

ЕДНО ИНТЕРЕСНО СВОЙСТВО ЗА НЯКОИ КЛАСОВЕ РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

Росен Николаев

Резюме. Статията е посветена на методическото определяне на някои класове реални функции, за които разстоянието между абсцисите на кои да е две точки от графиките им е равно на разстоянието между пресечните точки на допирателните към графиките през двете точки и абсцисната ос.

Keywords: function, exponent, graphics, tangent, distance

В процеса на съставяне на темата за Националната студентска олимпиада през 2013 г. достигнахме до едно интересно геометрично свойство. Една от задачите, върху която работехме и по наше мнение бе удачно да бъде включена в темите за студенти от технически, технологически и икономически специалности (Гроздев & Ненков, 2012), има следния вид:

Дадена е функцията $f(x) = e^{2x}$ и през точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ($x_2 - x_1 = 3$) от нейната графика са построени допирателните t_A и t_B , които пресичат оста Ox съответно в точки A_1 и B_1 . Да се намери дължината на отсечката A_1B_1 .

Ще изложим решението на тази задача, като вземем предвид, че $A(x_1, e^{2x_1})$ и $B(x_2, e^{2x_2})$. За уравненията на t_A и t_B имаме (Гроздев, 2010):

$$t_A : y = 2e^{2x_1}x - e^{2x_1}(2x_1 - 1)$$

$$t_B : y = 2e^{2x_2}x - e^{2x_2}(2x_2 - 1),$$

а за точките A_1 и B_1 – съответно $A_1\left(\frac{2x_1 - 1}{2}, 0\right)$ и $B_1\left(\frac{2x_2 - 1}{2}, 0\right)$. За дължината на

отсечката A_1B_1 се получава $|A_1B_1| = 3$. От решението прави впечатление, че разстоянието между точките A_1 и B_1 е същото като това между абсцисите на A и B . Първият въпрос, който възниква, е дали това е случайност, или не зависи конкретно от числото 3.

Модифицираме условието и приемаме, че $x_2 - x_1 = k$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). След като решим задачата, се оказва, че наистина $|A_1B_1| = |k|$. Така стигаме до извода за конкретната експоненциална функция, че ако построим допирателни през които и да

е две точки от графиката ѝ, то разстоянието между точките, в които те пресичат абсцисата, е същото като това между абсцисите на първоначално избраните точки. В същото време лесно може да се види, че това не важи за ординатите на двете двойки точки.

Вторият въпрос, който възниква, е за какъв клас експоненциални функции важи това свойство? За целта формулираме следната задача:

Нека $f(x) = C.e^{g(x)}$, където $g(x)$ е непрекъсната в някакво подмножество D_g на R (или цялото R) и C е ненулева реална константа. През произволни две точки от графиката ѝ $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, за които

$$x_2 - x_1 = k, \quad k \in R \setminus \{0\},$$

$$\exists g'(x_1) \neq 0 \text{ и } g'(x_2) \neq 0,$$

са построени допирателни t_A и t_B , които пресичат оста Ox в точки A_1 и B_1 , като $|A_1B_1| = |k|$. Да се намерят всички функции $g(x)$, за които това е в сила.

В решението на тази задача ще използваме, че $A(x_1, C.e^{g(x_1)})$ и $B(x_2, C.e^{g(x_2)})$. Уравненията на t_A и t_B имат вида:

$$t_A: y = C.g'(x_1)e^{g(x_1)}x + C.e^{g(x_1)}(1 - g'(x_1)x_1),$$

$$t_B: y = C.g'(x_2)e^{g(x_2)}x + C.e^{g(x_2)}(1 - g'(x_2)x_2),$$

а за координатите на A_1 и B_1 получаваме $A_1\left(\frac{g'(x_1)x_1 - 1}{g'(x_1)}, 0\right)$ и $B_1\left(\frac{g'(x_2)x_2 - 1}{g'(x_2)}, 0\right)$, откъдето

$$|A_1B_1| = \left| \frac{g'(x_2)x_2 - 1}{g'(x_2)} - \frac{g'(x_1)x_1 - 1}{g'(x_1)} \right| = \left| x_2 - x_1 + \frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{g'(x_2)g'(x_1)} \right| = |k|.$$

Да приемем, че $x_2 > x_1$. Тогава $x_2 - x_1 = |k|$. Последното уравнение е еквивалентно на

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{g'(x_2)g'(x_1)} = 0 \cup \frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{g'(x_2)g'(x_1)} = -2|k|. \quad (1)$$

От първото уравнение получаваме $g'(x) = \text{const}$. Оттук следва, че $g(x) = ax + b$ и по този начин откриваме един клас от функции с исканото свойство, а именно

$$f(x) = C.e^{ax+b} \quad (2)$$

Като частен случай се получава функцията $f(x) = \text{const}$, но последното противоречи на условието, че $g'(x) \neq 0$.

Не е трудно да се провери, че за всяка функция от вида (2) е в сила исканото свойство. И наистина, за произволни две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, за които $|x_2 - x_1| = |k|$, имаме:

$$\begin{aligned} t_A : y &= C.ae^{ax_1+b}x + C.e^{ax_1+b}(1-ax_1), \\ t_B : y &= C.ae^{ax_2+b}x + C.e^{ax_2+b}(1-ax_2), \\ A_1\left(\frac{ax_1-1}{a}, 0\right) &\text{ и } B_1\left(\frac{ax_2-1}{a}, 0\right). \end{aligned}$$

Тогава $|A_1B_1| = |k|$.

Да разгледаме второто уравнение $\frac{1}{g'(x_1)} - \frac{1}{g'(x_2)} = -2|k| < 0$ в (1) и нека положим $\frac{1}{g'(x)} = F(x)$. Получаваме $F(x_1) - F(x_2) = -2|k|$ и при това $x_2 > x_1$, като $x_2 - x_1 = |k|$ или $x_2 = |k| + x_1$ и това е в сила за всеки две точки x_1 и x_2 от D_g . Така достигаме до следното функционално уравнение:

$$F(x) - F(x + |k|) = -2|k|,$$

или

$$F(x + |k|) - F(x) = 2|k|, \quad x \in D_g^1. \quad (3)$$

Лесно може да се провери, че всички функции, които удовлетворяват (3), са от вида $F(x) = 2x + C$, където C е произволна константа. Тогава $2x + C = \frac{1}{g'(x)}$ или $g'(x) = \frac{1}{2x + C}$, откъдето $g(x) = \frac{1}{2} \ln|2x + C| + C_1$. За $f(x)$ се получава $f(x) = e^{\frac{1}{2} \ln|2x+C|+C_1} = C_2 \sqrt{|2x+C|}$, като $C_2 > 0$, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} C_2 \sqrt{-2x - C}, & x < -\frac{C}{2} \\ C_2 \sqrt{2x + C}, & x \geq -\frac{C}{2} \end{cases}$$

и $f(x)$ е диференцируема за $\forall x \neq -\frac{C}{2}$. Точките A и B могат да бъдат избрани както от един и същи клон (от двата) на графиката $f(x)$, така и от различни. В който и да е от случаите може да се покаже, че $|x_A - x_B| = |x_{A_1} - x_{B_1}|$.

Случай 1. Нека $x_1 < x_2 < -\frac{C}{2}$ и $x_2 - x_1 = |k|$. Координатите на точките A и B са $A(x_1, C_2\sqrt{-2x_1 - C})$ и $B(x_2, C_2\sqrt{-2x_2 - C})$. За уравненията на t_A и t_B имаме

$$t_A : y = \frac{-C_2}{\sqrt{-2x_1 - C}}(x + x_1 + C),$$

$$t_B : y = \frac{-C_2}{\sqrt{-2x_2 - C}}(x + x_2 + C),$$

а за координатите на A_1 и B_1 – съответно $A_1(-(x_1 + C), 0)$ и $B_1(-(x_2 + C), 0)$, откъдето

$$|A_1B_1| = |-(x_2 + C) - (-(x_1 + C))| = |x_1 - x_2| = |k|.$$

Случай 2. Нека $-\frac{C}{2} < x_1 < x_2$ и $x_2 - x_1 = |k|$. Точките A и B имат координати $A(x_1, C_2\sqrt{2x_1 + C})$ и $B(x_2, C_2\sqrt{2x_2 + C})$, уравненията на допирателните са

$$t_A : y = \frac{C_2}{\sqrt{2x_1 + C}}(x + x_1 + C),$$

$$t_B : y = \frac{C_2}{\sqrt{2x_2 + C}}(x + x_2 + C),$$

а координатите на точките A_1 и B_1 – съответно $A_1(-(x_1 + C), 0)$ и $B_1(-(x_2 + C), 0)$.

Следователно отново $|A_1B_1| = |k|$.

Случай 3. Нека $x_1 < -\frac{C}{2} < x_2$ и $x_2 - x_1 = |k|$. Тогава A и B имат координати съответно $A(x_1, C_2\sqrt{-2x_1 - C})$ и $B(x_2, C_2\sqrt{2x_2 + C})$. За уравненията на t_A и t_B получаваме:

$$t_A : y = \frac{-C_2}{\sqrt{-2x_1 - C}}(x + x_1 + C),$$

$$t_B : y = \frac{C_2}{\sqrt{2x_2 + C}}(x + x_2 + C),$$

а за координатите на точките A_1 и B_1 – съответно $A_1(-(x_1 + C), 0)$ и $B_1(-(x_2 + C), 0)$,

откъдето следва, че отново $|A_1B_1| = |k|$.

Друг клас функции, които удовлетворяват (3), са $F(x) = 2x + \varphi(x)$, където $\varphi(x)$ е непрекъснатата и периодична с период $|k|$. Тогава $f(x) = e^{\int \frac{dx}{2x + \varphi(x)}}$, но за тези функции разглежданото свойство ще бъде в сила само ако $|k|$ съвпада с периода на $\varphi(x)$, докато за изведените дотук класове функции то е валидно за всяко ненулево реално k .

Третият въпрос, който бихме искали да поставим като обект на изследване в настоящата разработка, е формулиран в следващата задача:

Нека е дадена функцията $f(x)$, непрекъснатата в някакво подмножество D_f на R (или в цялото R), и нека x_1 и x_2 са произволни две точки от D_f – такива, че:

$$1) |x_2 - x_1| = |k|;$$

$$2) \exists g'(x_1) \neq 0 \text{ и } g'(x_2) \neq 0.$$

През точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ са построени допирателни към графиката на $f(x)$, съответно t_A и t_B , които пресичат Ox в точките A_1 и B_1 така, че $|A_1 B_1| = |k|$. Да се намерят възможните класове функции $f(x)$, удовлетворяващи тези условия.

За уравненията на t_A и t_B имаме:

$$t_A : y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1,$$

$$t_B : y = f'(x_2)x + f(x_2) - f'(x_2)x_2,$$

а за координатите на A_1 и B_1 получаваме:

$$A_1 \left(\frac{f'(x_1)x_1 - f(x_1)}{f'(x_1)}, 0 \right) \text{ и } B_1 \left(\frac{f'(x_2)x_2 - f(x_2)}{f'(x_2)}, 0 \right).$$

Тогава:

$$|A_1 B_1| = \left| \frac{f'(x_2)x_2 - f(x_2)}{f'(x_2)} - \frac{f'(x_1)x_1 - f(x_1)}{f'(x_1)} \right| = |k| \text{ или } \left| x_2 - x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right| = |k|,$$

което е еквивалентно на

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0 \cup \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -2|k|. \quad (4)$$

Двете уравнения в (4) са в сила за всеки две точки x_1 и x_2 от D_f , в които функцията $f(x)$ е диференцируема, $f'(x_1) \neq 0$, $f'(x_2) \neq 0$ и $|x_2 - x_1| = |k|$.

Да предположим, че $f(x) \neq 0$ за $\forall x \in D_f$ и да положим $[\ln|C \cdot f(x)|]' = F(x)$ ($C \neq 0$). Тогава за първото уравнение в (4) се получава $F(x) = F(y)$ за $\forall x, y$, за които са изпълнени всички горепосочени условия. Оттук следва, че $F(x) = \text{const}$ или $[\ln|C \cdot f(x)|]' = \text{const}$, т.е. $\ln|C \cdot f(x)| = ax + b$ или $|C \cdot f(x)| = e^{ax+b}$, откъдето

$$f(x) = \frac{1}{C} e^{ax+b} \text{ или } f(x) = -\frac{1}{C} e^{ax+b}.$$

Така от първата възможност за (4) отново достигахме до класа експоненциални функции, които вече засегнахме в настоящото изследване.

Ако във втората част на (4) положим $\frac{f(x)}{f'(x)} = F(x)$, ще достигнем до

$$F(x) - F(y) = -2|k|.$$

Да приемем сега, че $y > x$. Тогава $y = x + |k|$, т.е. $F(x) - F(x + |k|) = -2|k|$ или

$$F(x + |k|) - F(x) = 2|k|,$$

където k е ненулев реален параметър, което отново е функционално уравнение, аналогично на (3). Едно негово решение е $F(x) = 2x + C$, където C е произволна

реална константа. Тогава получаваме $\frac{f(x)}{f'(x)} = 2x + C$ или $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x + C}$, $x \neq -\frac{C}{2}$,

т.е. $[\ln|C_1 \cdot f(x)|]' = \frac{1}{2x + C}$. Оттук след решаване отново получаваме

$$f(x) = C_2 \sqrt{|2x + C|}, \quad C_2 > 0.$$

Така, на база направените изследвания, достигахме до два основни класа функции, за които е в сила описаното свойство. Тези класове са:

$$1) f(x) = c \cdot e^{ax+b}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\};^2$$

$$2) f(x) = a \sqrt{|2x + b|}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}.$$

В заключение бихме искали да направим две допълнения към разглеждания проблем:

1. За обратните на посочените функции изложеното свойство ще бъде в сила, но не за абсцисите, а за ординатите на произволни две точки от графиките им, в които те са гладки.

2. Като едно разширение на изследваното свойство (без да навлизаме в подробности) можем да посочим, че за степенната функция $f(x) = ax^\alpha$ ($\alpha \neq 0$, $a \neq 0$) за всеки две точки A и B от графиката ѝ, в които тя е гладка, и $x_A - x_B = k$, то $|x_{A_1} - x_{B_1}| = \left| \frac{k(\alpha - 1)}{\alpha} \right|$.³ При $\alpha \rightarrow \pm\infty$ следва, че $|x_{A_1} - x_{B_1}| \rightarrow |k|$, което показва, че свойството на степенната функция се доближава до свойството на показателната функция.

В изложението бихме могли да използваме дедуктивния подход, но считаме, че начинът, по който сме го осъществили, има значение от методологична гледна

точка. Съществен е пътят, по който би могъл да тръгне всеки, занимаващ се с конкретна проблематика, за да достигне до изводи, имащи общ характер и по-широка приложимост. В настоящата разработка са намерени класове функции с някои интересни свойства. Като не претендираме за изчерпателност, бихме се радвали, ако този въпрос бъде доразвит и се намерят и други функции, разширяващи обхвата на изложените в статията. От особена важност е и проблемът за практическата приложимост на теоретичните изследвания в настоящата статия.

БЕЛЕЖКИ

1. Тук бихме искали да отбележим, че $F(x)$ трябва да удовлетворява функционалното уравнение (3) за всяко ненулево реално k .
2. Разбира се, $f(x)$ може и да бъде произволна показателна функция от вида $c \cdot d^{ax+b}$ ($d > 0$, $d \neq 1$), имайки предвид, че $d = e^{\ln d}$.
3. Например за квадратната функция $f(x) = ax^2$ между всеки две точки от графиката ѝ, за които $x_A - x_B = k$, то $|x_{A_1} - x_{B_1}| = \frac{|k|}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С., В. Ненков (2012). Анализ на задачите от националната студентска олимпиада по математика, *Математика и информатика*, 4, 295 – 303.
- Гроздев, С. (2010). *Математика за икономисти*. София: ВУЗФ. ISBN 978-954-8590-06-8.

AN INTERESTING PROPERTY FOR SOME CLASSES OF REAL FUNCTIONS

Abstract. The paper is dedicated to the methodological determination of some classes of real functions, for which the distance between the abscises of any two points from their graphics is equal to the distance between the intersection points of the tangents to the graphics and the abscise axis.

Rosen Nikolaev

✉ PhD, Associated Professor
Head of Department
Economiсal University – Varna
77, Kniaz Boris I blvd
9000 Varna
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg