

ЕЛИПТИЧЕН АРБЕЛОС

Пролет Лазарова

Резюме. В статията се разглежда фигурата елиптичен арбелос – елипса и две допиращи я окръжности с центрове във фокусите ѝ. Разгледани са три типа елиптичен арбелос – тангенциален, пресекателен и непресекателен. Доказани са някои основни резултати, дадени са примери за конфигурации тип Сангаку. Изследвана е конструкция от допирателни и перпендикуляри към тях и връзката с типовете елиптичен арбелос. Въведено е понятието Архимедови окръжности в елиптичния арбелос и е описан алгоритъм за построяването им със система за динамична геометрия. Формулирани са отворени въпроси.

Keywords: elliptic arbelos, Sangaku, Archimedes' circles

Увод

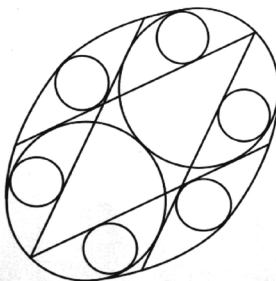
Традиционната японска математика Васан впечатлява с изящество и оригиналност, което е провокирало трайния интерес към нея по света и в частност у нас. На страниците на списание *Математика и информатика* години наред проф. Йордан Табов предлага на вниманието на читателите автентични задачи сангаку в рубриката *Задача на броя*. В рамките на една по-обща програма, а именно изготвяне на динамични конструкции на конфигурации сангаку, решихме да разгледаме конфигурацията от фигура 1.

ВДУХА НА „САНГАКУ“

Уважаеми читатели,

Новото предизвикателство, което ви предлагаме, е конкурс за съставяне на задачи. В няколко последователни броя на корицата ще публикуваме автентични произведения на средновековното японско изкуство – чертежи „САНГАКУ“, украсявали стените на някой древен храм. Вас ще помолим да превърнете тези чертежи в математически задачи.

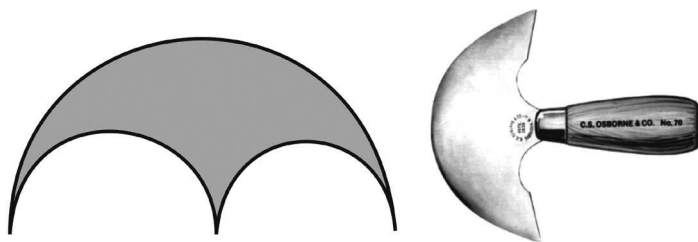
Пишете ни! Най-интересните задачи и други материали ще намерят място на страниците на списанието!



Фиг. 1 Задача на броя (МИ, 2005).

Предизвикателството се състоеше в съставянето на задача по дадения чертеж. При това не са посочени връзки между отделните елементи на конструкцията. Макар чертежът да дава представа за повечето такива връзки, за най-съществена – между елипсата и двете външно допиращи се окръжности – не е казано нищо. Ясно е само, че тези окръжности допират елипсата вътрешно във върховете ѝ.

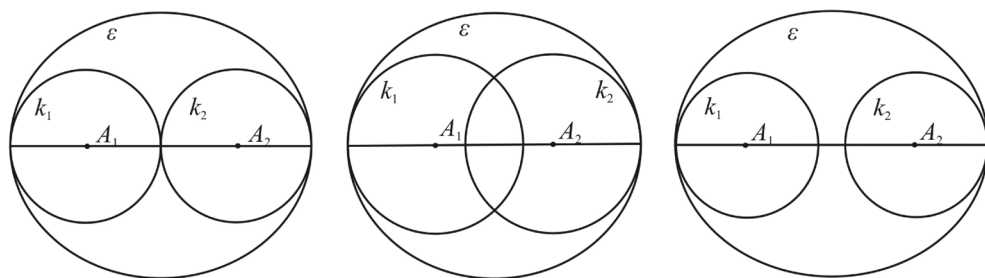
Фигурата, съставена от елипса и две вътрешно допиращи я окръжности, които взаимно се допират външно, наподобява геометричен арбелос (Архимед, III в. пр. н. е.). Елипсата в конструкцията сангаку поема ролята на външната дъга на геометричния арбелос. Нещо повече, както се вижда на фигура 2 (снимката е от <http://www.math.tamu.edu/~harold.boas/preprints/arbелos.pdf>, активна ноември, 2011), физическият арбелос има външна дъга, която е по-скоро дъга от елипса, отколкото от окръжност. Проучването в достъпните ни източници установи, че подобна фигура не е изучавана самостоятелно. Това ни даде основание да въведем понятието *елиптичен арбелос*, за който ще стане дума в настоящата статия.



Фиг. 2 Геометричният арбелос и инструментът арбелос

1. Определение и основни параметри на елиптичен арбелос

Нека са дадени две окръжности $k_{1,2}(A_{1,2}; R)$. Означаваме $c = A_1A_2/2$. Окръжностите еднозначно определят елипса ε с фокуси A_1A_2 и голяма полуос $a = c + R$.



Фиг. 3 Тангенциален, пресекателен и непресекателен елиптичен арбелос

Фигурата, състояща се от k_1 , k_2 и ε , ще наричаме **елиптичен арбелос**. По аналогия с (Гроздев & Ватанабе, 2011) елиптичния арбелос ще определяме като:

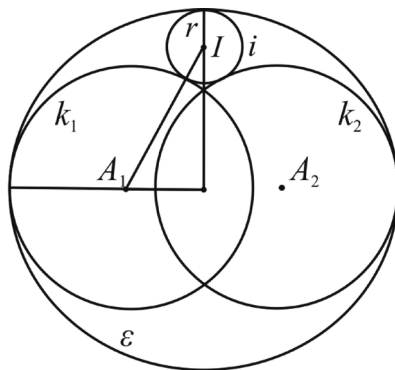
- тангенциален при $R = cR = c$;
- пресекателен при $R > cR > c$;
- непресекателен при $R < cR < c$ (фиг. 3).

Окръжностите k_1 и k_2 ще наричаме **пораждащи окръжности** на елиптичния арбелос.

Теорема 1. Елипсата ε в елиптичния арбелос има малка полуос $b = \sqrt{R^2 + 2cR}$. (за тангенциален елиптичен арбелос $b = \sqrt{3}R$).

Доказателство. Във формулата $a^2 = b^2 + c^2$ заместваем $a = c + R$ и изразяваме $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(R + c)^2 - c^2} = \sqrt{R^2 + 2cR}$.

Теорема 2. Окръжността i , която се допира външно до k_1 и k_2 , както и вътрешно до ε (фигура 4), има радиус $r = \frac{c^2 + 2cR}{2R + 2\sqrt{2cR + R^2}}$. (за тангенциален елиптичен арбелос $r = 3(\sqrt{3} - 1)R/4$).



Фиг. 4 Вписана окръжност в елиптичен арбелос

Доказателство. При означенията на фигура 4 имаме $A_1I = R + r$, $OI = b - r$. От Питагорова теорема за $\triangle A_1OI$, отчитайки теорема 1, последователно получаваме

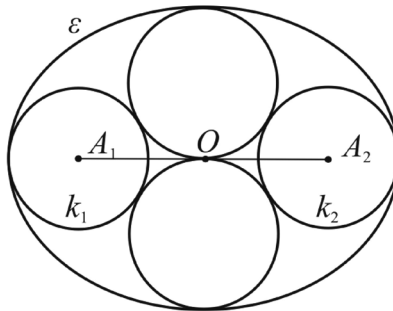
$$A_1I^2 = A_1O^2 + OI^2 \Rightarrow (R + r)^2 = c^2 + (\sqrt{R^2 + 2cR} - r)^2$$

Решаваме горното уравнение относно r и получаваме:

$$r = \frac{c^2 + 2cR}{2R + 2\sqrt{2cR + R^2}}.$$

Окръжността i от теорема 2 ще наричаме **вписана окръжност** в елиптичния арбелос. Следват три примера, описващи конкретни конфигурации в духа на Сангаку.

Пример 1. Ще намерим R за елиптичен арбелос, на който $c = 1$, и вписаните окръжности взаимно се допират (фиг. 5).



Фиг. 5 Елиптичен арбелос с взаимно допиращи се вписани окръжности

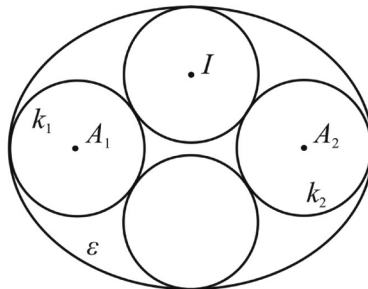
Решение: Поради симетрията относно A_1A_2 двете вписани окръжности се допират помежду си точно когато се допират до правата A_1A_2 .

Конфигурацията се реализира точно когато диаметърът на вписаната окръжност i е равен на малката полуос на елипсата ε . Съгласно теорема 1 и 2 при $c = 1$ за R получаваме уравнението

$$2 \cdot \frac{1 + 2R}{2R + 2 \sqrt{2R + R^2}} = \sqrt{R^2 + 2R}.$$

След съкращаване на 2 отляво решаваме горното уравнение с пакета МАТНЕМАТИСА (за изчертаването приемаме приближението $R \approx 0,56$).

Пример 2. Ще намерим R на елиптичен арбелос с $c = 1$, за който вписаните и пораждащите окръжности са еднакви (фиг. 6).



Фиг. 6 Елиптичен арбелос с еднакви пораждащи и вписани окръжности

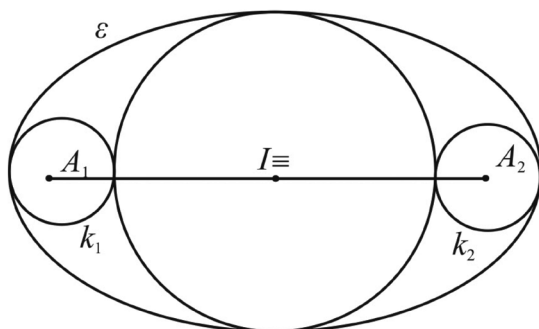
Решение: Позовавайки се на теорема 2, решаваме уравнението $r(R) = R$ при $c = 1$ с пакета MATHEMATICA:

$$R = \frac{1 + 2R}{2R + 2\sqrt{2R + R^2}}$$

$$R = \frac{1}{48} (3456 - 384\sqrt{33})^{1/3} + \frac{(9 + \sqrt{33})^{1/3}}{2 \cdot 6^{2/3}}$$

Тази конфигурация се реализира в непресекателен елиптичен арбелос.

Пример 3. Ще намерим R на елиптичен арбелос с $c = 1$, вписаната окръжност на който има център върху A_1A_2 (фиг. 7).



Фиг. 7 Елиптичен арбелос, чиято вписана окръжност има център върху A_1A_2

Решение: Конфигурацията се реализира точно когато радиусът на вписаната окръжност i е равен на малката полуос на елипсата ε . Съгласно теорема 1 и 2 при $c = 1$, за R получаваме уравнението

$$\frac{1 + 2R}{2R + 2\sqrt{2R + R^2}} = \sqrt{R^2 + 2R}$$

Решаваме горното уравнение с пакета MATHEMATICA и получаваме $R = 1/4$.

Трябва да отбележим, че коректното прилагане на теорема 2 в този случай изисква внимание, тъй като ΔA_1OI от доказателството на теорема 2 се изразява в отсечка.

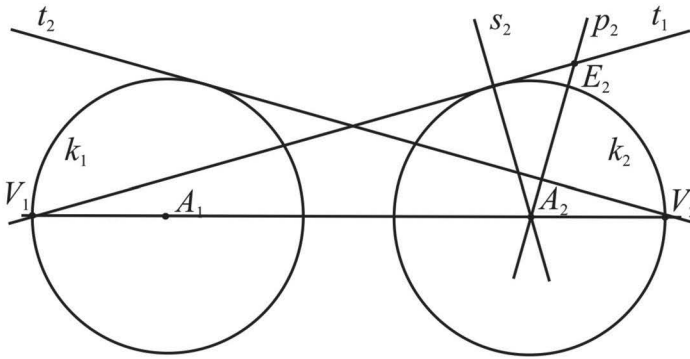
2. Помощна конструкция

Конфигурацията на фигура 1 ни насочи към разглеждането на следната помощна конструкция.

Дадени са две точки $A_{1,2}$ и отсечка R . Нека $c = \frac{A_1A_2}{2}$. Построяват се окръжностите $k_1(A_1; R)$ и $k_2(A_2; R)$. Нека $V_{1,2}$ са онези пресечни точки на правата A_1A_2 съответно с

$k_{1,2}$, за които A_1 и A_2 са от отсечката $V_1 V_2$. Нека $t_{1,2}$ са допирателните през $V_{1,2}$ към $k_{2,1}$, които се допират до съответните окръжности в една полуравнина относно $A_1 A_2$. Нека p_2 е перпендикулярът през A_2 към t_2 и s_2 е перпендикулярът през A_2 към t_1 . Нека накрая $E_2 = p_2 \cap t_1$ (фиг. 8).

Ще се ограничим със случая E_2 да е в полуравнината с контур $A_1 A_2$, в която са допирните точки на $t_{1,2}$ съответно с $k_{2,1}$.



Фиг. 8 Помощна конструкция

По-нататък ще работим в Декартова координатна система, за която $A_{1,2} = (\mp c, 0)$, като приемем $c = 1$, което описва общия случай с точност до подобие. Навсякъде ще следваме означенията, въведени в конструкцията.

Лема 1. Уравненията на $t_{1,2}$ са

$$t_1: y = \frac{R}{2\sqrt{1+R}}(x + 1 + R)$$

$$t_2: y = -\frac{R}{2\sqrt{1+R}}(x - 1 - R)$$

Доказателство. Ъгловия коефициент на t_1 намираме от правоъгълния триъгълник с хипотенуза $V_1 A_2 = 2 + R$ и катет R .

Лема 2. Уравненията на p_2 и s_2 са

$$p_2: y = \frac{2\sqrt{1+R}}{R}(x - 1)$$

$$s_2: y = -\frac{2\sqrt{1+R}}{R}(x - 1)$$

Доказателство. От $p_2 \perp t_2$ следва, че ъгловият коефициент на p_2 е

$$-\frac{1}{-\frac{R}{2\sqrt{1+R}}} = \frac{2\sqrt{1+R}}{R}$$

Сега от условието $A_2(1;0) \in p_2$ получаваме

$$y - 0 = -\frac{2\sqrt{1+R}}{R}(x - 1).$$

От $s_2 \perp t_1$ следва, че ъгловият коефициент на s_2 е

$$-\frac{1}{\frac{R}{2\sqrt{1+R}}} = -\frac{2\sqrt{1+R}}{R}.$$

Сега от условието $A_2(1;0) \in s_2$ получаваме

$$y - 0 = -\frac{2\sqrt{1+R}}{R}(x - 1).$$

Лема 3. Координатите на E_2 са

$$\left(\frac{4 + 4R + R^2 + R^3}{4 + 4R - R^2}; \frac{2R^2\sqrt{1+R}(2+R)}{4 + 4R - R^2} \right).$$

Доказателство. Решаваме системата

$$y = \frac{R}{2\sqrt{1+R}}(x + 1 + R)$$

$$y = \frac{2\sqrt{1+R}}{R}(x - 1)$$

и получаваме

$$x = \frac{4 + 4R + R^2 + R^3}{4 + 4R - R^2}$$

$$y = \frac{2R^2\sqrt{1+R}(2+R)}{4 + 4R - R^2}.$$

От изразите за координатите на E_2 става ясно, че E_2 е в разглежданата полуравнина за $R \in 2(1 + \sqrt{2})$. При $R = 2(1 + \sqrt{2})$ правите t_1 и p_2 са успоредни, а за $R > 2(1 + \sqrt{2})$ те се пресичат в противоположната на разглежданата полуравнина спрямо A_1A_2 .

Лема 4. Фокалните радиуси на E_2 са

$$E_2 A_1 = \frac{\sqrt{64 + 128R + 80R^2 + 48R^3 + 36R^4 - 4R^5 + R^6}}{4 + 4R - R^2}$$

$$E_2 A_2 = \frac{R(2 + R)^2}{4 + 4R - R^2}.$$

Доказателство. От лема 3 за $E_2 A_1^2$ извеждаме

$$\frac{64 + 128R + 80R^2 + 48R^3 + 36R^4 - 4R^5 + R^6}{(4 + 4R - R^2)^2}$$

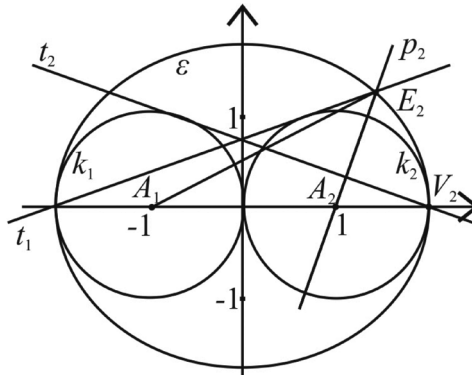
За $E_2 A_2^2$ имаме

$$\frac{R^2(2 + R)^4}{(-4 - 4R + R^2)^2}.$$

3. Връзка на конструкцията с елиптическия арбелос

Теорема 3. За тангенциален елиптичен арбелос точката E_2 лежи на ε (фиг. 9).

Доказателство. За тангенциален елиптичен арбелос $R = \frac{A_1 A_2}{2} = c = 1$. От лема 4 получаваме $E_2 A_1 = \frac{19}{7}$, $E_2 A_2 = \frac{9}{7}$ и $E_2 A_1 + E_2 A_2 = 4 = V_1 V_2$, следователно E_2 лежи на ε .



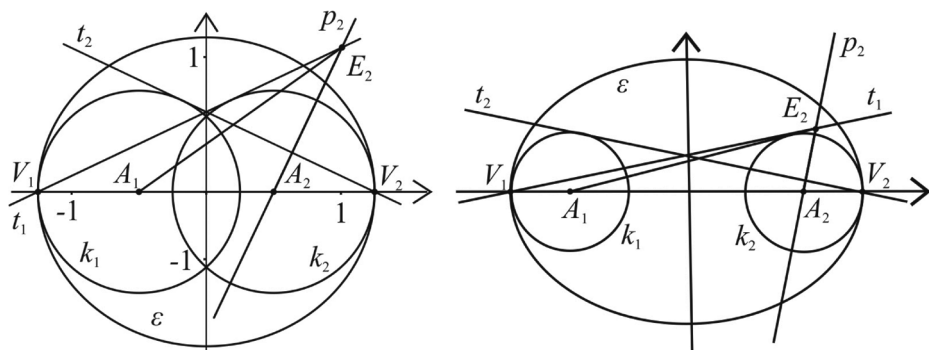
Фиг. 9 Конфигурацията от теорема 3

Теорема 4. За непресекателен елиптичен арбелос E_2 лежи извън ε ; за пресекателен елиптичен арбелос E_2 е извън ε (фиг. 10).

Доказателство. Сравняваме сумата от фокалните радиуси $E_2 A_1 + E_2 A_2$ с голямата ос $2a = 2(1+R)$. Изследваме неравенството $E_2 A_1 + E_2 A_2 < 2(1+R)$ графично, построивайки с пакета МАТНЕМАТИСА двете графики:

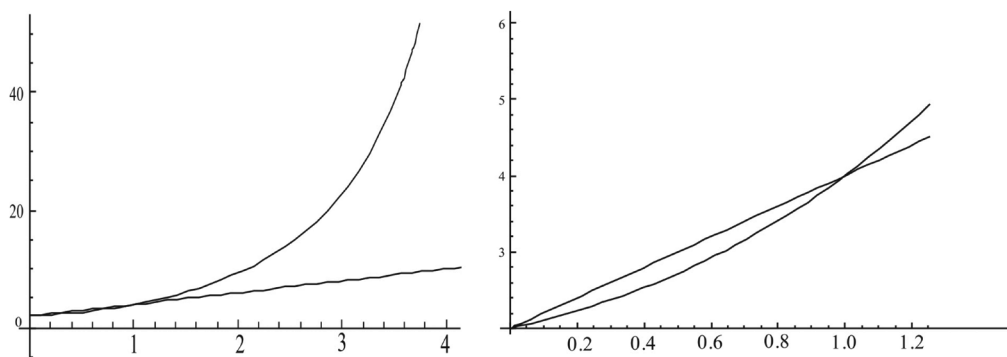
1) на $E_2 A_1 + E_2 A_2$ като функция на R съгласно Лема 4

$$E_2 A_1 + E_2 A_2 = \frac{\sqrt{64 + 128R + 80R^2 + 48R^3 + 36R^4 - 4R^5 + R^6}}{4 + 4R - R^2} + \frac{R(2 + R)^2}{4 + 4R - R^2};$$



Фиг. 10 Конфигурацията от теорема 4

2) на $2(1+R)$ (фиг. 11).



Фиг. 11 Графиките на $E_2 A_1 + E_2 A_2$ и $2(1+R)$

В интервала $(0; 2(1+\sqrt{2}))$ графиките се пресичат при $R = 1$. Дясната фигура показва взаимното положение на графиките в интервала $(0; 1, 2)$.

- За непресекателен елиптичен арбелос $R \in (0; 1)$. В този случай графиката на $E_2 A_1 + E_2 A_2$ е под тази на голямата ос, т.е. $E_2 A_1 + E_2 A_2 < 2(1+R)$ и E_2 е вътрешна точка за ϵ .

- За пресекателен елиптичен арбелос $R \in (1; 2(1+\sqrt{2}))$. В този случай графиката на $E_2 A_1 + E_2 A_2$ е над тази на $2(1+R)$, т.е. $E_2 A_1 + E_2 A_2 > 2(1+R)$ и E_2 е външна точка за елипсата.

Аналитично решение на неравенството ни беше предоставено от проф. Николай Николов. Той преобразува неравенството $E_2 A_1 + E_2 A_2 < 2(1+R)$ в еквивалентното му

$$64 + 128R + 80R^2 + 48R^3 + 36R^4 + 4R^5 + 4R^6 - (2(1+R)(4+4R-R^2) - R(2+R)^2)^2 < 0.$$

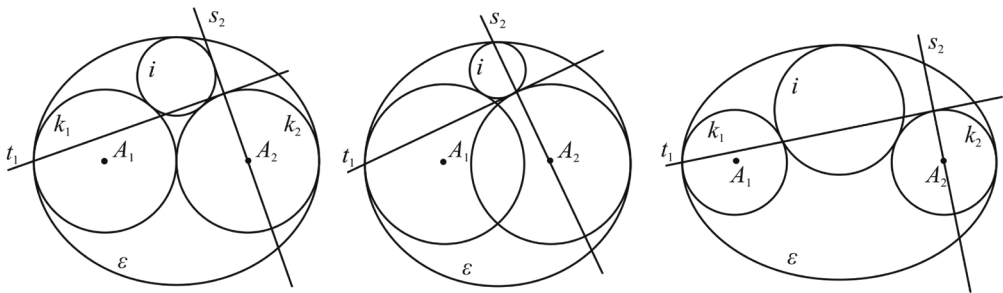
След разлагане на полинома от лявата страна на неравенството той получава
 $-8(-1+R)R(1+R)(2+R)(-4-4R+R^2).$

Прилагайки метода на интервалите, Николай Николов стига до извода, че решението на неравенството в интервала $(0; 2(1+\sqrt{2}))$ съответстват на нашето графично решение.

4. Връзка на конструкцията с вписаната окръжност

Наблюденията, направени на основата на динамични GeoGebra конструкции върху взаимното положение на s_2 и вписаната окръжност, ни подсказват следната

Хипотеза. За тангенциален елиптичен арбелос s_2 допира i ; за пресекателен елиптичен арбелос s_2 пресича i ; за непресекателен елиптичен арбелос s_2 и i нямат общи точки (фиг. 12).



Фиг. 12 Конфигурациите, породили хипотезата

За да потвърдим или отхвърлим хипотезата, първо ще установим следната

Лема 5. Уравнението на i е

$$x^2 + (y - b + r)^2 = r^2$$

Доказателство. Центърът на i е точката с координати $I(0; b - r)$.

Проверка на хипотезата: Тангенциален елиптичен арбелос се получава при

$R = 1$, а тогава според теорема 1 и 2 имаме $b = \sqrt{3}$ и $r = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$. Съгласно лема 2 и 5 трябва да установим, че системата

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3} + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4})^2 = \frac{3(\sqrt{3}-1)^2}{4} \\ y = -2\sqrt{2}(x - 1) \end{cases}$$

има единствено решение. Решавайки системата с пакета MATHEMATICA, се оказва, че тя има две реални решения:

$$x_{1,2} = \frac{1}{18} \left(16 - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \pm \sqrt{2(23 + 6\sqrt{2} - 21\sqrt{3} + 2\sqrt{6})} \right),$$

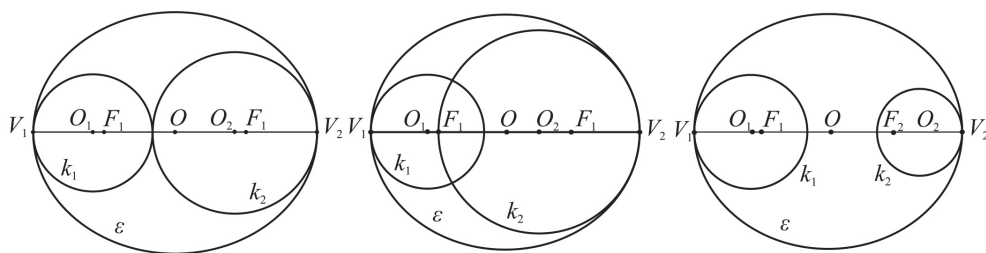
$$y_{1,2} = \frac{2}{9} \left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \mp \sqrt{23 + 6\sqrt{2} - 21\sqrt{3} + 2\sqrt{6}} \right).$$

По този начин хипотезата е отхвърлена в случая тангенциален елиптичен арбелос. От съображения за непрекъснатост може да се заключи, че тя не е в сила и за непресекателен елиптичен арбелос.

5. Обобщен елиптичен арбелос

Определението на елиптичен арбелос визира конфигурация от еднакви окръжности и еднозначно определена елипса с фокуси в центровете им. Това е в духа на обикновения арбелос, където външната дъга е еднозначно определена от двете по-малки дъги. Естествен е въпросът за обобщаване на това определение. За тази цел обаче подходът трябва да се смени.

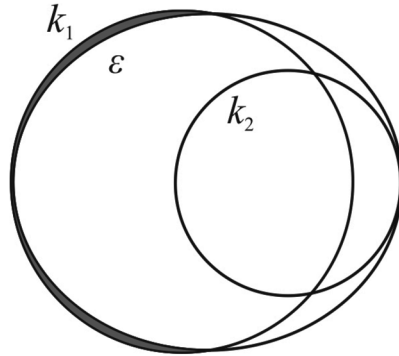
Нека ε е елипса с фокуси $F_{1,2}$ и върхове $V_{1,2}$, F_1 се намира между V_1 и F_2 (V_1V_2 е голямата ос на ε). Нека точките $O_{1,2}$ са от отсечката V_1V_2 ; разглеждаме окръжностите $k_{1,2}(O_{1,2}; R_{1,2})$. С O означаваме средата на F_1F_2 . Нека $\rho = \frac{OV_1^2 - OF_1^2}{OV_1}$. Когато $R_{1,2} \in (0; \rho]$ имаме **обобщен елиптичен арбелос**. Типовете тангенциален, пресекателен и непресекателен се запазват (фиг. 13).



Фиг. 13 Типовете обобщен елиптичен арбелос

Аналогичен е случаят, когато V_1V_2 е малката ос на ε .

Елиптичен арбелос имаме при $R_1 = R_2$ и $O_{1,2} \equiv F_{1,2}$. Случаите, в които някоя от окръжностите е окръжност на кривина за елипсата във върховете V_1V_2 , се явяват гранични ($R_1 = \rho$ или $R_2 = \rho$). Ако $R_1 > \rho$ или $R_2 > \rho$, съответната окръжност пресича елипсата и аналогията с арбелоса се прекъсва, както е показано на фиг. 14.



Фиг. 14 Пораждащата окръжност излиза извън елипсата

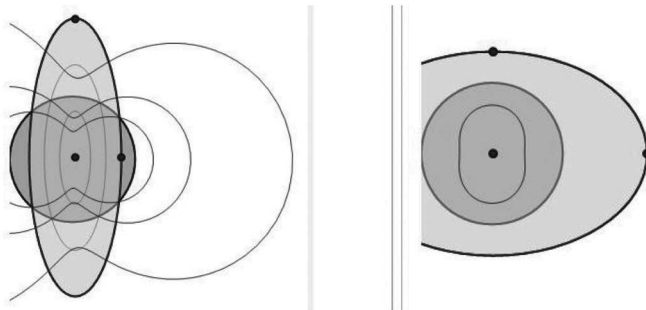
6. Допълнение

Обичайният подход при изследване на (кръгов) арбелос е с инверсия относно окръжност с център допирната точка на вътрешните окръжности. В резултат на това се получават удобни за изследване конфигурации от успоредни прави и окръжности (Прасолов, 1986).

При елиптичния арбелос обаче образът на елипсата при инверсия в общия случай е линия от четвърта степен (Rangel-Mondragon, 2012). Например образът на елипсата на тангенциален елиптичен арбелос при инверсия относно единичната окръжност е кривата с уравнение

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = (x^2 + y^2)^2.$$

На фигура 15 са показани образите на две семейства елипси при инверсия относно окръжност с център върху голямата ос на елипсата (отляво) и център, съвпадащ с центъра на елипсата (отдясно).

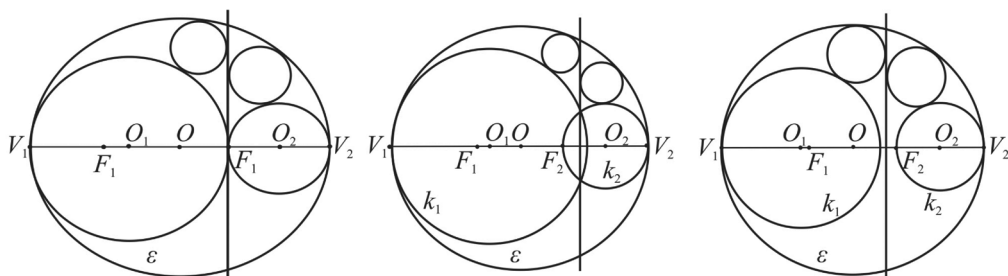


Фиг. 15 Образи на елипси при инверсия (Rangel-Mondragon, 2012)

7. Архимедови окръжности в обобщен елиптичен арбелос

Въпросът за Архимедовите окръжности-близнаци ни беше поставен от проф. Сава Гроздев на Националния кръг на конкурса „Математика и проектиране“ през 2012 г. Следват няколко резултата в тази насока.

По аналогия с (Гроздев&Ватанабе, 2011) построяваме радикалната ос a на пораждащите окръжности в обобщен елиптичен арбелос. Окръжностите, допиращи се до a , ε , k_1 и a , ε , k_2 , наричаме Архимедови. Приблизени пресмятания показват, че за разлика от окръжностите-близнаци в обобщения арбелос Архимедовите окръжности в обобщения елиптичен арбелос не са еднакви (фиг. 16).



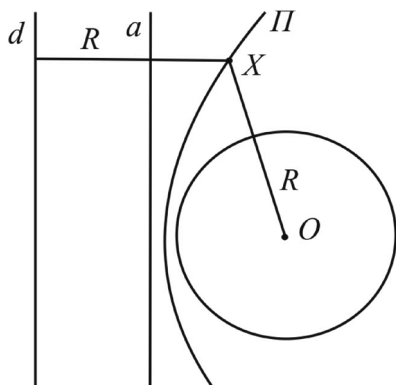
Фиг. 16 Архимедови окръжности в трите типа обобщен елиптичен арбелос.

За построяването им са ни необходими геометричното място на точки, равно отдалечени от пораждащите окръжности и радикалната ос, както и геометричното място на точките, равно отдалечени от радикалната ос и елипсата. Центърът на Архимедова окръжност е измежду общите точки на двете ГМТ, а радиусът може да се определи като разстоянието от центъра до a .

Лема 6. Геометричното място на точки, равно отдалечени от права и окръжност, е парабола.

Доказателство. Нека са дадени правата a и окръжността $k(O; R)$. Разглеждаме правата d , която е успоредна на a и е на разстояние R от нея, както е показано на фигура 17. Означаваме с Π параболата с фокус O и директриса d .

По-нататък със Zz ще означаваме разстоянието от точка Z до фигура z . $Xk = XO - R$, $Xa = Xd - R$. Тогава $X \in \Pi \Leftrightarrow XO = Xd \Leftrightarrow Xk = Xa$.



Фиг. 17 ГМТ, равно отдалечени от права и окръжност

Конструкция на точка, равно отдалечена от a и ε .

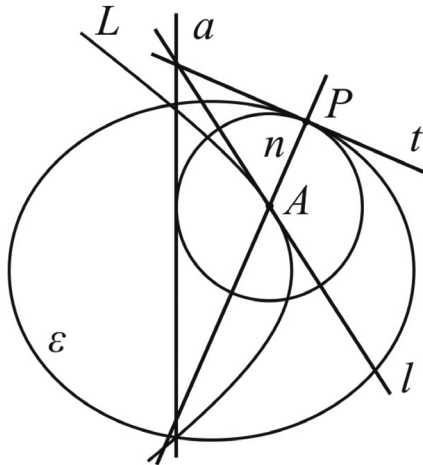
1. Построяваме допирателна t към елипсата през точка $P \in \varepsilon$.
2. Построяваме ъглополовяща l на ъгъла между t и a .
3. Построяваме нормалата n към ε през P и пресечната точка A на n и l .
4. Построяваме окръжност a с център A и радиус AP .

Лема 7. При горните означения, ако единствената обща точка на a и ε е P , то тя е равно отдалечена от a и ε .

Доказателство. $A \in l \Rightarrow Aa = At$, $A \in n \Rightarrow At = AP$. Щом P е единствената обща точка на a и ε , то $A\varepsilon = AP$ и $Aa = A\varepsilon$.

Извод. В условията на лема 7, когато точката P описва дъга от елипсата, точката A описва съответна дъга от L – ГМТ, равно отдалечени от елипсата ε и правата a (фиг. 18).

За построяването на Архимедовите окръжности трябва да се построи окръжност с радиус AP и център пресечната точка на L и Π .



Фиг. 18 ГМТ, равно отдалечени от права и елипса

8. Отворени въпроси

1) Въпросът за допирането на s_2 и i е отворен и се свежда до изследване на знака на дискриминантата

$$-24R^3 - 20R^4 + 52R^5 + 64R^6 + 16R^7 + 16R^4\sqrt{1+R} + 40R^5\sqrt{1+R} + 16R^6\sqrt{1+R} - 32R^3\sqrt{2R+R^2} - 32R^4\sqrt{2R+R^2} + 8R^4\sqrt{(1+R)(2R+R^2)} + 16R^5\sqrt{(1+R)(2R+R^2)}$$

Възможен подход е приложеният в доказателството на теорема 4.

2) Видът на ГМТ L не ни е известен. Следва скицирана идея, която води до параметрично представяне на L . Взимаме произволна точка $P \in \varepsilon$, зададена параметрично от φ : $P(x_p; y_p)$, където $x_p = a \cos \varphi$, $y_p = b \sin \varphi$. Допирателната през P към ε е с уравнение

$$t: \frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y = 1,$$

което записваме във вида

$$t: y = \frac{b^2}{y_p} \left(1 - \frac{x_p}{a^2}x \right) = \frac{b^2}{y_p} - \frac{x_p b^2}{y_p a^2}x.$$

Уравнението на нормалата n през P е

$$n: \frac{y_p a^2}{x_p b^2}(x - x_p) + y_p.$$

За да получим уравнението на ъглополовящата l , ни е необходимо нормалното уравнение на t :

$$t: \frac{\frac{x_p}{a^2}x + \frac{y_p}{b^2}y - 1}{\sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}}} = 0.$$

Нека радикалната ос на пораждащите окръжности е $a:x = q$. Тогава уравнението на l е

$$l: \left(\frac{\frac{x_p}{a^2}}{\sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}}} \pm 1 \right) x + \frac{\frac{y_p}{b^2}}{\sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}}} y - \frac{1}{\sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}}} \mp q = 0.$$

Координатите на центъра $A_2(x_p; y_p)$ на Архимедовата окръжност a_2 са решенията на система от уравненията на l и n

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(a^2 - b^2)x_p}{a^2}, \\ y = \frac{b^2(a^2 - b^2)x_p \sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}} \left(1 - \frac{x_p}{a^2 \sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}}} \right) + \frac{b^2 \left(-1 + q \sqrt{\frac{x_p^2}{a^4} + \frac{y_p^2}{b^4}} \right)}{y_p}}{a^2 y_p} \end{array} \right\}$$

След като заместим x_p и y_p с параметричната им форма, получаваме изразите

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(a^2 - b^2) \cos \varphi}{a}, \\ y = \frac{b}{a} (a^2 - b^2) \cot \varphi \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} \left(1 - \frac{\cos \varphi}{a \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}} \right) + \frac{b \left(-1 + q \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} \right)}{\sin \varphi} \end{array} \right\}$$

Това би трябвало да са параметричните уравнения на търсеното ГМТ L .

Благодарности

Резултатите са получени под ръководството на доц. Борислав Лазаров.

Авторът благодари на проф. Сава Гроздев за съдържателните въпроси и положителното отношение, на г-н Явор Джонев – основател на Сирма Груп Холдинг и председател на Надзорния съвет на Холдинга, за моралната и финансовата подкрепа, оказана при работата по темата, както и на проф. Йордан Табов за оказаното съдействие.

БЕЛЕЖКИ

Rangel-Mondragon, J. (2012). *Inverting an Ellipse*. <http://demonstrations.wolfram.com/InversiveGeometryIIIInvertingAnEllipse> (active in Feb 2012)

ЛИТЕРАТУРА

- Архимед (III в. пр.н.е.). Книга лемм. В *Архимед. Сочинения*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962, 393–395
- Гроздев, С. & М. Ватанабе (2011). *Обобщеният арбелос като примерен инструментариум за развиващо обучение в Япония*. Сборник с доклади на Четиридесета юбилейна пролетна конференция на СМБ, Боровец, 5–9 април 2011 г., 380–386
- МИ (2005). Задачата на броя (редакционна). *Математика и информатика*, vol. XLVIII [4]
- Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии, часть II*. Наука, Москва, 212–214.

ELLIPTIC ARBELOS

Abstract. The article considers an extension of the concept of the Archimedes arbelos. The elliptic arbelos consists of two circles (generating circles) which define an ellipse with foci in their centers. Three types of elliptic arbeloses are considered: tangential, intersecting and non-intersecting. Basic properties of the figure are established and formed as theorems. A Sangaku-type problem in a Bulgarian mathematical journal inspired the author to examine a specific configuration of tangents and perpendicular lines and their relation to the elliptic arbelos. The concept of *generalized elliptic arbelos* and *Archimedes' circles* in the generalized elliptic arbelos are introduced and an algorithm for their construction is designed. Some open questions are stated.

Prolet Lazarova

✉ Student

Faculty of Physics, „St. Kliment Ochridski“ University, Sofia

E-mail: prolet_94@yahoo.com