

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ОРТОЦЕНТРИЧНИЯ ТРИЪГЪЛНИК

Хаим Хаимов

Резюме. Авторът предлага обобщение на ортоцентричния триъгълник. Обобщеният триъгълник е перспективен на триъгълника ABC и зависи от произволна точка на Чева P . Наричаме го H – триъгълник на точката P . Изображението, което на точка на Чева P съпоставя персептора на H – триъгълника на P и триъгълника ABC , наричаме H – изображение на P . Показваме, че H – изображението е композиция на две известни преобразувания на точки: допълнение и изогонална спрегнатост. Намираме образите на някои забележителни точки при H – изображението. Резултатите в тази статия могат да бъдат използвани за тестване на компютърната програма „Откривател“.

Keywords: generalization of the orthic triangle, perspective triangle, perspector, notable points

Добре е известно, че триъгълникът с върхове петите на височините на даден неправилен триъгълник са нарича ортоцентричен триъгълник. Ортоцентричният триъгълник притежава интересни и разнообразни свойства. Едно от основните свойства на ортоцентричния триъгълник е, че той е перспективен с изходния триъгълник ABC , като персепторът е ортоцентърът. Ще припомним, че два триъгълника в равнината се наричат перспективни, ако правите, преминаващи през съответните върхове, се пресичат в една точка. Тази точка се нарича център на перспективата, или персептор, за по-кратко.

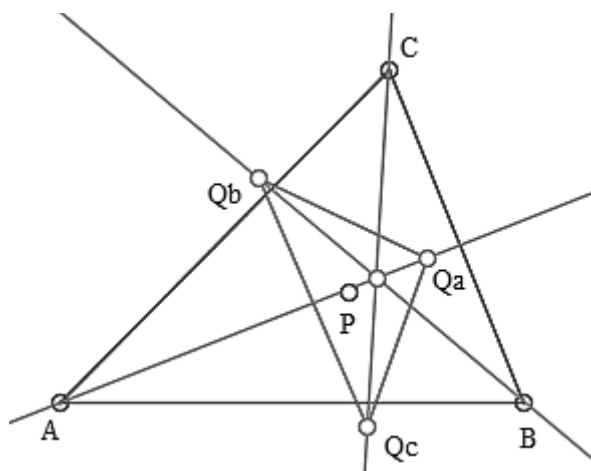
Тук ще разгледаме едно обобщение на ортоцентричния триъгълник. Обобщеният триъгълник също е перспективен на изходния триъгълник ABC . В тази статия с P ще бележим произволна точка на Чева. Обобщеният триъгълник зависи от произволна точка на Чева P . Ако точката на Чева е ортоцентърът, то обобщеният триъгълник съвпада с ортоцентричния триъгълник. Ще наричаме обобщения триъгълник H – триъгълник на P . Персепторът на H – триъгълника на P и триъгълника BC ще наричаме H – точка на P . Изображението, което на точка на Чева P съпоставя H – точката на P , ще наричаме H – изображение на P . Както

ще видим, H – изображението може да бъде представено като композиция на две известни изображения на точки – допълнение и изогонална спрегнатост. Образите на забележителни точки на триъгълника при H – изображението са също забележителни точки на триъгълника. Част от забележителните точки – образи, по мнението на автора, не са разглеждани досега в литературата. Построяването на новите забележителни точки с линейка и пергел не представлява трудност.

Дефинираме H – триъгълника на точката P , както следва. Нека $\Delta A_1 B_1 C_1$ е триъгълникът на Чева на точката P . Трите точки A , B и B_1 дефинират окръжност и трите точки A , C и C_1 дефинират още една окръжност. Тези две окръжности се пресичат в точката A и в още една точка, която означаваме с Q_a . Аналогично дефинираме точките Q_b и Q_c . Тези три точки Q_a , Q_b и Q_c са върховете на H – триъгълника на точката P .

Ще отбележим, че така дефинираните точки Q_a , Q_b и Q_c са брокариани съответно на четириъгълниците BCB_1C_1 , CAC_1A_1 и ABA_1B_1 (Хаимов, 2005), (Хаимов, 2006) и като такива, имат различни забележителни свойства.

Теорема 1. За всяка точка P H – триъгълникът на P и ΔABC са перспективни.



Фигура 1

Фигура 1 илюстрира Теорема 1. На фиг. 1 точката P е произволна точка на Чева в равнината на ΔABC . Триъгълникът $Q_a Q_b Q_c$ е H – триъгълникът на точката P . Правите AQ_a , BQ_b и CQ_c се пресичат в една точка, която е H – точката на точката P .

Теорема 2. Нека точка P има барицентрични координати $(u : v : w)$. Тогава H – точката на P (т.е. перспекторът на H – триъгълника на P и триъгълника ABC) има барицентрични координати $\left(\frac{a^2}{v+w} : \frac{b^2}{w+u} : \frac{c^2}{u+v} \right)$.

Теорема 3. H – изображението е композиция на допълнение и изогонална спрегнатост.

Доказателство. Нека точката P има барицентрични координати $(x : y : z)$. Тогава допълнението на P има барицентрични координати $(y+z : z+x : x+y)$, а изогонално спрегнатата точка на P има барицентрични координати $\left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right)$. Оттук следва, че изогонално спрегнатата точка на допълнението на точка $P = (u : v : w)$ има барицентрични координати $\left(\frac{a^2}{v+w} : \frac{b^2}{w+u} : \frac{c^2}{u+v} \right)$.

Теорема 3 позволява да намерим образите на ред забележителни точки на триъгълника при H – изображението.

Теорема 4. Ортоцентърът на произволен неправиъгълен триъгълник е двойна точка на H – изображението.

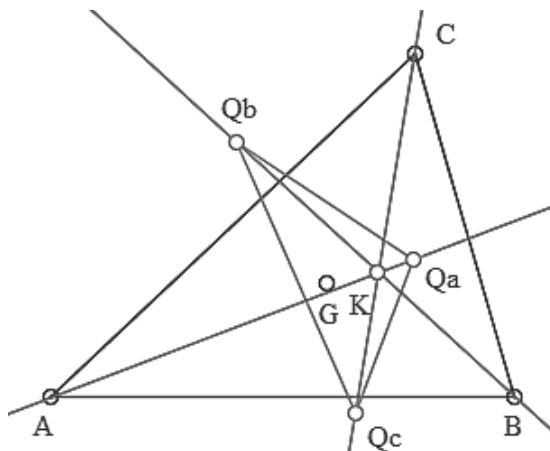
Доказателство. Първо намираме допълнението на ортоцентъра. Това е центърът O на описаната окръжност. (Паскалев & Чобанов, 1985). След това намираме изогонално спрегнатата точка на точката O . Това е ортоцентърът H – (Паскалев & Чобанов, 1985). Следователно, ортоцентърът H е двойна точка на H – изображението.

Теорема 5. Образът на медицентъра на триъгълника при H – изображението е точката на Лемоан.

Доказателство. Дополнението на медицентъра е самият медицентър. Изогонално спрегнатата точка на медицентъра е точката на Лемоан (Паскалев & Чобанов, 1985).

Фигура 2 илюстрира Теорема 5. На фигура 2 точка G е медицентърът на триъгълника ABC , триъгълникът $O_a O_b O_c$ е H – триъгълникът на медицентъра G , точка K е точката на Лемоан, правите AK , BK и CK са симедианите. Тогава точките O_a , O_b и O_c лежат върху симедианите.

Теорема 6. Образът на точката на Нагел на триъгълника при H – изображението е центърът на вписаната окръжност.



Фигура 2

Доказателство. Допълнението на точката на Нагел N е центърът на вписаната окръжност I . Изогонално спрегнатата точка на I е самата точка I (Паскалев & Чобанов, 1985).

Ще отбележим, че ако знаем барицентричните координати на една точка, по теорема 3 лесно можем да намерим барицентричните координати на образа на точката при H – изображението. Например центърът на вписаната окръжност има барицентрични координати $(a:b:c)$, откъдето образът на тази точка при H – изображението има барицентрични координати $\left(\frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{c+a} : \frac{c^2}{a+b}\right)$.

Накрая ще приведем барицентричните координати на върховете на H – триъгълника $O_a O_b O_c$ на медицентъра: $Q_a = (b^2 + c^2 - 2a^2 : 3b^2 : 3c^2)$, $Q_b = (3a^2 : c^2 + a^2 - 2b^2 : 3c^2)$, $Q_c = (3a^2 : 3b^2 : a^2 + b^2 - 2c^2)$.

А ето и една задача за самостоятелна работа.

Задача. Да се докаже, че ортоцентърът е единствената двойна точка на H – изображението.

В заключение, ще отбележим, че с помощта на компютърната програма „Откривател“ (Гроздев & Деков, 2013) би могло да се изследват връзките на забележителни точки на триъгълника с H – изображения на дадени забележителни точки, както и да бъдат открити и други триъгълници, перспективни с H – триъгълника на медицентъра.

ЛИТЕРАТУРА

- Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика*, 5.
- Хаимов, Х. (2006). Брокарианите забележителни точки в четири-ъгълника, *Математика и информатика*, 6.
- Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*, София: Народна просвета.
- Гроздев, С. & Д. Деков (2013). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“, *Математика и информатика*, 5.

REFERENCES

- Haimov, H. (2005). Brokariani na chetiriagalnik, *Matematika*, 5.
- Haimov, H. (2006). Brokarianite zabelezhitelni tochki v chetiriagalnika, *Matematika i informatika*, 6.
- Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika*, Sofiya. Narodna prosveta.
- Grozdev, S. & D. Dekov (2013). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa „Otkrivatel“, *Matematika i informatika*, 5.

A GENERALIZATION OF THE ORTHOCENTRIC TRIANGLE

Abstract. The author proposes a generalization of the orthic triangle. The generalized triangle is defined by an arbitrary point of Ceva P and it is in perspective with the reference triangle ABC . We call it the H – triangle of point P . We call the H – transform of point P the mapping which assigns to point P the perspector of the H – triangle of point P and triangle ABC . We show that the H – transform is composition of two known transforms: the complement and the isogonal conjugate. We identify the images of a few remarkable points under the H – transform. The results in this paper could be used for testing of the computer program “Discoverer”.

✉ **Haim Haimov**
16, Bratia Shkorpil Str.
9000 Varna, Bulgaria