираме модел полином, понеже очакваният резултат е многочлен от втора степен.



Фигура 12.

Display equation on chart извежда равенството $y = x^2 - x + 3$.

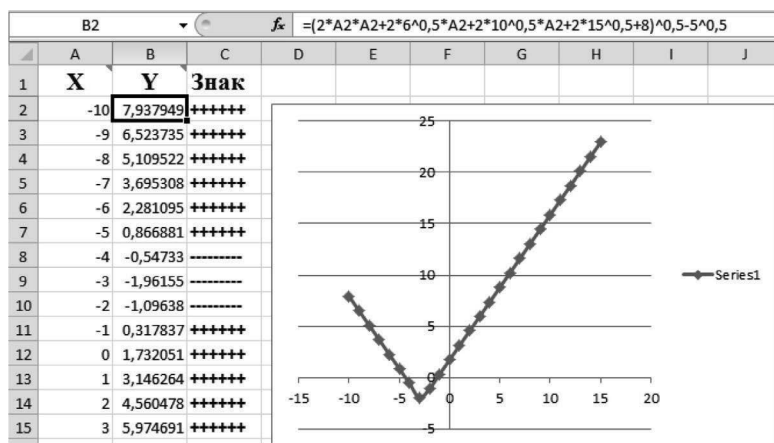
Съответно можем да запишем разлагането:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(x^2 - x + 3).$$

Понякога чертежът и линията на тренда дават полезни насоки за съставяне на план за решение и опростяване на уравнението.

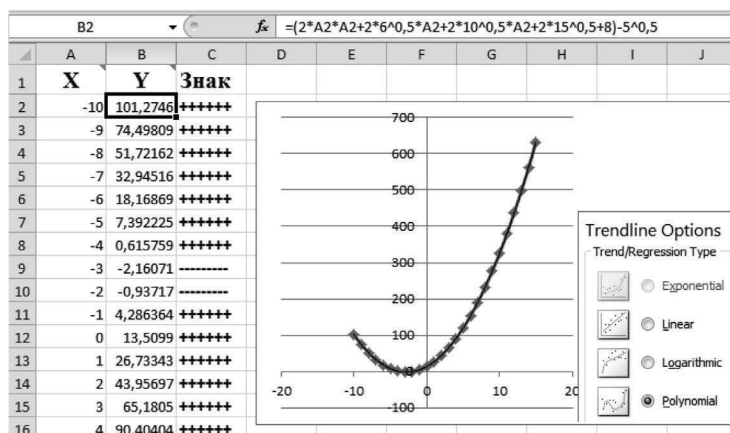
Задача. (П. Рангелова, 2013) (сп. „Математика и информатика“, 56, 4, стр. 344, зад. 2). Да се реши уравнението $\sqrt{2x^2} + 2\sqrt{6x} + 2\sqrt{10x} + 2\sqrt{15} = \sqrt{5}$.

Представяне в Excel:



Фигура 13.

Разглеждайки графиката, стигаме до извода, че е възможно преобразуване на ирационалното уравнение в модулно. Ако в колонката за Y премахнем квадратния корен, получаваме парабола:



Фигура 14.

Съвпадението на параболата с линията на тренда (модел квадратичен полином) е сигурен индикатор, че от подкоренната величина може да се отдели точен квадрат (в случая на тричлен). Корените на уравнението са $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $x_2 = -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{2}$.

5. Методически бележки

Тук разглеждаме компютърната математика като допълнение към традиционната. При такъв подход се разчита не на математическата култура (чието изграждане е крайната цел), а на жизнения опит и здравия смисъл на ученика. Получаването на някакъв резултат е въпрос на престиж. Практически работят всички. Създава се благоприятна среда за добавяне на математическо съдържание.

5.1. Първа учебна ситуация: предварително се обяснява как се решава даден тип задачи, извеждат се формулите и се правят упражнения в тетрадка. Средата на Excel служи за проверка на дефиниционната област и намерените корени. В сравнение с динамичната геометрична среда разликата е, че се бори с математически примитиви и се вижда „разгръщането“ на решението. Сценарият е подходящ за всяко числово уравнение.

5.2. Втора учебна ситуация: задачата изцяло се решава на компютър. Еwentуално, в процеса на търсене на решение се затвърдяват и/или добавят нови знания. Учителят наблюдава и изчаква предложения от страна на учениците. Технологично се изпълняват следните стъпки:

1. Превеждане на функцията от математически език на езика на Excel.
2. Конкретизиране на експерименталната област на независимата променлива по схема: начално значение – стъпка – чертеж – начално значение (проба – грешка).
3. Анализ на стойностите на x , за които е недопустимо изчисление (изводи за дефиниционната област на x).
4. Определяне на вида на търсения корен.
5. Намиране на корен и проверка за брой корени.
6. Анализ на графичния материал. Графично потвърждаване на намерените корени. При определени обстоятелства, откриване на пътища и насоки за математическо доказателство.

6. Заключение

Подбрали сме удобни за демонстрация задачи. Реалната практика е много по-сложна. Но платформата на „добрия, стар“ Excel е „винаги готова“ да поеме предизвикателствата на експерименталния подход. Нещо повече – с прости средства могат да бъдат разглеждани и елементи от висшата математика (производна, сходимост на редици, диференциални уравнения). Заслужава внимание дори идеята да се предложи „кандидатурата“ на Excel за програма, осигуряваща олимпиадите по компютърна математика за ученици. Едва ли има по-добра класическа среда, изравняваща шансовете на всички участници. Този избор би спомогнал и за издигането на състезанията в ранг на международни.

БЕЛЕЖКИ

1. Баптист П., Милер К, Рааб Д.(ред.) www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-v.er4.pdf
Към нов подход в математическото образование.
2. Илиев М., Николова Я., Димитрова Е. www.tu-plovdiv.bg/content/files/VOL13.11_794.pdf.
Опит в използването на Excel в обучението по математика във ВУЗ.

ЛИТЕРАТУРА

- Бизова-Лалева В. (2012). Параметри, таблици и динамични графики. *Математика и информатика*, 55, 6, 549 – 561.
- Гроздев, С. & Деков Д. (2013). Математика с компютър. *Математика и информатика*, 56, 2, 123 – 132.
- Гроздев, С. & Лазаров Б.. (2013). Експерименталната математика в училище. *Математика и информатика*, 56, 2, 105 – 112.
- Гроздев, С. & Деков Д. (2013). Екстремални задачи в средното училище с помощта на компютърни таблици. *Математика и информатика*, 56, 4, 351 – 367.
- Желев, Ж. (2012). Компютърните евристики и възможностите им за използване в олимпиадната математика. *Математика и информатика*, 55, 4, 339 – 347.
- Рангелова, П. (2013). Свеждане на ирационални и трансцендентни уравнения и системи до модулни. *Математика и информатика*, 56, 4, 343 – 350.
- Столяр, А. (1974). *Педагогика математики. Курс лекций*. Минск: Вышэйшая школа.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

HEURISTICS BY EXCEL

Abstract. The paper considers methodology for a large scale mathematical problem solving by Electronic Table. A consecutive analysis is produced for localization and argumentation of the solutions by augmenting the experimentation domain. When the table method is insufficient some macros are added, which makes computing automatic. The leading role is prescribed for graphical material.

✉ **Mr. Plamen Penev**
Teacher in Informatics
„Panayot Volov“ School
100, Soedinenie Street
9700 Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg