Математика и информатика | Volume 68, Number 2, 2025 | *Mathematics and Informatics*

https://doi.org/10.53656/math2025-?-?-app

Science in Education
Научно-методически статии

ЕДНА КРАТКА ФОРМУЛА ЗА ЛИЦЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК С ДВЕ РАВНИ СРЕЩУПОЛОЖНИ СТРАНИ И ПРИЛОЖЕНИЕТО Ѝ

Йордан Табов[1)], Станислав Стефанов[2)], Хаим Хаимов[3)], Добринка Милушева-Бойкина[4)]

[1)] *Институт по математика и информатика, БАН, София (България)*
[2)] *Висше транспортно училище „Тодор Каблешков“, София (България)*
[4)] *Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив (България)*

Резюме. В статията са развити методи, с които се решават сложни задачи от нивото на олимпиади по математика, които са необходими както на ученици от гимназиалния курс, така и на техните учители. В основата на тези методи лежи една формула за лице на четириъгълник с двойка равни, но неуспоредни срещуположни страни. Тя бе получена като частен случай на по-обща формула за лице на произволен изпъкнал четириъгълник, разгледана в (Stefanov et al. 2024). Тук ще докажем тази формула по по-пряк начин и ще разгледаме приложението ѝ за ефективно решаване на геометрични задачи.

Ключови думи: специален вид четириъгълници; формули за лице; лице на успоредник; задачи

1. Въведение

Към използваните през годините формули за лице на произволен изпъкнал четириъгълник от началото на XX век насам бяха добавени ред нови. По една от тези формули, изложена в (Siddons & Hughes 1929), лицето на четириъгълника се изразява чрез дължините на страните му и тангенса на ъгъла между неговите диагонали, по-друга, разгледана също в (Siddons & Hughes 1929) – чрез дължините на страните и диагоналите му, а по-трета, изложена в (Stefanov et al. 2024) – чрез дължините на страните и тригонометрични функции на други ъгли в четириъгълника.

Оказва се, благодарение на изброените формули за лице на четириъгълник се получават прости методи за ефективното решаване на определени типове задачи с повишена трудност. На първо място – това са задачи за изразяване на лицата на определени видове многоъгълници чрез линейни и ъглови елементи на същите, както и задачи за доказване на определени зависимости в многоъгълниците, които зависимости свързват такива елементи. На второ място – задачи за доказване, че отношението на два определени израза от линейни елементи на четириъгълник приема определена числова стойност. На трето място ще отбележим задачите, в които се изисква лицето на даден четириъгълник, влизащ в определена конфигурация, да се изрази чрез точно определени елементи на конфигурацията.

В зависимост от конкретния вид на дадената задача се използват различни начини (методи) за нейното решаване. Ако задачата е от първия тип, в случая, когато в нея се търси лицето на определен вид многоъгълници, методът за решаването ѝ е добре познат – многоъгълникът се разбива на четириъгълници, които го покриват в съвкупност и нямат общи вътрешни точки помежду си. Лицата на отделните четириъгълници се изразяват по една от изброените по-горе формули и получените изрази се събират. След опростяване се получава лицето на целия многоъгълник. Ако задачата е от първия тип и се изисква да се докаже определена зависимост между елементи на разглеждания в нея вид многоъгълници, удобен е следният начин за нейното решаване. Търсим такъв четириъгълник с върхове измежду върховете на дадения многоъгълник, че ако изразим лицето му по два различни начина – с помощта на две различни формули, и приравним получените изрази, да получим желаната зависимост. Този начин за решаване на задачата предполага (изисква) немалка съобразителност от страна на учениците.

Решаването на задачи от втория тип, в които трябва да се докаже, че отношението на два израза от елементи на даден четириъгълник е равно на определена числова величина, става, като това отношение се замени с отношението на лицата на два определени четириъгълника, свързани с дадения. За целта търсим такива два четириъгълника (свързани с дадения), че отношението на техните лица, изразени с подходяща формула, да съвпада с отношението на изразите. Така задачата се свежда до проверката, че отношението на лицата на двата четириъгълника е равно на въпросната числова величина.

Методът за решаване на задачи от третия тип, в които се изисква лицето на четириъгълник, влизащ в определена конфигурация, да се изрази чрез дадени елементи на тази конфигурация, е съвсем прост. За целта се избира такава формула за лице на четириъгълник, с помощта на която лицето на въпросния четириъгълник се изразява чрез дадените елементи на конфигурацията.

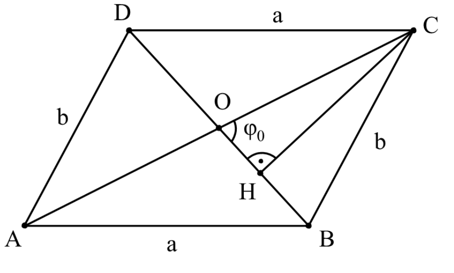
Тук ще изложим решенията на ред задачи от упоменатите типове, получени по описаните начини. Предварително ще изведем споменатата формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни, която заедно с още една от споменатите в началото формули ще ни служи за решаването на задачите. Тази (последната) формула за лице на произволен изпъкнал четириъгълник е следната:

$$S = \frac{1}{4}\left(b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right) \cdot \operatorname{tg}\varphi, \quad \varphi \neq 90^\circ. \qquad (*)$$

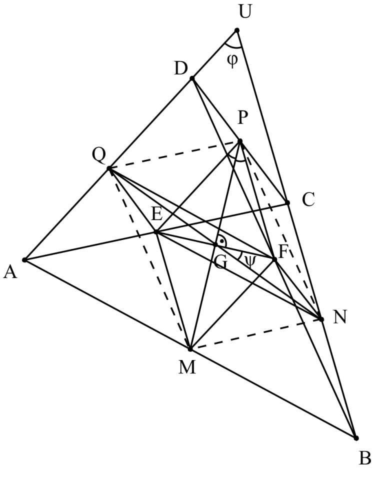
Тук a, b, c и d са дължините на последователните страни на четириъгълника, а φ е ъгълът между диагоналите му, който лежи срещу страната с дължина a.

2. Формула за лице на успоредник с неравни съседни страни

В доказателството на въпросната формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни ще използваме една полезна и за други цели формула – за лице на успоредник с неравни съседни страни.



Фигура 1



Фигура 2

Лема. *Нека в успоредника $ABCD$ дължините на страните AB и BC са съответно a и b, $(a \neq b)$, а острият ъгъл между диагоналите има мярка φ_0. Тогава лицето S на $ABCD$ може да се определи по формулата:*

$$S = \frac{1}{2}\left|a^2 - b^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi_0\,. \qquad (1)$$

Доказателство. Означаваме пресечната точка на диагоналите AC и BD с O (фиг. 1). Без ограничение можем да считаме, че острият ъгъл между диагоналите на успоредника $ABCD$, мярката на който по условие е φ_0, е ъгълът BOC, т.е. че $\measuredangle BOC < \measuredangle BOA$. Двете страни BO и CO на $\triangle BOC$ са съответно равни на двете страни BO и AO на $\triangle AOB$. Ъгълът BOC между първата двойка страни е по-малък от ъгъла BOA между втората двойка. Тогава дължината на третата страна BC на $\triangle BOC$ ще е по-малка от дължината на третата страна AB на $\triangle AOB$, т.е. ще имаме: $b < a$. От $\measuredangle BOC < 90^\circ$ освен това следва, че ортогоналната проекция H на върха C върху правата BD лежи на лъча $OB^{\rightarrow}$. От Питагоровата теорема $a^2 = CH^2 + DH^2$ и $b^2 = CH^2 + BH^2$ за правоъгълните триъгълници DHC и BHC следва:

$$
\begin{aligned}
& a^2 - b^2 = \left(CH^2 + DH^2\right) - \left(CH^2 + BH^2\right) = DH^2 - BH^2 = \\
& = (DH - BH)(DH + BH) = [(DO + OH) - (BO - OH)] \cdot BD = \\
& = 2 \cdot OH \cdot BD\,.
\end{aligned}
$$

От друга страна, от правоъгълния $\triangle OHC$, в който $\measuredangle COH = \varphi_0$, имаме: $OH = CH \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0$. Тогава:

$$a^2 - b^2 = 2 \cdot OH \cdot BD = 2 \cdot CH \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0 \cdot BD = 4S_{BCD} \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0 = 2S \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0\,.$$

Оттук непосредствено следва доказаното равенство (1). $\square$

3. Формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни

Вече можем да пристъпим към разглеждане предмета на настоящата статия и да формулираме и докажем въпросната формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни.

Теорема. *Нека $ABCD$ е четириъгълник с равни страни AD и BC, продълженията на които се пресичат в точка U и $\measuredangle AUB = \varphi$. Тогава лицето на $ABCD$ може да се определи от равенството:*

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\left|AB^2 - CD^2\right| \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\,. \tag{2}$$

Доказателство. Означаваме средите на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$ съответно с M, N, P и Q (фиг. 2). Понеже $EP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = FP$ (средни отсечки) и аналогично $EM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = FM$, то $EP = FP = EM = FM$ и следователно четириъгълникът $EMFP$ е ромб. Освен това $EP \parallel AD$ и $FP \parallel BC$, следователно $\measuredangle EPF = \measuredangle AUB = \varphi$. Означаваме $EF \bigcap MP = G$. Тогава G е среда на EF и MP. Освен това $\measuredangle FGP = 90^\circ$ (от ромба $EMFP$)

и $\measuredangle GPF = \frac{1}{2}\measuredangle EPF = \frac{1}{2}\varphi$. Оттук, като вземем предвид, че $\triangle\, PGF$ е правоъгълен, получаваме:

$$MP = 2 \cdot GP = 2 \cdot GF \cdot \operatorname{cotg} \measuredangle GPF = EF \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\,. \tag{3}$$

Понеже $QP \parallel AC \parallel MN$ и $QM \parallel BD \parallel PN$ (средни отсечки), четириъгълникът $MNPQ$ също е успоредник, а понеже $QE \parallel CD \parallel FN$ и $EN \parallel AB \parallel QF$, то и четириъгълникът $QENF$ е успоредник. Без ограничение можем да считаме, че острият ъгъл между диагоналите на успоредника $QENF$ е ъгъл FGN. Нека $\measuredangle FGN = \bar{\psi}$. Тогава $\measuredangle PGN = \measuredangle PGF + \measuredangle FGN = 90^\circ + \bar{\psi}$. Освен това $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$ (по теоремата на Вариньон). С помощта на равенство (3) и формулата от лемата получаваме последователно:

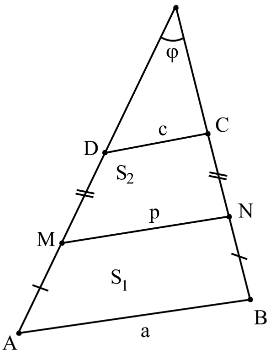
$$\begin{aligned}
&S_{ABCD} = 2S_{MNPQ} = \\
&= MP \cdot QN \cdot \sin \measuredangle PGN = \left(EF \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\right) \cdot QN \cdot \sin\left(90^\circ + \bar{\psi}\right) = \\
&= QN \cdot EF \cdot \sin\bar{\psi} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos\bar{\psi}}{\sin\bar{\psi}} = 2S_{QENF} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\bar{\psi} = \\
&= \left[\left|QF^2 - QE^2\right| \cdot \operatorname{tg}\bar{\psi}\right] \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\bar{\psi} = \left|\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\,.
\end{aligned}$$

С това равенство (2) е доказано. □

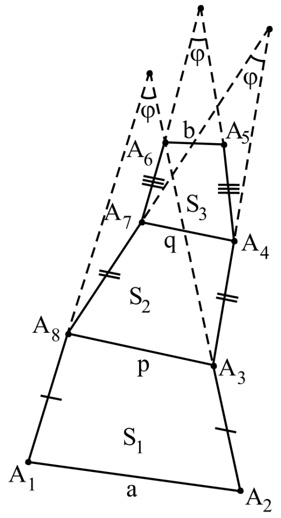
4. Публикувани вече задачи, които се решават с помощта на изведената формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни

Доказаната тук формула за лице на четириъгълник с двойка равни срещуположни страни служи за ефективното решаване на сложни геометрични задачи. Ще припомним първо задачите от статията (Stefanov et al., 2024), понеже решението на всяка една от тях е отлична илюстрация на ефекта от използването на разглежданата формула.

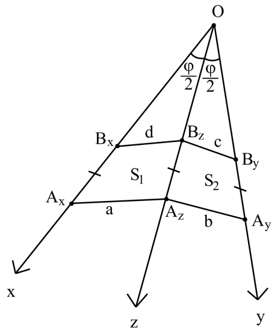
Задача 1. Върху страните AD и BC на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, в който тези страни са равни, са взети съответно точките M и N така, че $AM = BN$. Нека $AB = a$, $CD = c$, $MN = p \quad (a > p > c)$. Ако S_2 и S_1 са лицата съответно на четириъгълниците $MNCD$ и $ABNM$, да се докаже равенството: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a^2 - p^2}{p^2 - c^2}\,.$



Фигура 3



Фигура 4



Фигура 5

Решение: Означаваме ъгъла между продълженията на страните AD и BC с φ (фиг. 3). В четириъгълниците $ABNM$ и $MNCD$ имаме: $AM = BN$ и $MD = CN$. Можем да използваме формула (2) и за лицата S_1 и S_2 на тези четириъгълници получаваме съответно:
$S_1 = \frac{1}{4}\left(a^2 - p^2\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ и $S_2 = \frac{1}{4}\left(p^2 - c^2\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$. Оттук непосредствено следва желаното равенство. □

Задача 2. Нека $A_1A_2......A_8$ е може би и неизпъкнал осмоъгълник (фиг. 4) и $A_1A_2 = a,\ A_8A_3 = p,\ A_7A_4 = q,\ A_6A_5 = b\ \ (a > p > q > b)$. Нека дължините на двойките страни A_1A_8 и A_2A_3; A_8A_7 и A_3A_4; A_7A_6 и A_4A_5 са равни помежду си, а лъчите $A_1\ \vec{A_8}$ и $A_2\ \vec{A_3}$; $A_8\ \vec{A_7}$ и $A_3\ \vec{A_4}$; $A_7\ \vec{A_6}$ и $A_4\ \vec{A_5}$ образуват по двойки при пресичането си един и същ ъгъл φ. Да се докаже, че лицето S на осмоъгълника се определя чрез равенството $S = \frac{1}{4}\left(a^2 - b^2\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

Решение: Означаваме лицата на четириъгълниците $A_1A_2A_3A_8$, $A_8A_3A_4A_7$ и $A_7A_4A_5A_6$ съответно с S_1, S_2 и S_3. Четириъгълникът $A_1A_2A_3A_8$ има две равни срещуположни страни A_1A_8 и A_2A_3, ъгълът между продълженията на които по условие е равен на φ. Затова по формула (2) за лицето на този четириъгълник имаме: $S_1 = \frac{1}{4}\left(a^2 - p^2\right)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$. Аналогично получаваме: $S_2 = \frac{1}{4}\left(p^2 - q^2\right)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ и $S_3 = \frac{1}{4}\left(q^2 - b^2\right)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

Тогава $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{4}\left[\left(a^2 - p^2\right) + \left(p^2 - q^2\right) + \left(q^2 - b^2\right)\right] \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}\left(a^2 - b^2\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$. С това желаното равенство е доказано. □

Задача 3. Лъчът $OZ^{\rightarrow}$ разполовява ъгъл XOY. Върху лъчите $OX^{\rightarrow}$, $OY^{\rightarrow}$ и $OZ^{\rightarrow}$ са нанесени произволно равни отсечки A_xB_x, A_yB_y, A_zB_z така, че точките B_x, B_y и B_z лежат съответно между точките A_x и O, A_Y и O, A_z и O. Нека $A_xA_z = a$, $A_zA_y = b$, $B_yB_z = c$ и $B_zB_x = d$. Ако лицата на четириъгълниците $A_xA_zB_zB_x$ и $A_zA_yB_yB_z$ са съответно S_1 и S_2, да се докаже равенството: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\left|a^2 - d^2\right|}{\left|b^2 - c^2\right|}$.

Решение: Полагаме $\measuredangle XOY = \varphi$ (фиг. 5) (Понеже лъчът $OZ^{\rightarrow}$ разполовява ъгъл XOY, то $\measuredangle A_xOA_z = \measuredangle A_zOA_y = \frac{\varphi}{2}$). Четириъгълникът $A_xA_zB_zB_x$ има две равни срещуположни страни A_xB_x и A_zB_z, ъгълът между продълженията на които има мярка $\frac{\varphi}{2}$. Тогава по формула (2), за лицето на този четириъгълник получаваме: $S_1 = \frac{1}{4}\left|a^2 - d^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{4}$. Аналогично определяме: $S_2 = \frac{1}{4}\left|b^2 - c^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{4}$. Следователно $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\left|a^2 - d^2\right|}{\left|b^2 - c^2\right|}$. С това желаното равенство е доказано. □

Сега преминаваме към задачи, неразгледани в споменатия по-горе източник.

5. Задача за един специален вид четириъгълници

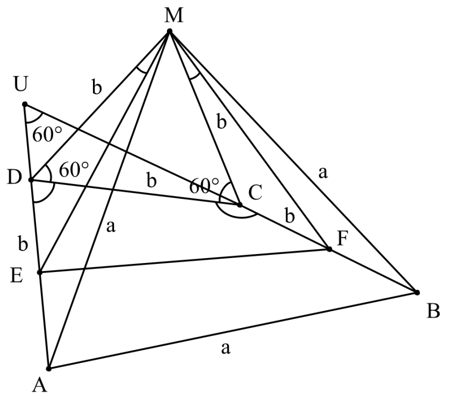
Ще разгледаме първо приложението на формула (2) за лице на четириъгълник с две равни срещуположни страни за решаването на една задача за специален вид четириъгълници, притежаващ много забележителни свойства, голяма част от които са изследвани в (Haimov 1994) и (Haimov 1995) :

Определение. Четириъгълникът $ABCD$ с равни страни AD, CD и CB, в който $\measuredangle ADC + \measuredangle DCB = 240^\circ$ се нарича трибедреник с основа AB и бедра AD, DC и CB (фиг. 6).

Лесно се проверява, че в трибедреника $ABCD$ продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U, за която $\measuredangle AUB = 60^\circ$.

Задача 4. Нека $ABCD$ е трибедреник с основа $AB = a$ и бедра $AD = DC = CB = b$. Ако E и F са средите съответно на бедрата AD и BC, да се определят лицата на четириъгълниците $ABFE$ и $EFCD$ (фиг. 6).

Решение: Прилагаме формула (2) за лице на четириъгълник с две равни срещуположни страни към четириъгълниците $ABFE$ и $EFCD$ и получаваме:



Фигура 6

$$S_{ABFE} = \frac{1}{4}\left|AB^2 - EF^2\right| \cdot \operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{1}{4}\left|a^2 - EF^2\right| \cdot \sqrt{3}, \qquad (4)$$

$$S_{EFCD} = \frac{1}{4}\left|EF^2 - CD^2\right| \cdot \operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{1}{4}\left|EF^2 - b^2\right| \cdot \sqrt{3}. \qquad (5)$$

Ще определим дължината на отсечката EF. Построяваме в полуравнината на правата DC, не съдържаща трибедреника, равностранен $\triangle DCM$. Имаме последователно:

$$\measuredangle ADM = \measuredangle ADC + 60^\circ = (240^\circ - \measuredangle BCD) + 60^\circ = 300^\circ - \measuredangle BCD =$$
$$= 360^\circ - (\measuredangle BCD + 60^\circ) = 360^\circ - (\measuredangle BCD + \measuredangle DCM) = \measuredangle BCM,$$

т.е. $\measuredangle EDM = \measuredangle FCM$. Освен това $ED = CF = \frac{b}{2}$ и $DM = CM$ (по построение), следователно $\triangle EDM \cong \triangle FCM$. Оттук получаваме $EM = FM$ и $\measuredangle EMD = \measuredangle FMC$. Тогава:

$$\measuredangle EMF = \measuredangle DMF - \measuredangle EMD =$$
$$= (\measuredangle DMC + \measuredangle FMC) - \measuredangle EMD = \measuredangle DMC = 60^\circ.$$

Получихме, че $\measuredangle EMF = 60^\circ$ и че $EM = FM$, откъдето следва, че $\triangle EFM$ е равностранен. Тогава $EF = EM$. Аналогично се доказва, че $\triangle ABM$ е равностранен, следователно $AM = AB = a$. От $\triangle ADM$, в който ME е медиана, имаме:

$$4EM^2 = 2AM^2 + 2DM^2 - AD^2 = 2a^2 + 2b^2 - b^2 = 2a^2 + b^2.$$

Следователно $EF^2 = EM^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + b^2\right)$. Като заместим в равенства (4) и (5), оттук получаваме: $S_{ABFE} = \left|2a^2 - b^2\right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$, $S_{EFCD} = \left|2a^2 - 3b^2\right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$.

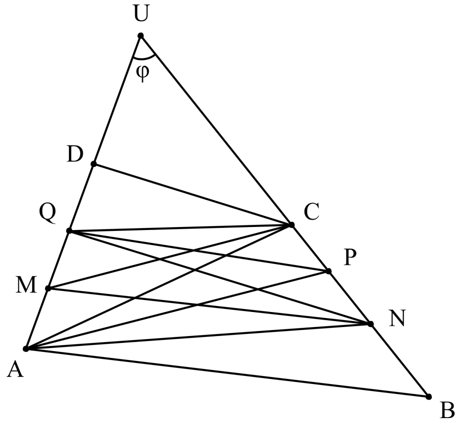
6. Задача за четириъгълник с двойка равни срещуположни страни

Задача 5. Нека $ABCD$ е четириъгълник с равни (но не успоредни) страни AD и BC и точките M и Q разделят страната AD на три равни части, а точките N и P – страната BC също на три равни части. Да се докаже равенството:

$$\left|MN^2 - PQ^2\right| = \frac{1}{3}\left|AB^2 - CD^2\right|. \qquad (6)$$

Решение: Ще докажем първо, че $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ANCQ}$. Понеже NM е медиана в $\triangle ANQ$ (фиг. 7), имаме $S_{QMN} = \frac{1}{2}S_{AQN}$, а понеже QP е медиана в $\triangle QCN$, аналогично $S_{QPN} = \frac{1}{2}S_{QNC}$. Тогава:

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= S_{QMN} + S_{QPN} = \\ &= \frac{1}{2}S_{AQN} + \frac{1}{2}S_{QNC} = \\ &= \frac{1}{2}S_{ANCQ}. \end{aligned} \qquad (7)$$



Фигура 7

Ще докажем сега, че $S_{ANCQ} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$. Триъгълниците ACQ и ACD имат обща височина през върха C и $AQ = \frac{2}{3}AD$. Следователно $S_{ACQ} = \frac{2}{3}S_{ACD}$. Аналогично се доказва, че $S_{ACN} = \frac{2}{3}S_{ABC}$. Затова:

$$S_{ANCQ} = S_{ACQ} + S_{ACN} = \frac{2}{3}S_{ACD} + \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}S_{ABCD}.$$

От (7) сега следва:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ANCQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD},$$

т.е.

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}. \qquad (8)$$

Означаваме мярката на ъгъла между продълженията на страните AD и BC на четириъгълника $ABCD$ с φ. По формула (2) за лице на четириъгълник с две равни срещуположни страни от четириъгълниците $MNPQ$

и $ABCD$ получаваме съответно:

$$S_{MNPQ} = \frac{\left|MN^2 - PQ^2\right|}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\,,$$
$$S_{ABCD} = \frac{\left|AB^2 - CD^2\right|}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}\,.$$

След почленно деление на тези две равенства достигаме до равенството:

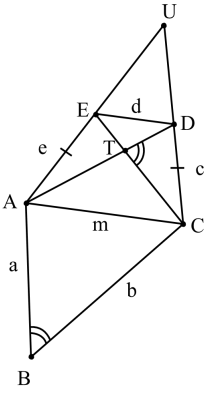
$$\frac{\left|MN^2 - PQ^2\right|}{|AB^2 - CD^2|} = \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}}\,.$$

Оттук и от (8) непосредствено следва доказваното равенство (6). □

Забележка. Изложеното решение може съществено да се съкрати, ако се използват получените в (Parusheva 2023) резултати.

7. Една задача за петоъгълник

Задача 6. В изпъкналия петоъгълник $ABCDE$ дължините на страните AB, BC, CD, DE и EA са съответно a, b, c, d и e (фиг. 8). Нека T е пресечната точка на диагоналите AD и EC, а U – тази на продълженията на страните AE и CD. Ако са изпълнени условията $\measuredangle CTD = \measuredangle ABC \neq 90^\circ$, $\measuredangle AUC = 180^\circ - 2\measuredangle ABC$, $AE = CD$ и $AC > ED$, да се докаже равенството $AE = ED = DC$.



Фигура 8

Решение: Означаваме дължината на диагонала AC с m (фиг. 8). Понеже $\measuredangle AUC = 180^\circ - 2\measuredangle ABC$ (по условие), то е изпълнено равенството:

$$\frac{\measuredangle AUC}{2} = 90^\circ - \measuredangle ABC.$$

Същевременно в четириъгълника $ACDE$ имаме $AE = CD$ (по условие). Затова с помощта на горното равенство и формула (2) за лице на четириъгълник с две равни срещуположни страни получаваме:

$$S_{ACDE} = \frac{1}{4}\left|m^2 - d^2\right| \cdot \operatorname{cotg} \frac{\measuredangle AUC}{2} = \frac{1}{4}\left|m^2 - d^2\right| \cdot \operatorname{tg} \measuredangle ABC,$$

т.е.

$$S_{ACDE} = \frac{1}{4}\left|m^2 - d^2\right| \cdot \operatorname{tg}\measuredangle ABC. \tag{9}$$

От друга страна, от цитираната в началото формула ($*$) за лице на изпъкнал четириъгълник, предвид условието $\measuredangle CTD \neq 90°$, имаме:

$$S_{ACDE} = \frac{1}{4}\left(m^2 + d^2 - e^2 - c^2\right) \cdot \operatorname{tg}\measuredangle CTD.$$

Оттук и условието $\measuredangle CTD = \measuredangle ABC$ следва равенството:

$$S_{ACDE} = \frac{1}{4}\left(m^2 + d^2 - e^2 - c^2\right) \cdot \operatorname{tg}\measuredangle ABC. \tag{10}$$

Сравнявайки десните части на равенства (9) и (10), получаваме равенството:

$$\frac{1}{4}\left|m^2 - d^2\right| \cdot \operatorname{tg}\measuredangle ABC = \frac{1}{4}\left(m^2 + d^2 - e^2 - c^2\right) \cdot \operatorname{tg}\measuredangle ABC.$$

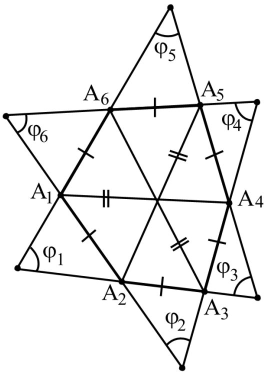
От последното равенство, предвид условието $m > d$, следва равенството:

$$m^2 - d^2 = m^2 + d^2 - e^2 - c^2.$$

Оттук, понеже $e = c$ (по условие), получаваме: $2d^2 = e^2 + c^2 = 2e^2 = 2c^2$. Така достигнахме до доказаното равенство $d = e = c$. □

8. Една задача за шестоъгълник

Задача 7. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е равностранен шестоъгълник и мерките на ъглите, получени при пресичането на продълженията на последователните двойки страни, взети през една, т.е. получени при пресичането на: A_1A_6 и A_2A_3, A_1A_2 и A_4A_3, A_2A_3 и $A_5A_4, \ldots$, A_5A_6 и A_1A_2, са съответно $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_6$. Ако диагоналите A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 имат равни дължини и е изпълнено условието $A_1A_4 \neq A_2A_3$, да се докажат равенствата:



Фигура 9

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi_3}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_6}{2}. \tag{11}$$

Решение: Означаваме лицето на шестоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ с S

(фиг. 9). По условие имаме $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1$. Разглеждаме четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_4A_5A_6$, на които диагоналът A_1A_4 дели шестоъгълника. Понеже $A_1A_2 = A_3A_4$ и $A_1A_6 = A_4A_5$, всеки от тези четириъгълници притежава двойка равни срещуположни страни. По формула (2) за лице на такъв четириъгълник тогава имаме:

$$S_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_2A_3{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2}\,,$$
$$S_{A_1A_4A_5A_6} = \frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_5A_6{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2}\,.$$

От друга страна, е изпълнено равенството:

$$S = S_{A_1A_2A_3A_4} + S_{A_1A_4A_5A_6}.$$

Заместваме в него с помощта на горните две равенства и получаваме:

$$S = \frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_2A_3{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2} + \frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_5A_6{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2}\,. \tag{12}$$

Разглеждаме сега четириъгълниците $A_1A_2A_3A_6$ и $A_4A_5A_6A_3$, на които диагоналът A_3A_6 дели шестоъгълника. Понеже $A_1A_6 = A_2A_3$ и $A_3A_4 = A_6A_5$ (по условие), това също са четириъгълници с двойка равни срещуположни страни. По формула (2) за лицето на такъв четириъгълник тогава имаме:

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3A_6} &= \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_1A_2{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2}\,, \\ S_{A_4A_5A_6A_3} &= \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_4A_5{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Като съберем почленно тези равенства и вземем предвид, че $S_{A_1A_2A_3A_6} + S_{A_4A_5A_6A_3} = S$, получаваме:

$$S = \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_1A_2{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_4A_5{}^2\right| \cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2}\,. \tag{14}$$

От друга страна, имаме $A_2A_3 = A_5A_6$ (по условие), откъдето следва равенството:

$$\left|A_1A_4{}^2 - A_2A_3{}^2\right| = \left|A_1A_4{}^2 - A_5A_6{}^2\right|.$$

Оттук и от равенство (12) получаваме:

$$S = \frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_2A_3{}^2\right| \cdot \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2}\right). \tag{15}$$

Аналогично от $A_1A_2 = A_4A_5$ (по условие) следва равенството:

$$\left|A_3A_6{}^2 - A_1A_2{}^2\right| = \left|A_3A_6{}^2 - A_4A_5{}^2\right|.$$

Оттук и от равенство (14) получаваме:

$$S = \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_1A_2{}^2\right| \cdot \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2}\right).$$

От последното равенство и (15) следва равенството:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left|A_1A_4{}^2 - A_2A_3{}^2\right| \cdot \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left|A_3A_6{}^2 - A_1A_2{}^2\right| \cdot \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Понеже $A_1A_4 = A_3A_6$ и $A_2A_3 = A_1A_2$ (по условие), имаме:

$$|A_1A_4 - A_2A_3| = |A_3A_6 - A_1A_2|. \tag{17}$$

При това $A_1A_4 \neq A_2A_3$ (по условие), откъдето следва, че:

$$|A_1A_4 - A_2A_3| \neq 0. \tag{18}$$

Като вземем предвид първо равенство (17), а след това условие (18) от равенство (16), получаваме:

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_5}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi_4}{2}.$$

Така стигнахме до първото от желаните равенства (11). Аналогично се доказва и второто равенство. □

Сега ще се спрем накратко и на няколко приложения на следната (спомената в началото) формула за лице на произволен изпъкнал четириъгълник, изложена в (Siddons & Hughes 1929):

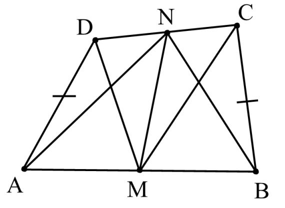
$$16S^2 = 4m^2n^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2 - d^2\right)^2. \tag{**}$$

(Тук a, b, c и d са дължините на последователните страни на четириъгълника, а m и n са дължините на диагоналите му.)

Едно от приложенията на тази формула се изразява в решението на следната конкурсна задача (фиг. 10), публикувана в „Рубрика М+“ на сп. „Математика плюс“, бр. 4, 2021 г.:

Задача 8. (*Задача* M^+653). Изпъкналият четириъгълник ABCD е такъв, че $AD = BC$. Ако точките M и N лежат съответно върху страните AB и CD така, че са изпълнени равенствата $AM^2 + BN^2 = BM^2 + CN^2$ и $S_{AMND} = S_{BMNC}$, да се докаже, че $AN \cdot DM = BN \cdot CM$.

Решение: Прилагаме формула (∗∗) към четириъгълниците AMND и BMNC и получаваме (фиг. 10):



Фигура 10

$$16S^2{}_{AMND} = 4AN^2 \cdot DM^2 - \left(AM^2 + DN^2 - AD^2 - MN^2\right)^2,$$
$$16S^2{}_{BMNC} = 4BN^2 \cdot CM^2 - \left(BM^2 + CN^2 - BC^2 - MN^2\right)^2.$$

Понеже $S_{AMND} = S_{BMNC}$ и $AM^2+DN^2-AD^2-MN^2 = BM^2+CN^2-BC^2-MN^2$ (предвид условията $AM^2+DN^2 = BM^2+CN^2$ и $AD = BC$), оттук стигаме до доказваното равенство $AN \cdot DM = BN \cdot CM$. □

С помощта на формула (∗∗) лесно се извежда следната зависимост, свързваща дължините на страните и диагоналите на изпъкнал четириъгълник:

$$\begin{aligned}&m^2n^2\left(m^2+n^2\right)+m^2\left(a^2-d^2\right)\left(b^2-c^2\right)+\\&+n^2\left(a^2-b^2\right)\left(d^2-c^2\right)-m^2n^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\\&+\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)\left(b^2d^2-a^2c^2\right)=0\,.\end{aligned}\qquad (***)$$

От своя страна, изложената зависимост служи за решаването на следната конкурсна задача, публикувана в „Рубрика М+“ на сп. „Математика плюс“, бр. 1, 2023 г.:

Задача M^+665. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $AB = AC = a$ и $AD = CD = BC = b$. Да се определи дължината на диагонала BD.

(Решението на тази задача с помощта на равенство (∗ ∗ ∗) е намерено от Мартин Димитров.)

Друго приложение на формула (∗∗) се съдържа в решението на следната конкурсна задача, публикувана в „Рубрика М+“ на сп. „Математика плюс“, бр. 2, 2023 г.

Задача M^+671. В изпъкналия петоъгълник $ABCDE$ пресечната точка на диагоналите AC и BD е T и $\measuredangle AED = \measuredangle CTD \neq 90^\circ$. Ако дължините на отсечките AB, BC, CD, DE, EA, BD и AC са съответно a, b, c, d, e,

m и n, да се докаже, че за лицето S на $ABCD$ е изпълнено равенството:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4(mn+de)^2 - (b^2+d^2+e^2-a^2-c^2)^2}\,.$$

(Решението на тази задача е намерено също от Мартин Димитров.)

Заключение

В статията разгледахме приложението на една кратка формула за лице на четириъгълник с две равни срещуположни страни за решаването на 7 задачи с повишена трудност. Разгледахме и 3 конкурсни задачи, които се решават с помощта на една полезна формула за лице на произволен изпъкнал четириъгълник. Към тези задачи в бъдещи статии ще добавим нови.

ЛИТЕРАТУРА

ПАРУШЕВА П., 2023. Редица от лица. *Математика*, № 2, с. 28 – 29.

ХАИМОВ Х., 1994. Трибедреникът – забележителен вид четириъгълник. *Математика*, № 1, с. 41 – 46.

ХАИМОВ Х., 1995. Трибедреникът в задачи. *Математика*, № 1, с. 51 – 55.

REFERENCES

HAIMOV H., 1994. The three-thigh quadrilateral – a remarkable type of quadrilateral. *Mathematics*, no. 1, pp. 41 – 46 (in Bulgarian).

HAIMOV H., 1995. Problems for the three-thigh quadrilateral. *Mathematics*, no. 1, pp. 51 – 55 (in Bulgarian).

PARUSHEVA P., 2023. A series of areas. *Mathematics*, no. 2, pp. 28 – 29 (in Bulgarian).

SIDDONS A., HUGHES R., 1929. Trigonometry. *C.U.P., Cambridge*, OCLC Number/Unique Identifier 429528983.

STEFANOV ST., TABOV J., KANCHEV K., TSACHEVA N., HAIMOV H., 2024. Metric Dependencies in a Quadrilateral. Other Formulas for its Area. *50-th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'2024)*, 7-13 June, Sozopol, Bulgaria. ISSN: 0094243X (Accepted for publication in the AIP Conference Proceedings).

A SHORT FORMULA FOR THE AREA OF A QUADRILATERAL WITH TWO EQUAL OPPOSITE SIDES AND IT'S APPLICATION

Abstract. The article develops methods for solving complex problems at the level of mathematics olympiads, which are necessary for both high school students and their teachers. At the heart of these methods lies a formula for the area of a quadrilateral with a pair of equal but non-parallel opposite sides. It obtains as a special case of a more general formula for the area of an arbitrary convex quadrilateral, discussed in (Stefanov et al. 2024). Here we will prove the last formula in a more direct way and will consider its application to efficiently solving geometric problems.

Keywords: a special kind of quadrilaterals; area formulas; area of a parallelogram; problems

✉ **DSc. Jordan Tabov, Prof.**
ORCID iD: 0000-0001-5436-5134
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academie of Sciences
bl. 8, Acad. G. Bonchev St.
Sofia, Bulgaria
E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assoc. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-8254-1075
Todor Kableshkov University of Transport
158, Geo Milev St.
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math**
ORCID iD: 0000-0002-0914-1059
16, Bratya Shkorpil St.
Varna, Bulgaria
E-mail: haim.haimov@abv.bg

✉ **Dr. Dobrinka Milusheva-Boykina, Assoc. Prof.**
ORCID iD: 0000-0002-4920-3736
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski"
236, "Bulgaria" St.
Plovdiv, Bulgaria
E-mail: boikina@uni-plovdiv.bg