

ЕДНО ТВЪРДЕНИЕ ЗА КОНКУРЕНТНОСТ НА ПЕДАЛНИ ОКРЪЖНОСТИ НА ТОЧКА В РАВНИНАТА НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Хаим Хаимов

Резюме. В тази публикация се доказва, че педалните окръжности на произволна точка в равнината на четириъгълник относно триъгълниците, определени от страните и диагоналите на последния, се пресичат в една точка. С помощта на това твърдение се дефинира едно изображение в равнината на произволен четириъгълник. Намират се образите на някои забележителни точки в четириъгълника. Описват се връзките на изображението с други трансформации в равнината на четириъгълник.

Keywords: quadrilateral; pedalcircles; transformations; remarkablepoints

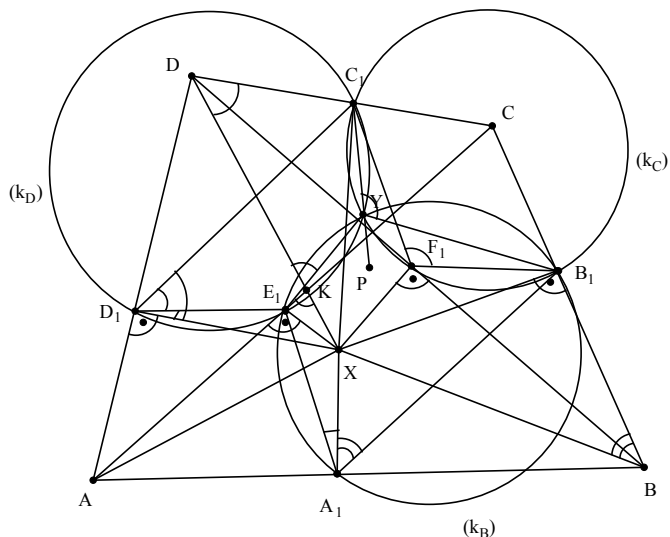
Педална окръжност на точка спрямо триъгълник наричаме окръжността, определена от ортогоналните проекции на точката върху правите, съдържащи страните му (като при това предполагаме, че точката не лежи на описаната около триъгълника окръжност). В случая, когато точката е от описаната около триъгълника окръжност, според теоремата на Симсън ортогоналните ѝ проекции върху правите, съдържащи страните на последния, лежат на една права – права на Симсън. Можем да кажем, че в този случай педалната окръжност на точката относно триъгълника се заменя от педална права – права на Симсън.

Известно е още от началото на XX век, че педалните окръжности (правите на Симсън) на върховете A , B , C и D на произволен четириъгълник $ABCD$ относно триъгълниците съответно BCD , CDA , DAB и ABC от останалите тройки върхове, минават през една точка. Към този геометричен факт тук ще добавим друг, подобен на него. Именно, ще докажем следната:

Теорема 1. Педалните окръжности на произволна точка X в равнината на произволен четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с някои три от върховете му, спрямо триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB , определени от страните и диагоналите на последния, минават през една точка.

Доказателство. Нека за определеност точката X лежи в $\triangle ABC$. При друго разположение на точката X разсъжденията са аналогични. Означаваме ортогоналните проекции на X върху правите AB , BC , CD , DA , AC и BD съответно с A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 и F_1 (фиг.1). Педалната окръжност (k_B) на точката X относно $\triangle ABC$ е определена от точките A_1, B_1 и A_1 , тази относно $\triangle BCD$ (окръжността

(k_c) – съответно от точките B_1 , C_1 и F_1 , а педалната окръжност (k_D) относно $\triangle CDA$ – съответно от точките C_1 , D_1 и E_1 . Означаваме втората обща точка на окръжностите (k_D) и (k_c) с Y . Ще докажем, че $Y \in (k_B)$. Понеже четириъгълниците AA_1XE_1 и BA_1XB_1 са вписани, имаме $\angle E_1A_1X = \angle E_1AX$ и $\angle B_1A_1X = \angle B_1BX$. Оттук получаваме последователно:



Фигура 1

$\angle E_1A_1B_1 = \angle E_1A_1X + \angle B_1A_1X = \angle E_1AX + \angle B_1BX = \angle CAX + \angle CBX = \angle AXB - \angle ACB$, т.е.

$$(1) \quad \angle E_1A_1B_1 = \angle AXB - \angle ACB.$$

Означаваме произволна точка от продължението на отсечката C_1Y с P . Понеже четириъгълникът $E_1YC_1D_1$ е вписан в окръжност, имаме:

$\angle E_1YP = \angle E_1D_1C_1$. Освен това $\angle B_1YC_1 = \angle B_1F_1C_1$ (вписани ъгли). Затова

$\angle E_1YB_1 = \angle E_1YP + \angle B_1YP = \angle E_1D_1C_1 + (180^\circ - \angle B_1YC_1) = \angle E_1D_1C_1 + (180^\circ - \angle B_1F_1C_1)$, т.е.

$$(2) \quad \angle E_1YB_1 = \angle E_1D_1C_1 + 180^\circ - \angle B_1F_1C_1.$$

Означаваме $AC \cap XD = K$. Понеже четириъгълниците AXE_1D_1 и XD_1DC_1 са вписани, имаме $\angle E_1D_1X = \angle E_1AX$ и $\angle C_1D_1X = \angle C_1DX$. Затова

$$\angle E_1D_1C_1 = \angle C_1D_1X - \angle E_1D_1X = \angle C_1DX - \angle E_1AX$$

Като вземем предвид, че $\angle C_1DX = \angle CDK = 180^\circ - \angle KCD - \angle DKC$ и че $\angle E_1AX = \angle KAX = 180^\circ - \angle AXK - \angle AKX$, отгук чрез заместване получаваме $\angle E_1D_1C_1 = \angle C_1DX - \angle E_1AX = (180^\circ - \angle KCD - \angle DKC) - (180^\circ - \angle AXK - \angle AKX) = (\angle AXK - \angle KCD) + (\angle AKX - \angle DKC)$.

Понеже $\angle AKX = \angle DKC$, от последното равенство намираме

$$(3) \quad \angle E_1D_1C_1 = \angle AXK - \angle KCD = \angle AXD - \angle ACD.$$

От друга страна, понеже четириъгълниците B_1F_1XB и C_1F_1XD са вписани, имаме $\angle B_1F_1X = 180^\circ - \angle B_1BX$ и $\angle C_1F_1X = 180^\circ - \angle C_1DX$. Отгук получаваме последователно:

$$\begin{aligned} \angle B_1F_1C_1 &= 360^\circ - \angle B_1F_1X - \angle C_1F_1X = 360^\circ - (180^\circ - \angle B_1BX) - (180^\circ - \angle C_1DX) = \\ &= \angle B_1BX + \angle C_1DX = \angle CBX + \angle CDX. \end{aligned}$$

Но $\angle CBX + \angle CDX = 360^\circ - \angle BXD - \angle BCD$ (от четириъгълника $BXDC$), следователно:

$$(4) \quad \angle B_1F_1C_1 = 360^\circ - \angle BXD - \angle BCD.$$

От (3) и (4) след заместване в (2) получаваме

$$\angle E_1YB_1 = \angle E_1D_1C_1 + 180^\circ - \angle B_1F_1C_1 = (\angle AXD - \angle ACD) + 180^\circ - (360^\circ - \angle BXD - \angle BCD), \text{ т.е.}$$

$$\angle E_1YB_1 = (\angle BCD - \angle ACD) + (\angle AXD + \angle BXD) - 180^\circ = \angle ACB + (360^\circ - \angle AXB) - 180^\circ$$

или

$$\angle E_1YB_1 = \angle ACB - \angle AXB + 180^\circ.$$

От (1) и последното равенство чрез почленно събиране получаваме:

$$\angle E_1A_1B_1 + \angle E_1YB_1 = (\angle AXB - \angle ACB) + (\angle ACB - \angle AXB + 180^\circ) = 180^\circ.$$

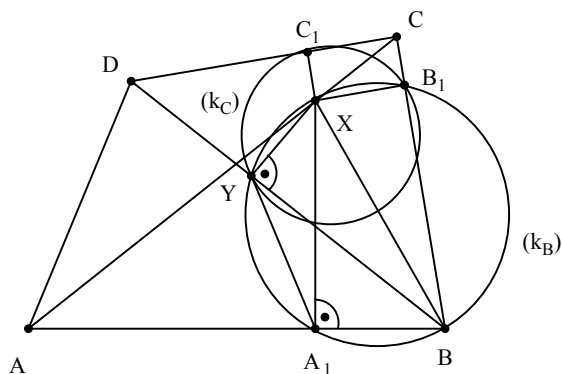
Можем да заключим, че $Y \in (k_B)$. Аналогично се доказва, че $Y \in (k_A)$, с което показваме, че и четирите педални окръжности (k_A) , (k_B) , (k_C) и (k_D) имат обща точка.

Определение 1. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник и X е точка в равнината му, нележаща на една окръжност с някои три от върховете му. Общата точка Y на педалните окръжности на точката X относно триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB ще наричаме педален образ на X спрямо $ABCD$.

Определение 2. Изображението в равнината на произволен четириъгълник $ABCD$, което на произволна точка X , нележаща на една окръжност с някои

три от върховете му, съпоставя педалния образ Y на X спрямо $ABCD$, ще наричаме педалност относно $ABCD$ и ще бележим с $\Pi(X)$.

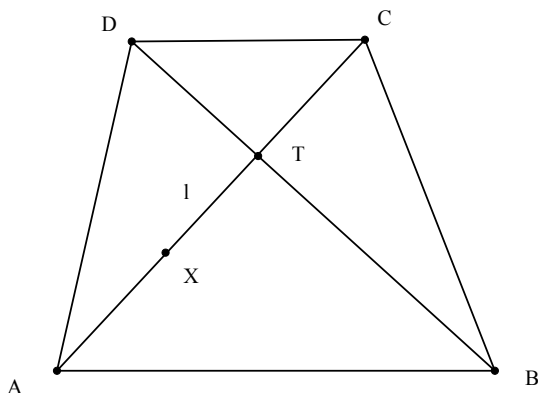
Сега ще определим педалните образи на някои точки в произволен четириъгълник, в това число на някои негови забележителни точки.



Фигура 2

Нека първо X е точка от правата, съдържаща диагонала AC (фиг. 2). Ще докажем, че педалният образ на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ е ортогоналната ѝ проекция Y върху правата, съдържаща другия диагонал BD . Достатъчно е да докажем, че Y е втората обща точка на педалните окръжности (k_C) и (k_B) на точката X спрямо $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$. Точката Y лежи на педалната окръжност (k_C) на X спрямо $\triangle BCD$, защото е ортогонална проекция на X върху страната му BD . Означаваме ортогоналните проекции на точката X върху правите AB и BC съответно с A_1 и B_1 . Понеже четириъгълникът A_1BXU е вписан в окръжност, заключаваме, че точката Y лежи на окръжността, определена от точките A_1 , B и X . Но понеже и четириъгълникът A_1BB_1X е вписан в окръжност, окръжността, определена от точките A_1 , B и X , съвпада с окръжността, определена от точките A_1 , B_1 и X . Следователно точката Y лежи и на окръжността (k_B) , определена от точките A_1 , B_1 и X , т.е. на педалната окръжност на X спрямо $\triangle ABC$. Убедихме се, че $Y \in (k_B) \cap (k_C)$. Следователно точката Y е педалният образ на X относно четириъгълника $ABCD$. Така доказахме следната:

Теорема 2. При педалността $\Pi(X)$ относно произволен четириъгълник $ABCD$ точка, лежаща върху правата, съдържаща единия диагонал, се изобразява в ортогоналната ѝ проекция върху правата, съдържаща другия диагонал.



Фигура 3

Следствие 1. Пресечната точка T на диагоналите на произволен четириъгълник $ABCD$ е двойна за педалността $\Pi(X)$ относно него.

Доказателство. Точката T лежи на диагонала AC (фиг. 3) и следователно по теоремата се изобразява при педалността $\Pi(X)$ в ортогоналната си проекция върху другия диагонал BD . Но понеже точката T лежи и на диагонала BD , тази ортогонална проекция е самата точка T .

Следствие 2. В четириъгълник с перпендикулярни диагонали образ на правите, съдържащи диагоналите при педалността $\Pi(X)$, е тяхната пресечна точка T .

Доказателство. Според теоремата произволна точка от правата l , съдържаща единия диагонал, се изобразява при педалността $\Pi(X)$ в ортогоналната си проекция върху правата, съдържаща другия диагонал. Понеже по условие двете прави са перпендикулярни, тази проекция е пресечната им точка T (фиг. 3). Следователно правата l се изобразява в точката T .

Следствие 3. В четириъгълник, в който диагоналите не са перпендикулярни, образ на правата, съдържаща единия диагонал при педалността $\Pi(X)$, е правата, съдържаща другия диагонал.

Доказателство. Понеже по условие правите, съдържащи диагоналите, не са перпендикулярни, ортогоналните проекции на точките от едната от тях върху другата изцяло запълват втората права. Следователно образ на едната от правите при педалността $\Pi(X)$ е другата права.

По подобен начин се доказва следната:

Теорема 3. При педалността $\Pi(X)$ относно произволен четириъгълник точка, лежаща на правата, съдържаща коя да е от страните, се изобразява в ортогоналната си проекция върху правата, съдържаща срещуположната страна.

Следствие 1. Пресечните точки на правите, съдържащи срещуположните страни на произволен четириъгълник, са двойни за педалността спрямо него.

Следствие 2. Ако в четириъгълник $ABCD$ правите, съдържащи две срещуположни страни, са перпендикулярни, то тези прави се изобразяват при педалността $\Pi(X)$ в пресечната си точка.

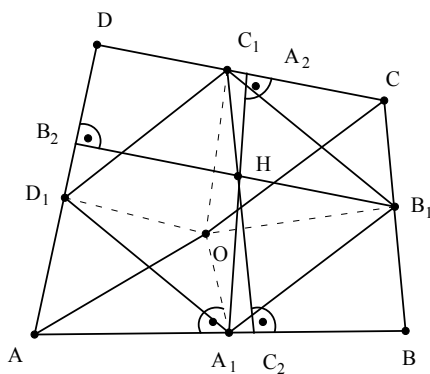
Следствие 3. Ако в четириъгълник $ABCD$ правите, съдържащи две срещуположни страни, не са перпендикулярни, то тези прави се изобразяват една в друга при педалността $\Pi(X)$.

Както ще видим сега, педалните образи на някои забележителни точки в четириъгълник са също забележителни точки. Преди това ще приведем някои необходими за по-нататъшното изложение сведения за две забележителни точки в изпъкнал четириъгълник, наречени псевдоцентър и ортоцентър.

В (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2016) е доказано следното твърдение:

„Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Ако r_{ABC} , r_{BCD} , r_{CDA} и r_{DAB} са радиусите на описаните окръжности съответно около триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB , то съществува единствена точка O в равнината на $ABCD$, за разстоянията от която до върховете на $ABCD$ са изпълнени равенствата (фиг. 4).

$$AO \cdot r_{BCD} = BO \cdot r_{CDA} = CO \cdot r_{DAB} = DO \cdot r_{ABC}$$



Фигура 4

Тази точка O е забележителна със свойствата си и се нарича псевдоцентър на четириъгълника. В (Haimov, 2010) е доказано следното:

Твърдение А. Четириъгълникът $A_1B_1C_1D_1$ с върхове ортогоналните проекции на псевдоцентъра O върху правите, съдържащи страните на произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$, са върхове на успоредник (фиг. 4). Перпен-

дикулярите A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 и D_1D_2 , спуснати от върховете на успоредника $A_1B_1C_1D_1$ към срещуположните страни на четириъгълника $ABCD$, се пресичат в една точка H .

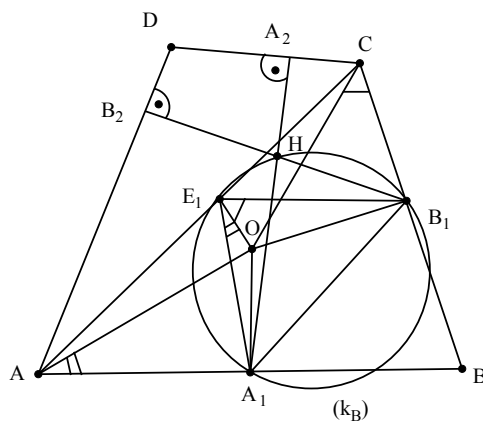
Тази точка H е също забележителна със свойствата си и се нарича ортоцентър на четириъгълника $ABCD$. В (Haimov, 2010) е доказано и следното:

Твърдение Б. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и O е псевдоцентърът му. Изпълнено е равенството $\angle AOC = 180^\circ - |\angle ADC - \angle ABC|$. При това точката O лежи в полуравнината относно правата, съдържаща диагонала AC , в която се намира върхът на по-малкия от ъглите ADC и ABC .

Сега ще докажем, че образ на първата от въпросните две забележителни точки на изпъкнал четириъгълник при педалността $\Pi(X)$ е втората точка.

Теорема 4. Педалният образ на псевдоцентъра O на произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$ е ортоцентърът му H .

Доказателство. За определеност ще считаме, че псевдоцентърът O лежи в $\triangle ABC$ (фиг. 5). При друго разположение на точката O разсъжденията са аналогични. Означаваме ортогоналните проекции на точката O върху правите AB , BC и CA съответно с A_1 , B_1 и A_2 .



Фигура 5

Ортоцентърът H , съгласно цитираното твърдение А, е пресечна точка на перпендикулярите A_1A_2 и B_1B_2 , спуснати от точките A_1 и B_1 съответно към правите CD и AD ($A_2 \in CD$, $B_2 \in AD$). Ще докажем първо, че точката H лежи на педалната окръжност (k_B) на псевдоцентъра O относно $\triangle ABC$. Имаме

$$(5) \quad \angle A_1HB_1 = \angle A_2HB_2 = 180^\circ - \angle ADC$$

Понеже четириъгълниците AA_1OE_1 и CB_1OE_1 са вписани, имаме: $\angle A_1E_1O = \angle A_1AO$ и $\angle B_1E_1O = \angle B_1CO$. Оттук получаваме последователно $\angle A_1E_1B_1 = \angle A_1E_1O + \angle B_1E_1O = \angle A_1AO + \angle B_1CO = \angle BAO + \angle BCO = \angle AOC - \angle ABC$

Същевременно според цитираното твърдение Б имаме:

$$\angle AOC = 180^\circ - \angle ADC + \angle ABC.$$

От последните две равенства следва, че:

$$\angle A_1E_1B_1 = \angle AOC - \angle ABC = 180^\circ - \angle ADC.$$

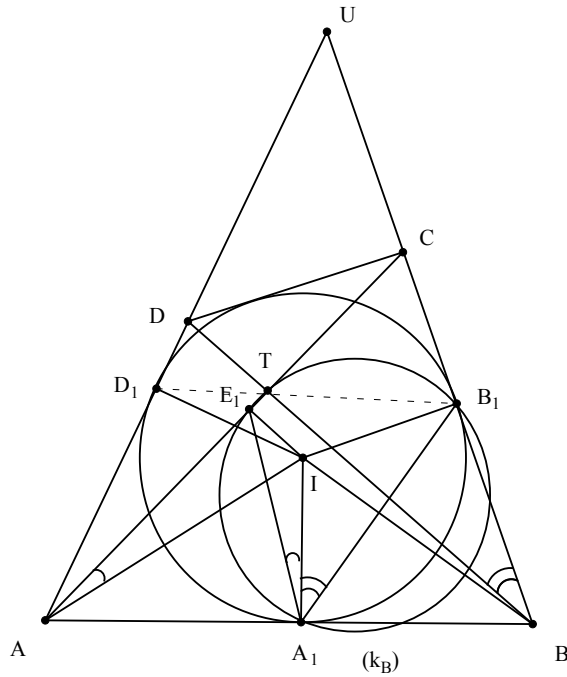
Оттук и от (5) получаваме, че $\angle A_1HB_1 = \angle A_1E_1B_1$. Можем да заключим, че точката H лежи на окръжността, определена от точките A_1 , B_1 и A_1 , т.е. че $H \in (k_B)$. Доказахме, че ортоцентърът H лежи върху педалната окръжност на псевдоцентъра O относно $\triangle ABC$. По същия начин се доказва, че H лежи и върху педалните окръжности на O относно $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$. Следователно H е педалният образ на O относно $ABCD$.

Както ще видим сега, образът при педалността $\Pi(X)$ на още една забележителна точка на четириъгълник е също специална точка в него.

Теорема 5. Педалният образ на центъра I на вписаната окръжност на описан четириъгълник $ABCD$ е пресечната точка T на диагоналите на последния.

Доказателство. За определеност ще предполагаме, че центърът I на вписаната в $ABCD$ окръжност лежи в $\triangle ATB$ (фиг. 6). При друго разположение на точката I разсъжденията са аналогични. Нека правите AD и BC се пресичат в точка U . Означаваме ортогоналните проекции на центъра I върху правите AB , BC , DA и AC съответно с A_1 , B_1 , D_1 и E_1 . Педалната окръжност (k_B) на точката I спрямо $\triangle ABC$ е определена от точките A_1 , B_1 и E_1 . Ще докажем първо, че $T \in (k_B)$. Понеже четириъгълниците AA_1IE_1 и BB_1IA_1 са вписани, имаме $\angle E_1A_1I = \angle E_1AI$ и $\angle B_1A_1I = \angle B_1BI$. Оттук получаваме последователно:

$$(*) \quad \angle E_1A_1B_1 = \angle E_1A_1I + \angle B_1A_1I = \angle E_1AI + \angle B_1BI = \angle CAI + \angle CBI = \angle AIB - \angle ACB.$$



Фигура 6

Но понеже I е център на вписаната в $\triangle ABU$ окръжност, имаме:
 $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AUB$. Оттук и от (*) получаваме последователно:

$$(6) \quad \angle E_1 A_1 B_1 = \angle AIB - \angle ACB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AUB - \angle ACB.$$

Точките B_1 и D_1 са допирните точки на вписаната в $ABCD$ окръжност със страните AD и BC и както лесно се доказва, $T \in B_1 D_1$. Тогава от равнобедрения $\triangle B_1 U D_1$ имаме $\angle T B_1 C = \angle D_1 B_1 U = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AUB$. Оттук получаваме:

$$(7) \quad \angle E_1 T B_1 = \angle T C B_1 + \angle T B_1 C = \angle ACB + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AUB.$$

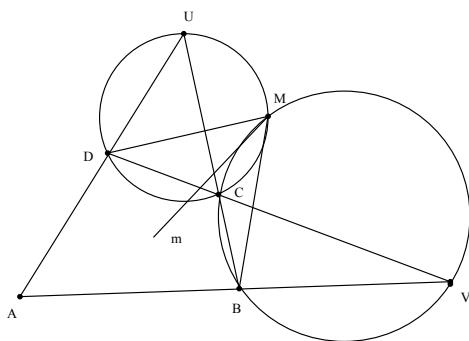
От (6) и (7) след почленно събиране получаваме:

$$\angle E_1 A_1 B_1 + \angle E_1 T B_1 = (90^\circ + \frac{1}{2} \angle AUB - \angle ACB) + (\angle ACB + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AUB) = 180^\circ.$$

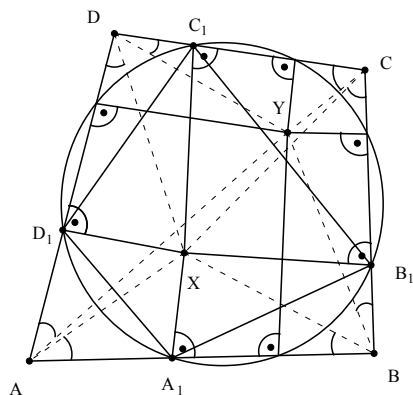
Можем да заключим, че $T \in (k_B)$. Доказахме, че точката T лежи на педалната окръжност на точката I относно $\triangle ABC$. По същия начин се доказва, че T лежи и на педалните окръжности на точката I спрямо $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$. Следователно T е педалният образ на I спрямо четириъгълника $ABCD$.

Накрая ще приведем без доказателства някои връзки на изображението педалност $P(X)$ спрямо четириъгълник с други преобразувания в равнината на четириъгълник.

В (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017) е разгледано едно изображение в равнината на четириъгълник, наречено инверсна изогоналност. То е свързано с една забележителна точка в четириъгълника, наречена точка на Микел. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който продълженията на страните AD и BC се пресичат в точката U , а продълженията на страните AB и DC – в точка V (фиг. 7). Доказва се, че описаните окръжности около триъгълниците ABU , CDU , ADV и BCV имат обща точка M . Тя се нарича точка на Микел за четириъгълника $ABCD$.



Фигура 7



Фигура 8

Определение 3. Композицията от симетрията с ос ъглополовящата m на $\angle BMD$ и инверсията с полюс M и степен $r^2 = BM \cdot DM$ се нарича инверсна изогоналност спрямо $ABCD$.

В (Alexandrov & Haimov, 2003) е разгледано друго изображение в равнината на четириъгълник, наречено изогонална спрегнатост. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Две точки X и Y в равнината му се наричат изогонално спрегнати, ако лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му (две

прави се наричат изогонално спрегнати спрямо даден ъгъл, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му) (фиг. 8). Изображението, което на една точка X съпоставя изогонално спрегнатата ѝ точка Y , се нарича изогонална спрегнатост в четириъгълника. В споменатата статия се доказват следните свойства на второто изображение.

Свойство А. Две точки X и Y в равнината на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изогонално спрегнати тогава и само тогава, когато съществува конично сечение с фокуси X и Y , вписано в $ABCD$.

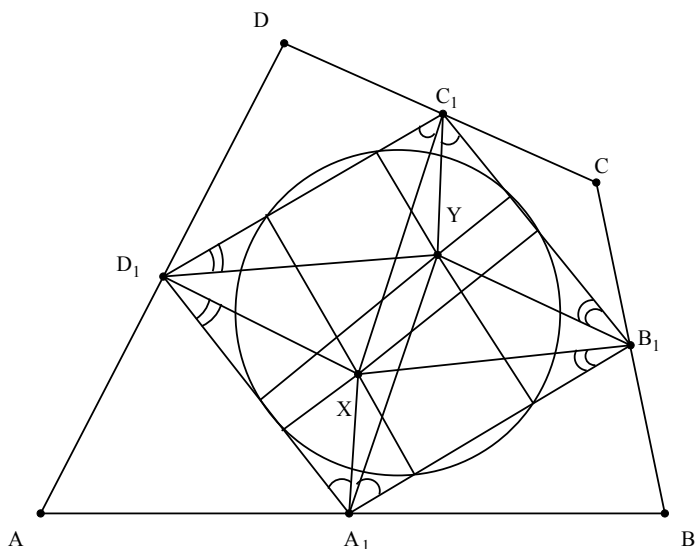
Свойство Б. Две точки X и Y в равнината на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изогонално спрегнати тогава и само тогава, когато ортогоналните им проекции върху правите, съдържащи страните на $ABCD$, лежат на една окръжност (фиг. 8).

Връзката на изображението педалност $\Pi(X)$ спрямо четириъгълник с преобразуванията инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост се изяснява в следната:

Теорема 6. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и X е точка, различна от върховете му и точката на Микел (фиг. 9). Нека A_1 , B_1 , C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху правите AB , BC , CD и DA . Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. При това, ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, точките X и Y са и изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ (фиг. 9).

От тази теорема с помощта на свойства A_1 и B_1 се получава следното:

Следствие. Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник. Ако Y е педалният образ на точката X , различна от върховете A , B , C и D и точката на Микел, и A_1 , B_1 , C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на X съответно върху правите AB , BC , CD и DA , то ортогоналните проекции на X и Y съответно върху правите A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 и D_1A_1 лежат на една окръжност. Съществува конично сечение с фокуси X и Y , вписано в $A_1B_1C_1D_1$ (фиг. 9).



Фигура 9

В заключение предлагаме две задачи за упражнение на читателите.

Задача 1. Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник с перпендикулярни диагонали. Да се докаже, че образ на центъра O на описаната му окръжност при педалността $\Pi(X)$ спрямо него е пресечната точка T на диагоналите.

Задача 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който са изпълнени равенствата $\angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ADB$ и $\angle ACD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABD$. Да се докаже, че образ на центъра на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност при педалността $\Pi(X)$ спрямо $ABCD$ е точката на Фойербих за $\triangle ABD$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). Pseudocenter and orthocenter – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625. (ISSN 1310-2230) [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2016). Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]

- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral. Pseudocenter and orthocenter, *Mathematics Plus* 2, 28 – 30, 43 – 50. (ISSN 0861-8321) [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника. Псевдоцентър и ортоцентър, *Математика плюс* 2, 28 – 30, 43 – 50. (ISSN 0861-8321).]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). Geometry of the quadrilateral, Miquel point, inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 81 – 93. (ISSN 1310-2230) [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика* 1, 81 – 93. (ISSN 1310-2230).]
- Alexandrov, P. & H. Haimov (2003). Geometry of the Quadrangle. Isogonal Conjugated Points. *Proceedings of the the International Congress of MASSEE 2003*, 141.
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]
- Nenkov, V. (2008). Four Euler circles through a point, *Mathematics Plus*, 2, 60 – 61. (ISSN 0861-8321) [Ненков, В. (2008). Четири Ойлерови окръжности през една точка, *Математика плюс*, 2, 60 – 61. (ISSN 0861-8321).]
- Nenkov, V. (2008). Complex numbers and pedal circles. *Mathematics and Informatics*, 5 – 6, 37 – 41. (ISSN 1310-2230) [Ненков, В. (1997). Комплексни числа и педални окръжности, *Математика и информатика*, 5 – 6, 37 – 41. (ISSN 1310-2230).]
- Grozdev, S., V. Nenkov & H. Haimov (2013). Eight lines through a notable point of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 4, 63 – 65. (ISSN 0861-8321) [Гроздев, С., В. Ненков & Х. Хаимов. (2013). Осем линии през една забележителна точка за четириъгълник, *Математика плюс*, 4, 63 – 65. (ISSN 0861-8321).]

- Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261 – 270. (ISSN 1310-2230) [Стефанов, Ст. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270. (ISSN 1310-2230).]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1)
- Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886)

A STATEMENT FOR CONCURRENCE OF PEDAL CIRCLES OF A POINT IN THE PLANE OF A QUADRILATERAL

Abstract. It is proved in the present paper that the pedal circles of an arbitrary point in the plane of a quadrilateral, determined by its sides and diagonals, are concurrent. With the help of this statement a transformation is defined in the plane of an arbitrary quadrilateral. The images of some notable points in the quadrilateral are found. The connection of this transformation with other transformations in the plane of the quadrilateral are described.

✉ **Mr. Haim Haimov, Resercher**
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria