

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ПИТАГОР В ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

Румяна Несторова

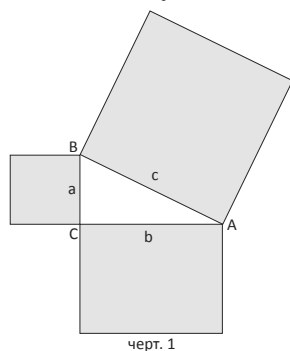
Регионален инспекторат по образованието - Враца

Резюме. Статията разглежда теоремата на Питагор, обобщението ѝ за произволен триъгълник и примерни приложения. Подходяща е за изявиени ученици по математика в 7. и 8. клас.

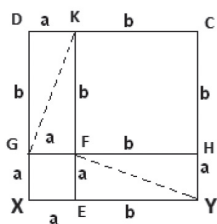
Keywords: Pythagorean theorem, generalization, proof, application

Ще започнем с една от възможните формулировки на Питагоровата теорема:

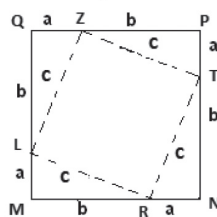
Лицето на квадрата, построен върху хипотенузата c на правоъгълен $\triangle ABC$, е равно на сумата от лицата на квадратите, построени върху катетите a и b на триъгълника, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$ (черт. 1).



черт. 1



черт.2

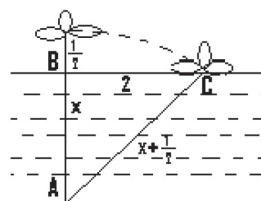


черт.3

Доказателство: Построяваме два еднакви квадрата със страни, равни на $a+b$. Разделяме първия квадрат на два квадрата, съответно със страни a и b , и два еднакви правоъгълника със страни a и b , които, от своя страна, разделяме чрез един от диагоналите им на правоъгълни триъгълници, които са еднакви на дадения (черт. 2). Разделяме втория квадрат на четири правоъгълни триъгълника с катети a , b и хипотенуза c , еднакви на дадения, и на един квадрат със страна c (черт. 3). Тогава $S_{XYCD} = S_{XEFG} + S_{FHCK} + 4S_{\triangle ABC} = a^2 + b^2 + 2ab$ и $S_{MNPQ} = S_{LRTZ} + 4S_{\triangle ABC} = c^2 + 2ab$. Но $S_{XYCD} = S_{MNPQ}$, откъдето следва, че $a^2 + b^2 = c^2$

и с това теоремата е доказана.

Питагоровата теорема се използва при решаването на голям брой задачи. Ще разгледаме няколко задачи от древността, формулирани в малко изменен вид, първата от които ще решим, а останалите предлагаме за самостоятелна работа.



черт.4

Задача за лотоса. Цветът на лотос стоял половин фут над езеро. Поривът на вятъра го потопил на два фута встрани от мястото, където лотосът стоял (фут е британска мярка за дължина, около 30,48 см). Каква е дълбочината на езерото?

Решение: Да означим с x ($x > 0$) дълбочината на езерото във футове (черт.4). Тогава дължината на лотоса е $x + \frac{1}{2}$. От Питагорова теорема за $\triangle ABC$ следва равенството $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$, откъдето намираме $x = 3\frac{3}{4}$, т. е. дълбочината на езерото е $3\frac{3}{4}$ фута.

Задача за тополата. На брега на една река растяла самотна тополя. Силен вятър прекършил нейния ствол и върхът ѝ докоснал отсрещния бряг. Колко е била висока тополата, ако останалата част от ствола е висока 3 фута, а реката е широка 4 фута?

Отг. 8 фута

Задачата за водоема. В центъра на квадратен водоем със страна 10 м расте камъш (растение, наподобяващо тръстика, папур), върхът на който се намира на 1 м над водата. Ако се издърпа камъшът към брега, то върхът му ще стигне точно брега. Каква е дълбочината на водоема и дължината на камъша?

Отг. 12 м; 13 м

Задача за бамбука. Височината на бамбук е 10 м. Прекършили го по такъв начин, че върхът му допрял земята на разстояние 3 м от корена. Каква е височината му след прекършването?

Отг. 4,55 м

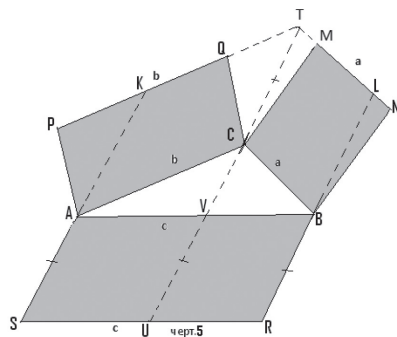
Задача за двамата пътешественици. Двама пътешественици тръгнали от едно и също място в различни посоки. Единият от тях тръгнал точно на изток със скорост 3 км/ч, а другият – точно на юг със скорост 5 км/ч. След като изминал 10 км, вторият тръгнал по посока на пътя на първия, докато го срещнал. Какъв път е изминал всеки от двамата пътешественици?

Отг. 18,75 км; 31,25 км

Задача на известния ирански математик Ал Каши (XIV в.). Отвесно забито копие стърчи три лакътя над водата. Вятърът отклонил върха му пет лакътя встрани и то стигнало до повърхността на водата без отместване на другия му край. Каква е дълбочината на водата?

Отг. $2\frac{2}{3}$ лакътя

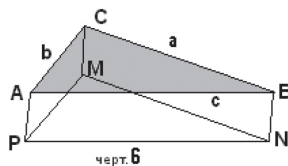
Има ли аналог на теоремата на Питагор за произволен триъгълник? Какви са условията за валидността ѝ в общия случай? Отговор на този въпрос дава едно обобщение на теоремата на Питагор, известно като **теорема на Пап Александрийски** (III в. от н.е.): Нека върху страните BC , AC и AB на произволен $\triangle ABC$, външно за триъгълника са построени успоредниците $BCMN$, $CAPQ$ и $ABRS$, а правите MN и PQ се пресичат в точката T . Ако отсечката TC е успоредна и равна на страната AS на успоредника $ABRS$, то лицето на успоредника $ABRS$ е равно на сумата на лицата на успоредниците $BCMN$ и $CAPQ$, т.е. $S_{ABRS} = S_{BCMN} + S_{CAPQ}$ (черт. 5).



Доказателство. Продължаваме отсечката TC до пресичането ѝ със страната AB в точка V и със страната SR в точка U . Продължаваме страните AS и BR до пресичане с PQ и MN съответно в точките K и L . От условията $TC \parallel AS$ и $TC = AS$ следва, че $S_{TKAC} = S_{ASUV}$ (успоредниците имат равни основи и равни височини). Аналогично $S_{TKAC} = S_{ACQP}$ (успоредниците имат една и съща основа и равни височини). Следователно $S_{ACQP} = S_{ASUV}$. По същия начин установяваме, че $S_{TCBL} = S_{BVUR}$ и $S_{TCBL} = S_{MCBN}$, откъдето $S_{MCBN} = S_{BVUR}$. Тогава $S_{ABRS} = S_{ASUV} + S_{BVUR} = S_{BCMN} + S_{CAPQ}$, с което теоремата е доказана.

Приложни задачи:

1. На страните BC и AC на $\triangle ABC$ към вътрешността на триъгълника са построени успоредниците $BCMN$ и $CAPM$. Да се докаже, че лицето на успоредника $APNB$ е равно на сумата от лицата на успоредниците $BCMN$ и $CAPM$.



Решение: От условието, че $CAPM$ е успоредник, следва, че $CM \parallel AP$ и $CM = AP$ (черт. 6). На лъчите $PA \rightarrow$, $MC \rightarrow$ и $NB \rightarrow$ построяваме отсечките AP_1 , CM_1 и BN_1 , такива че $AP_1 = AP$, $CM_1 = CM$ и $BN_1 = BN$. Тъй като $CM_1 \parallel AP$ и $CM_1 = AP$, то от обобщението на теоремата на Питагор следва, че $S_{APNB} = S_{CAP_1M_1} + S_{BCM_1N_1}$. Но успоредниците BCM_1N_1 и CAP_1M_1 по построение са съответно еднакви на успоредниците $BCMN$ и $CAPM$, откъдето $S_{BCM_1N_1} = S_{BCMN}$ и $S_{CAP_1M_1} = S_{CAPM}$. Тогава $S_{APNB} = S_{CAP_1M_1} + S_{BCM_1N_1} = S_{CAPM} + S_{BCMN}$, с което задачата е решена.

2. M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Ако x и y са разстоянията от M съответно до правите BC и AC , да се докаже неравенството $ax + by \leq c \cdot CM$.

Решение: На страните BC и AC на $\triangle ABC$ към вътрешността на триъгълника построяваме успоредниците $BCMN$ и $CAPM$, където M е дадената произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ (черт. 6). От доказаното в задача 1. следва, че (1) $S_{APNB} = S_{CAPM} + S_{BCMN}$. Но (2) $S_{CAPM} = b \cdot y$, $S_{BCMN} = a \cdot x$ и $S_{APNB} = c \cdot h_c$. Тъй като $h_c \leq AP = CM$, то (3) $S_{APNB} = c \cdot h_c \leq c \cdot AP = c \cdot CM$. От (1), (2) и (3) следва исканото твърдение $ax + by \leq c \cdot CM$ (h_c височина на успоредника $APNB$).

3. M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

Ако x и y са разстоянията от M съответно до правите BC и AC , докажете неравенството $ay + bx \leq c \cdot CM$.

Решение: Върху лъча $CA \rightarrow$ намираме точка A_1 , такава че $CA_1 = a$ и построяваме успоредника A_1CMN , а върху лъча $CB \rightarrow$ намираме точка B_1 такава, че $CB_1 = b$ и построяваме успоредника B_1CMP (черт. 7). Тъй като $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$, то $A_1B_1 = c$. От теоремата на Пап Александрийски за $\triangle A_1B_1C$ следва, че $S_{A_1NPB_1} = S_{CA_1NM} + S_{B_1CMP} \Leftrightarrow ax + by = c \cdot h_c \leq c \cdot A_1N = c \cdot CM$ (h_c е височина на успоредника A_1NPB_1).

4. M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Ако S е лицето на триъгълника, да се докаже неравенството $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 4S$.

Решение: От решението на задача 2. следват неравенствата $ax + by \leq c \cdot CM$, $by + cz \leq a \cdot AM$ и $ax + cz \leq b \cdot BM$. Събираме почленно тези неравенства и получаваме, че $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 2(ax + by + cz) = 4 \left(\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \right)$. Но $\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S$, откъдето $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 4S$.

5. M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$. Ако x , y и z са разстоянията от M съответно до правите BC , CA и AB , докажете неравенството $MA \cdot MB \cdot MC \geq (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)$.

Решение: Нека страните на $\triangle ABC$ са $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). От решението на задача 2. следват неравенствата (1) $ax + by \leq c \cdot CM$, (2) $by + cz \leq a \cdot AM$ и (3) $ax + cz \leq b \cdot BM$, а от решението на задача 3. – неравенствата (4) $ay + bx \leq c \cdot CM$, (5) $bz + cy \leq a \cdot AM$ и (6) $az + cx \leq b \cdot BM$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $MA > 0$, $MB > 0$, $MC > 0$). Събираме почленно неравенствата (1) и (4), в резултат на което получаваме $\left(\frac{a+b}{2} \right) (x+y) \leq c \cdot CM$. Но $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (неравенство между средно геометрично и средно аритметично), откъдето (7) $\sqrt{ab} (x+y) \leq c \cdot CM$. Аналогично се доказва, че (8) $\sqrt{bc} (y+z) \leq a \cdot AM$ и (9) $\sqrt{ac} (x+z) \leq b \cdot BM$. Умножаваме почленно неравенствата (7), (8), (9) и получаваме $MA \cdot MB \cdot MC \geq (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)$.

6. (Теорема на Ердьош) M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$. Ако x, y и z са разстоянията от M съответно до правите BC, CA и AB , докажете неравенството $MA+MB+MC \geq 2x+2y+2z$.

Доказателство: От решението на задача 3. следват неравенствата: (1) $ay+bx \leq c \cdot CM \Leftrightarrow \frac{a}{c} \cdot y + \frac{b}{c} \cdot x \leq CM$; (2) $bz+cy \leq a \cdot AM \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a} \cdot y \leq AM$ и (3) $az+cx \leq b \cdot BM \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot z + \frac{c}{b} \cdot x \leq BM$. Събираме почленно трите неравенства и получаваме $MA+MB+MC \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cdot x + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot y + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot z \geq 2x+2y+2z$. Тук използвахме, че $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \leq 2$ за всяко $m > 0$ и $n > 0$.

Разработката на темата допълва и разширява изучаваното в училище учебно съдържание по математика, а като нейно продължение може да се разгледат някои интересни и достъпни за учениците свойства на питагоровите и диофантовите триъгълници.

В заключение авторът изказва благодарност на г-н Емил Карлов за дадените полезни при подготовката на статията.

ЛИТЕРАТУРА

- Арнолд В. И. (2012). *Задачи для детей от 5 до 15 лет*. Москва: МЦНМО.
Гроздев, С. (2005). *Подготовка за Европейско кенгуру*. София: СМБ. (ISBN 954-8880-20-2), 220 страници.
(1998). *Сборник статии по математика за работа с талантиливи ученици* Ямбол: МГ.
Солаков, Е. & Чимев, К. (1967). *Питагорова теорема*. София: „Наука и изкуство“.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. Theory and Practice. (The Bulgarian Experience)*. Sofia: ADE. ISBN 978-954-92139-1-1, 295 pages.

A GENERALIZATION OF THE PYTHAGORAEAN THEOREM IN EXTRACURRICULAR CLASSES OF MATHEMATICS

Abstract. The paper considers the Pythagorean theorem, its generalization for arbitrary triangle and exemplary applications. It is suitable for outstanding students in the 7th and 8th grade.

✉ **Mrs. Rumjana Nestorova**

Senior expert in Mathematics
Regional Inspectorate of Education – Vratsa